

Оглавление

Введение.....	2
1. Метод, основанный на байесовской оценке решения системы уравнений лазерного газоанализа.....	7
1.1 Анализ данных измерений в задачах контроля состава газов на промышленных предприятиях и конкретных локальных источников антропогенных загрязнений атмосферы.....	7
1.2 Статистические оценки	10
1.3 Методы построения статистических оценок.....	12
1.4 Байесовская оценка решения уравнения лазерного газоанализа.....	15
1.5 Примеры определения концентраций газов в различных газовых смесях	19
2. Метод калмановской фильтрации	24
2.1 Дискретные динамические системы	25
2.2 Фильтр Калмана	31
2.3 Применение фильтра Калмана при решении задач лазерного абсорбционного газоанализа.....	40
2.4 Примеры определения концентраций газов с помощью фильтра Калмана	43
Список литературы	48

Введение

Развитие науки и техники, внедрение новых технологических процессов приводит к все большему загрязнению окружающей среды, носящему тотальный характер. Изменения в промышленном производстве сказались на составе промышленных выбросов, что привело к качественно новому загрязнению воздушного и водного бассейнов Земли [1-4]. Наряду с новыми загрязнениями природного характера во внешней среде появились синтетические соединения, не существующие и не образующиеся в природе и не свойственные ей.

Особо важное значение для человека и природной среды в целом имеет экологический контроль загрязненности атмосферного воздуха.

Источниками загрязнений атмосферного воздуха являются топки печей, ГРЭС, химические, металлургические и другие промышленные производства, выхлопные газы автотранспорта, продукты сгорания турбореактивных двигателей самолетов, лесные, торфяные и другие пожары и т.п.

Вредные атмосферные примеси оказывают на человека и природную среду токсическое, канцерогенное (вызывают злокачественные новообразования), мутагенное (вливают на наследственность), тератогенное (вызывают уродства у рождающихся детей), аллергенное и климатическое воздействие (см., например [1]).

Ежегодно вследствие активной промышленной деятельности человека в атмосферу Земли выбрасываются тысячи различных загрязнителей. Основными загрязняющими газовыми компонентами являются оксиды углеродов (углекислый газ и оксид углерода), соединения серы, соединения азота (оксиды азота, аммиак, органические соединения азота), углеводороды, озон, галогеносодержащие соединения.

Целью контроля загрязнения атмосферного воздуха является получение полной информации о качественном и количественном составе загрязненного воздуха и его изменении, необходимой для прогнозирования степени загрязнения воздуха, выполнения мероприятий по охране окружающей среды, гигиенических и токсикологических исследований.

Загрязненный воздух является одним из наиболее трудных объектов анализа. Сложность анализов загрязненного воздуха объясняется следующими причинами:

1. Атмосфера и воздух производственных помещений являются многокомпонентной смесью газовых загрязнителей, содержащих множество вредных веществ, относящихся к химическим соединениям различных классов.

Оглавление

2. Концентрации составляющих таких многокомпонентных газовых смесей могут отличаться между собой на несколько порядков.

3. Загрязненный воздух часто представляет собой нестационарную смесь, или неустойчивую вследствие постоянного изменения метеорологических условий и химического взаимодействия загрязнителей, или нестационарную вследствие выброса (утечки), например, вредных (токсичных) загрязнителей.

Поэтому для подобных анализов необходимы селективные и высокочувствительные аналитические методы, обладающие высокой разрешающей способностью и позволяющие проводить экспрессное определение количественного состава многокомпонентных загрязнителей. Этим требованиям в наибольшей степени удовлетворяют лазерные методы, которые являются наиболее перспективными для оперативного дистанционного и локального газоанализа многокомпонентных смесей (см., например [5-15]).

Если качественный состав газовой смеси известен, то измерение концентраций компонент смеси может быть проведено с использованием перестраиваемого по длине волны источника лазерного излучения, путем регистрации поглощения излучения анализируемой газовой смесью для определенного набора спектральных каналов измерения. Важным условием применимости такого метода является аддитивность коэффициентов поглощения (в используемых спектральных каналах измерения) отдельных компонент анализируемой газовой смеси.

Рассмотрим обратную задачу многокомпонентного лазерного газоанализа с учетом неселективного поглощения. Для каждого газового компонента смеси выбирается две длины волны излучения – одна длина волны совпадает с максимумом поглощения данного газа, другая – находится в стороне от максимума поглощения и на ней излучение практически не ослабляется за счет поглощения газом. Предполагая, что спектральные каналы (длины волн) измерения в газоанализаторе выбираются попарно близко друг от друга, так что коэффициенты неселективного поглощения в каждой паре каналов равны друг другу.

Для определенности будем считать, что газовая смесь содержит K газовых компонент.

При многоспектральных лазерных измерениях на M длинах волн сигналы, снимаемые с приемника лазерного газоанализатора, могут быть описаны следующей системой линейных уравнений [13-15] (считаем, что ширина лазерных линий излучения

[Оглавление](#)

на длинах волн λ_i много меньше ширины линий поглощения анализируемых газовых компонент):

$$\sum_{j=1}^K \kappa_{1j} n_j + \beta_1 = y_1$$

$$\sum_{j=1}^K \kappa_{2j} n_j + \beta_2 = y_2$$

..... (1)

$$\sum_{j=1}^K \kappa_{Mj} n_j + \beta_M = y_M$$

где: y_i - приведенный измеряемый сигнал на длине волны λ_i ; n_j - концентрация j - го газа смеси; $\kappa_{1j}, \kappa_{2j} \dots \kappa_{Mj}$ и $\beta_1, \beta_2 \dots \beta_M$ - коэффициенты поглощения j - го газа и показатели неселективного поглощения на длинах волн $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_M$.

Неизвестными величинами в системе уравнений (1) являются концентрации газов n_j и показатели неселективного поглощения $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_M$ на длинах волн излучения лазера.

Показатели неселективного поглощения слабо зависят от длины волны. Поэтому обычно считают, что если спектральные каналы измерений выбраны попарно (для каждой газовой компоненты) достаточно близко, то для каждой пары каналов показатели поглощения можно положить равными константе.

Часто от системы линейных уравнений (1) переходят к системе разностных уравнений (вычитая попарно уравнения, для которых показатели β_i можно положить

равными константе):

$$\sum_{j=1}^K (\kappa_{1j} - \kappa_{2j}) n_j = \Delta y_1$$

$$\sum_{j=1}^K (\kappa_{3j} - \kappa_{4j}) n_j = \Delta y_2$$

..... (2)

$$\sum_{j=1}^K (\kappa_{Mj} - \kappa_{M-1j}) n_j = \Delta y_{M/2}$$

[Оглавление](#)

где:

$$\Delta y_i = y_{2i-1} - y_{2i}.$$

Часто системы линейных уравнений (1) и (2) записывают в более компактной матричной записи.

В матричной форме система уравнений (1) имеет вид:

$$Wx = Kn + \beta = y \quad (3)$$

где:

W - матрица системы уравнений (1); x - искомый вектор решения; K - матрица коэффициентов поглощения компонент исследуемой газовой смеси; n - вектор концентраций газов; β - вектор показателей неселективного поглощения; y - вектор правых частей системы уравнений (2).

Система уравнений лазерного газоанализа (2) в матричной форме имеет вид:

$$\Delta K \cdot n = \Delta y \quad (4)$$

где:

Δy - K -мерный вектор с разностями приведенных сигналов
 $\Delta y_i = \Delta y(\lambda_i) = y(\lambda_{2i-1}) - y(\lambda_{2i}) = y_{2i-1} - y_{2i};$

ΔK - матрица размерностью $K \times K$ с разностями коэффициентов поглощения
 $\Delta K_{ji} = \Delta K_j(\lambda_i) = K_j(\lambda_{2i-1}) - K_j(\lambda_{2i}).$

Трудность решения уравнений (1) - (4) (т.е. определения концентраций газовых компонент смеси по данным многоспектральных измерений лазерного газоанализатора) заключается в том, что правая часть уравнения нам всегда известна с некоторой случайной ошибкой ξ , обусловленной погрешностями измерения, шумами измерительной аппаратуры, каналов связи и т.п.

Таким образом, например, в (4) вместо Δy имеем:

$$\Delta \tilde{y} = \Delta y + \xi \quad (5)$$

где:

Δy - точное значение правой части (4);

[Оглавление](#)

ξ - K -мерный вектор шума; при задании параметров этого вектора шума необходимо учесть, что для каждого разностного сигнала из (4) (формируемого как разность двух сигналов полной системы уравнений (3)) среднее значение сигнала будет равно разности средних значений сигналов, а дисперсия - сумме дисперсий сигналов полной системы уравнений (3). Поэтому статистические характеристики разностных сигналов в (4) могут существенно отличаться от статистических характеристик сигналов полной системы уравнений (3).

В этих условиях попытки непосредственно обратить уравнение лазерного газоанализа (например, уравнение (4)) приводят к тому, что найденный обратный оператор не обладает свойством устойчивости к малым изменениям правой части уравнения, т.е. сколь угодно малые вариации данных измерений (сколь угодно малые вариации правой части уравнения) могут привести к сколь угодно большим вариациям искомых величин. Такая ситуация характерна для многокомпонентных газовых смесей (с числом компонент обычно более пяти, шести).

В настоящее время для определения концентраций газов в многокомпонентных смесях по данным многоспектрального измерений обычно используют метод регуляризации Тихонова или метод поиска квазирешений (в ряде работ его называют методом поиска псевдорешений). Эти методы (в приложении к задачам лазерного газоанализа) достаточно подробно описаны как в научной, так и в учебной литературе (см., например, [13-15]). Однако, они не позволяют охватить всех особенностей, которые могут возникать в различных прикладных задачах лазерного газоанализа. В частности:

1. Эти методы не позволяют определить концентрацию газового компонента смеси, имеющего для выбранных спектральных каналов измерения гладкий спектр поглощения без ярко выраженных максимумов, и дают очень большие погрешности, когда концентрации компонент в смеси отличаются на один, два и более порядков.

2. Эти методы позволяют решать задачу многокомпонентного газоанализа только для стационарных по времени смесей.

В учебном пособии описываются два метода количественного лазерного анализа многокомпонентных газовых смесей:

- метод, основанный на байесовской оценке решения системы уравнений лазерного газоанализа и позволяющий определять концентрации газов в случае «сложных»

[Оглавление](#)

многокомпонентных смесей, для которых при выбранных спектральных каналах измерения компоненты газовой смеси имеют гладкий спектр поглощения без ярко выраженных пиков поглощения или концентрации компонент смеси отличаются на один, два и более порядков;

- метод, основанный на калмановской фильтрации и позволяющий определять концентрации газов в случае нестационарных многокомпонентных смесей.

1. Метод, основанный на байесовской оценке решения системы уравнений лазерного газоанализа

1.1 Анализ данных измерений в задачах контроля состава газов на промышленных предприятиях и конкретных локальных источников антропогенных загрязнений атмосферы

Метод, основанный на нахождении байесовской оценки решения уравнения лазерного газоанализа, требует знания дополнительной априорной информации о средних значениях и дисперсиях случайных изменений концентраций газовых компонент смеси. Ниже показывается, что во многих случаях такая информация имеется для конкретных локальных источников антропогенных газовых загрязнений.

Существуют большие трудности в измерении и оценках абсолютных величин антропогенных газовых загрязнений атмосферы в больших городах и промышленных регионах, что связано с большим числом источников загрязнений, изменением их объема производств, постоянным усовершенствованием применяемых технологий и внедрением очистных сооружений и т.п.

Более простой задачей (в силу известного состава газов и примерно известного диапазона их значений) является измерение состава газов в задачах контроля технологических процессов на производстве и задачах контроля конкретных источников антропогенных газовых загрязнений (за которыми ведется постоянное наблюдение).

В настоящее время достаточно большой объем априорной информации о концентрациях исследуемых газов накоплен, например, для задач контроля технологических процессов на металлургическом производстве, состава газов в выбросах

[Оглавление](#)

коксовых печей при производстве кокса, в агломерационном производстве для черной металлургии и т.п.

В городах одним из основных источников загрязнения атмосферного воздуха является сжигание отходов. Этот источник загрязнения (из-за содержания больших количеств высокотоксичных веществ) представляет серьезную экологическую опасность [16]. В частности, в городском мусоре содержится 0,5-0,7% азота, 0,06-0,28% серы, 0,04-0,07% хлора и сотые процента таких металлов как свинец, цинк, медь, никель. Хотя сжигается не более 20% твердых городских отходов, и это количество представляет серьезную опасность.

Газовые выбросы мусоросжигательных установок в основном представлены углекислым газом, оксидом углерода, оксидами серы и азота, аммиаком, углеводородами, а также хлористым и фтористым водородом.

В таблице 1 приводится диапазон изменения содержания основных газовых компонент в выбросах крупных мусоросжигательных установок [16].

Таблица 1 - Содержание основных газов в выбросах крупных мусоросжигательных установок.

Газ	Диоксид углерода	Кислород	Азот	Пары воды
Диапазон содержания газов (% по объему)	4,2-10,5	9,0-16,1	79,9-82,2	6,3-28,4

Состав газов зависит от типа мусоросжигательных печей, среди которых наиболее эффективны многоступенчатые городские установки, причем при увеличении мощности установок удельный выброс загрязняющих веществ существенно снижается. В шлакообразующих мусоросжигательных установках выходящие газы характеризуются большой степенью восстановленности: при низкой концентрации свободного кислорода концентрации молекулярного водорода и оксида углерода составляют 15-40%.

В современной металлургии большинство технологий получения черных и цветных сплавов, проведение различных стадий и операций металлургического и заготовительного производств связано с осуществлением гетерофазных процессов и реакций (доменное,

[Оглавление](#)

кислородно-конверторное, плавка в вакуумных печах и т.д.). Качественный и количественный состав газовой среды - одной из реакционных фаз, динамика изменения во времени содержания ее отдельных компонентов оказывает большое влияние как на протекание самого технологического процесса, так и на качество конечного продукта.

Во многих металлургических процессах происходит выделение горючих и взрывоопасных газов, например образование смеси водород-кислород. Выбросы вредных и токсичных газов в атмосферу составляют доминирующую компоненту загрязнения окружающей среды при работе металлургических предприятий (см., например, [17,18]).

В таблицах 2 и 3 приведены характеристики газовых выбросов различных производств в черной металлургии.

В таблице 2 представлен состав компонентов отходящих газов при агломерации (за агломашиной) [18].

Таблица 2 - Состав компонентов отходящих газов при агломерации.

Компоненты		CO	CO ₂	O ₂	SO ₂	H ₂ O	N ₂	Прочие (NO _x)
Содержание	%	1,0-2,5	6,0-15,8	4,7-15,0	0,04-0,08	6,0-12,0	62,1-71,6	До 0,3
	³ (г/м³)	2,7-5,5	-	-	0,7-1,0	-	-	0,1-0,4

В таблице 3 представлен состав компонентов отходящих газов из зоны обжига окатышей [18].

Таблица 3 - Состав компонентов отходящих газов из зоны обжига окатышей.

Компоненты		CO	CO ₂	O ₂	SO ₂	H ₂ O	N ₂	Прочие (NO _x)
Содержание, %		0,1	2,0-4,0	15-20	не более 0,2*	1,5-6,0	75-80	-

* - при переработке серосодержащего сырья.

Оглавление

В таблице 4 приведен диапазон изменения содержания газов, выделяющихся из труб коксовых батарей [16] (в скобках даны средние значения концентраций газов).

Таблица 4 - Содержание основных газов, выделяющихся из труб коксовых батарей

Газ	CO ₂	O ₂	CO	NO _x	SO _x
Диапазон содержания газов (% по объему)	2,5-7,0 (4,8)	4,6-15,4 (10,9)	около 0,1	0,0025- 0,0155	0,005- 0,070

Из приведенных выше результатов измерений концентраций газовых компонент видно, что в задачах контроля технологических процессов на производстве и задачах контроля конкретных локальных источников антропогенных газовых загрязнений во многих случаях имеется достоверная информация о средних значениях концентраций измеряемых газовых компонент и их стандартных среднеквадратических отклонений.

1.2 Статистические оценки

Будем для определенности рассматривать решение матричного уравнения лазерного газоанализа (4), полученного из системы разностных уравнений (2).

Функция от вектора измерений $\Delta \mathbf{y}$, принимаемая в качестве подходящего значения некоторого неизвестного вектора \mathbf{n} , называется оценкой $\tilde{\mathbf{n}}$ этого вектора.

Формально оценку $\tilde{\mathbf{n}}$ вектора \mathbf{n} можно представить в виде:

$$\tilde{\mathbf{n}} = T(\Delta \mathbf{y})$$

где:

T - оператор, возможно нелинейный, определенный на пространстве векторов измерений.

Точность построенной оценки характеризуется вектором

Оглавление

$$\boldsymbol{\varepsilon}(T) = \tilde{\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{n},$$

определяющим величину ошибки оценивания.

Вектор $\boldsymbol{\varepsilon}(T)$ можно представить в виде:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(T) = \tilde{\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{n} = M[\tilde{\boldsymbol{n}}] - \boldsymbol{n} + \tilde{\boldsymbol{n}} - M[\tilde{\boldsymbol{n}}] = \boldsymbol{b}(T, \boldsymbol{n}) + \boldsymbol{\xi}(T)$$

где:

$\boldsymbol{b}(T, \boldsymbol{n}) = M[\tilde{\boldsymbol{n}}] - \boldsymbol{n}$ - вектор, характеризующий ошибку метода оценивания и называемый смещением оценки; если смещение равно нулю, то оценка $\tilde{\boldsymbol{n}}$ называется несмещенной оценкой;

$M[\cdot]$ - оператор математического ожидания по ансамблю случайных векторов измерения;

$\boldsymbol{\xi}(T) = \tilde{\boldsymbol{n}} - M[\tilde{\boldsymbol{n}}]$ - вектор, определяющий случайную составляющую ошибки оценивания $\boldsymbol{\varepsilon}(T)$.

В качестве числовой характеристики случайного вектора $\boldsymbol{\xi}(T)$ часто используют корреляционную матрицу $D(T) = M[\boldsymbol{\xi}(T)\boldsymbol{\xi}^T(T)]$. Среднеквадратическая ошибка оценивания определяется как:

$$\Delta^2(T, \boldsymbol{n}) = M[(\tilde{\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{n})^T (\tilde{\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{n})] = \boldsymbol{b}^T(T, \boldsymbol{n})\boldsymbol{b}(T, \boldsymbol{n}) + Sp[D(T)]$$

где:

$Sp[D(T)]$ - след (шпур) матрицы $D(T)$; для матрицы $D(T) \equiv [d_{ik}]$ размером $n \times n$ след матрицы равен $Sp[D(T)] = \sum_{i=1}^n d_{ii}$.

Если при неограниченном увеличении количества измерений среднеквадратическая ошибка (СКО) стремится к нулю, то оценка $\tilde{\boldsymbol{n}}$ называется состоятельной.

Ответ на вопрос насколько точно можно оценить вектор \boldsymbol{n} при конечной выборке дает неравенство Рао-Крамера. $p(\boldsymbol{n}, \Delta \boldsymbol{y})$

[Оглавление](#)

Пусть $p(\mathbf{n}, \Delta \mathbf{y})$ - совместная плотность вероятности вектора \mathbf{n} и вектора измерений $\Delta \mathbf{y}$. Градиентом функции по \mathbf{n} называется вектор:

$$\nabla_{\mathbf{n}} p(\mathbf{n}, \Delta \mathbf{y}) = \left[\frac{\partial p(\mathbf{n}, \Delta \mathbf{y})}{\partial n_1}, \frac{\partial p(\mathbf{n}, \Delta \mathbf{y})}{\partial n_2}, \dots, \frac{\partial p(\mathbf{n}, \Delta \mathbf{y})}{\partial n_M} \right]$$

где:

M - размерность вектора \mathbf{n} .

Информационная матрица Фишера определяется соотношением:

$$I_n = M[\nabla_{\mathbf{n}} p(\mathbf{n}, \Delta \mathbf{y}) \mathcal{N}_{\mathbf{n}}^T p(\mathbf{n}, \Delta \mathbf{y})]$$

Для корреляционной матрицы любой оценки $\hat{\mathbf{n}}$ справедливо неравенство Рао-Крамера:

$$D(T) \geq (E + \nabla_{\mathbf{n}} \mathbf{b}(T, \mathbf{n})) I_n^{-1} (E + \nabla_{\mathbf{n}} \mathbf{b}(T, \mathbf{n}))^T$$

где:

E - единичная матрица.

Неравенство Рао-Крамера имеет место для любого метода оценивания, и поэтому его правую часть можно рассматривать как потенциальную точность оценивания вектора $\bar{\mathbf{n}}$. Оценка $\hat{\mathbf{n}}$, для которой неравенство Рао-Крамера переходит в равенство, называется эффективной.

1.3 Методы построения статистических оценок

Существующие методы построения оценок можно разделить на два класса (см., например, [19]). К первому относятся методы, для которых характерно использование так называемой функции потерь. Оценки, полученные этими методами, минимизируют (в определенном смысле) принятую функцию потерь. Второй класс объединяет методы,

[Оглавление](#)

использующие известную формулу Байеса, и оценки, построенные этими методами, максимизируют апостериорную плотность вероятности.

При построении оценок на основе минимизации функции потерь для характеристики качества построенной оценки вводят так называемую функцию потерь $\Pi(\mathbf{n}, \tilde{\mathbf{n}})$.

Наиболее распространенными в приложениях функции потерь являются:

- квадратичная $\Pi(\mathbf{n}, \tilde{\mathbf{n}}) = |\mathbf{n} - \tilde{\mathbf{n}}|^2$;

- линейная $\Pi(\mathbf{n}, \tilde{\mathbf{n}}) = |\mathbf{n} - \tilde{\mathbf{n}}|$;

- прямоугольная

$$\Pi(\mathbf{n}, \tilde{\mathbf{n}}) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & \text{если } |\mathbf{n} - \tilde{\mathbf{n}}| \geq \frac{\Delta}{2} \\ 0, & \text{если } |\mathbf{n} - \tilde{\mathbf{n}}| < \frac{\Delta}{2} \end{cases}$$

Так как вектор измеряемых сигналов $\Delta\mathbf{y}$ является случайным, то оценка $\tilde{\mathbf{n}}$, а следовательно, и значение функции потерь будут случайными величинами. Поэтому мерой качества построенной оценки может служить усредненное значение потерь по всем возможным значениям вектора измерения $\Delta\mathbf{y}$ с учетом частоты появления того или иного вектора измерений. Эта частота определяется плотностью вероятности $p(\Delta\mathbf{y}|\tilde{\mathbf{n}})$ вектора измерения $\Delta\mathbf{y}$ при фиксированном векторе \mathbf{n} . Усредненное значение потерь, равное

$$R(T, \mathbf{n}) = \int \Pi(\mathbf{n}, \tilde{\mathbf{n}}) p(\Delta\mathbf{y}|\tilde{\mathbf{n}}) d\Delta\mathbf{y} \quad (6)$$

называется условным риском.

В случае квадратичной функции потерь им будет среднеквадратическая ошибка оценки $\tilde{\mathbf{n}}$. Оценка $\tilde{\mathbf{n}}$, доставляющая минимум условному риску, называется условной байесовской оценкой.

Если оцениваемый вектор \mathbf{n} случайный и $p(\mathbf{n})$ - априорная плотность вероятности этого вектора, то, усредняя условный риск по всевозможным значениям \mathbf{n} , получаем средний риск $R_{cp}(T)$ (см., например, [19]):

[Оглавление](#)

$$R_{cp}(T) = \int p(\mathbf{n}) \int \Pi(\mathbf{n}, \tilde{\mathbf{n}}) p(\Delta \tilde{\mathbf{y}} | \mathbf{n}) d\Delta \tilde{\mathbf{y}} d\mathbf{n}, \quad (7)$$

где:

$p(\mathbf{n})$ - априорная плотность вероятности оцениваемого вектора \mathbf{n} ;

$p(\Delta \tilde{\mathbf{y}} | \tilde{\mathbf{n}})$ - плотность вероятности вектора измерения $\Delta \tilde{\mathbf{y}}$ при фиксированном векторе $\tilde{\mathbf{n}}$.

Оценка, доставляющая минимум среднему риску, называется байесовской оценкой.

Большую роль при построении байесовских оценок играет так называемая апостериорная плотность вероятности $p(\mathbf{n} | \Delta \tilde{\mathbf{y}})$ оцениваемого вектора \mathbf{n} . Она определяет вероятность появления вектора \mathbf{n} при фиксированном векторе измерений $\Delta \tilde{\mathbf{y}}$. Из формулы Байеса следует:

$$p(\mathbf{n} | \Delta \tilde{\mathbf{y}}) = \frac{p(\Delta \tilde{\mathbf{y}} | \mathbf{n}) p(\mathbf{n})}{p(\Delta \tilde{\mathbf{y}})},$$

где:

$p(\Delta \tilde{\mathbf{y}})$ - априорная плотность вероятности вектора $\Delta \tilde{\mathbf{y}}$.

Тогда для $R_{cp}(T)$ имеем:

$$R_{cp}(T) = \int p(\Delta \tilde{\mathbf{y}}) \int \Pi(\mathbf{n}, \tilde{\mathbf{n}}) p(\mathbf{n} | \Delta \tilde{\mathbf{y}}) d\Delta \tilde{\mathbf{y}} d\mathbf{n} \quad (8)$$

Минимум $R_{cp}(T)$ можно найти из (8), минимизируя внутренний интеграл, так как только он зависит от алгоритма построения оценки решения.

Для квадратичной функции потерь байесовская оценка \mathbf{n}_{KB} , доставляющая минимум среднему риску, определяется соотношением

$$\mathbf{n}_{KB} = \int \mathbf{n} p(\mathbf{n} | \Delta \tilde{\mathbf{y}}) d\mathbf{n}$$

и является условным средним по апостериорному распределению вероятности $p(\mathbf{n} | \Delta \tilde{\mathbf{y}})$.

[Оглавление](#)

Для линейной функции потерь байесовская оценка \mathbf{n}_D , доставляющая минимум среднему риску, является медианой апостериорной плотности распределения вероятности $p(\mathbf{n}|\Delta\mathbf{y})$.

Для прямоугольной функции потерь интерпретация байесовской оценки \mathbf{n}_{pp} более сложная. Однако, если апостериорное распределение $p(\mathbf{n}|\Delta\mathbf{y})$ является унимодальным и симметричным, то все три байесовские оценки ($\mathbf{n}_{KB}, \mathbf{n}_D, \mathbf{n}_{pp}$) совпадают. Отметим, что при их построении существенно используется априорная информация в форме функции потерь и априорной плотности вероятности оцениваемого вектора.

Если априорное распределение $p(\mathbf{n})$ задано, но нельзя задать или отдать предпочтение какой-либо функции потерь, то оценка решения определяется из условия максимума апостериорной плотности вероятности $p(\mathbf{n}|\Delta\mathbf{y})$. Так как логарифм – монотонная функция, то экстремумы функций $p(\mathbf{n}|\Delta\mathbf{y})$ и $\ln[p(\mathbf{n}|\Delta\mathbf{y})]$ достигаются при одинаковых значениях \mathbf{n} . Поэтому уравнение для оценки \mathbf{n}_M , соответствующей максимуму апостериорной плотности вероятности $p(\mathbf{n}|\Delta\mathbf{y})$, можно представить в виде:

$$\nabla \{ \ln[p(\mathbf{n}|\Delta\mathbf{y})] \} = 0, \quad (9)$$

где:

$$\nabla \{ \ln[p(\mathbf{n}|\Delta\mathbf{y})] \} - \text{градиент функции } \ln[p(\mathbf{n}|\Delta\mathbf{y})].$$

Если апостериорная плотность вероятности $p(\mathbf{n}|\Delta\mathbf{y})$ унимодальная и симметричная, то полученная (из условия максимума апостериорной плотности вероятности) оценка \mathbf{n}_M одновременно является и байесовской оценкой.

1.4 Байесовская оценка решения уравнения лазерного газоанализа

Будем считать, что уравнение лазерного газоанализа для определения искомого вектора концентраций газов \mathbf{n} имеет следующий вид (см. формулу (4)):

[Оглавление](#)

$$\Delta K \cdot \mathbf{n} = \Delta \mathbf{y}$$

где:

$$\Delta \tilde{\mathbf{y}} = \Delta \mathbf{y} + \xi ;$$

ξ - K -мерный вектор шума;

$\Delta \mathbf{y}$ - K -мерный вектор с разностями приведенных сигналов;

ΔK - матрица коэффициентов поглощения газов, определяемая составом газовой смеси и набором спектральных каналов измерения (матрица размерностью $K \times K$ с разностями коэффициентов поглощения).

Построение байесовской оценки K -мерного вектора концентраций газов \mathbf{n} для уравнения лазерного газоанализа многокомпонентной газовой смеси будем проводить при следующих предположениях:

1. Вектор шума измерения (для измерительных каналов с разностями приведенных сигналов) ξ подчиняется нормальному распределению, некоррелирован с измеряемым сигналом (вектором $\Delta \mathbf{y}$ матричного уравнения лазерного газоанализа) и имеет нулевое среднее значение и корреляционную матрицу V_{ξ} .

2. Априорное распределение искомого вектора концентраций газов \mathbf{n} также является нормальным с некоторым средним значением \mathbf{n}_0 и корреляционной матрицей N_0 (характеризующей флуктуации концентраций газов смеси).

3. Корреляционные матрицы V_{ξ} и N_0 обратимы (существуют матрицы V_{ξ}^{-1} и N_0^{-1}).

Для задачи лазерного многокомпонентного газоанализа трудно задать или отдать предпочтение какой-либо функции потерь. Поэтому оценку решения уравнения лазерного газоанализа будем определять из условия максимума апостериорной плотности вероятности $p(\mathbf{n} | \Delta \tilde{\mathbf{y}})$.

При сделанных предположениях показано [19], что апостериорное распределение $p(\mathbf{n} | \Delta \tilde{\mathbf{y}})$ является нормальным и байесовская оценка \mathbf{n}_B вектора \mathbf{n} совпадает с оценкой, определяемой из максимума апостериорной плотности вероятности (9).

[Оглавление](#)

Тогда для задачи лазерного газоанализа (при использовании матричного уравнения (4)) байесовская оценка \mathbf{n}_B вектора \mathbf{n} искомым концентраций газовых компонент исследуемой смеси определяется следующим матричным уравнением:

$$(\mathbf{N}_0^{-1} + \Delta\mathbf{K}^T \mathbf{V}_\xi^{-1} \Delta\mathbf{K}) \mathbf{n}_B = \Delta\mathbf{K}^T \mathbf{V}_\xi^{-1} \Delta\tilde{\mathbf{y}} + \mathbf{N}_0^{-1} \mathbf{n}_0 \quad (10)$$

Здесь верхний индекс "Т" означает транспонирование матрицы, верхний индекс "-1" – обратную матрицу.

Уравнение (10) может быть получено и как первый шаг алгоритма калмановской фильтрации [19].

Матрица системы уравнений (4) размером $K \times K$ положительно определена, и поэтому для любого вектора $\Delta\tilde{\mathbf{y}}$ существует единственная байесовская оценка \mathbf{n}_B [19].

Из уравнения (10) имеем:

$$\mathbf{n}_B = (\mathbf{N}_0^{-1} + \Delta\mathbf{K}^T \mathbf{V}_\xi^{-1} \Delta\mathbf{K})^{-1} (\Delta\mathbf{K}^T \mathbf{V}_\xi^{-1} \Delta\tilde{\mathbf{y}} + \mathbf{N}_0^{-1} \mathbf{n}_0) \quad (11)$$

Входящие в формулу (11) корреляционные матрицы \mathbf{V}_ξ и \mathbf{N}_0 обычно задаются в виде диагональных матриц [19] с элементами по диагонали равными дисперсиям шума измерения в спектральных каналах (для матрицы \mathbf{V}_ξ) и дисперсиям случайных изменений концентраций газовых компонент смеси (для матрицы \mathbf{N}_0):

$$\mathbf{V}_\xi = \begin{pmatrix} \sigma_{1\xi}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{2\xi}^2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{K\xi}^2 \end{pmatrix} \quad (12)$$

$\sigma_{i\xi}^2$ - дисперсия шума измерения в i -ом спектральном канале (с разностями приведенных сигналов).

[Оглавление](#)

$$N_0 = \begin{pmatrix} \sigma_{1n}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{2n}^2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{Kn}^2 \end{pmatrix} \quad (13)$$

σ_{jn}^2 - дисперсия случайных изменений концентрации j-ой газовой компоненты смеси.

Отметим, что предположения о нормальности распределения вектора шума измерения ξ и вектора концентраций газовых компонент n не являются необходимыми при получении оценки (11). При не выполнении этих предположений оценка, минимизирующая среднеквадратичную ошибку также определяется из уравнения (11).

Полученная байесовская оценка n_B решения уравнения лазерного газоанализа (4) имеет [19]:

- математическое ожидание n_0 ;
- корреляционную матрицу:

$$D = (N_0^{-1} + \Delta K^T V_\xi^{-1} \Delta K)^{-1};$$

- среднеквадратическую ошибку :

$$\Delta^2 = M[(\tilde{n} - \bar{n})^T (\tilde{n} - \bar{n})] = Sp[D(T)].$$

Информационная матрица Фишера $I_{\bar{n}}$ равна (для нормального распределения вектора шума измерения ξ и вектора концентраций газовых компонент n):

$$I_{\bar{n}} = N_0^{-1} + \Delta K^T V_\xi^{-1} \Delta K$$

[Оглавление](#)

Построенная байесовская оценка является несмещенной, эффективной и устойчивой (при уменьшении дисперсии шумов сходится в среднеквадратичном смысле к точному решению уравнения (4) лазерного газоанализа) [19].

Устойчивость полученного методом байесовской оценки решения достигается сужением класса возможных решений и это сужение основывается на вводимой (в решение) априорной информации об искомом решении.

Однако, в отличие от метода регуляризации Тихонова форма введения априорной информации здесь иная - задается корреляционная матрица шума измерения, априорное нормальное распределение искомого вектора решения уравнения лазерного газоанализа (вектора концентраций газовых компонент атмосферного воздуха или газовой смеси) и его первые два момента (среднее значение и корреляционная матрица).

Такая априорная информация может быть вполне доступна во многих задачах, например, при рутинном газоанализе (см. раздел 1.1).

Отметим, что если элементы матрицы N_0 велики (что соответствует большой неопределенности в данных о концентрациях газовых загрязнителей), то вклад априорной информации будет мал и полученное решение не будет обладать устойчивостью.

1.5 Примеры определения концентраций газов в различных газовых смесях

Малокомпонентные газовые смеси

На рисунке 1 приведен пример математического моделирования для малокомпонентных газовых смесей (с числом компонент пять и менее). Здесь показаны результаты определения концентраций газовых компонент в трехкомпонентной смеси этилен-метанол-этанол. Обозначения столбцов: 1- действительное (заданное при математическом моделировании) значение концентрации газовой компоненты, 2 – значение концентрации, определенное прямым решением матричного уравнения (4), 3 – значение байесовской оценки концентрации газа, определенное из уравнения (11). На рисунке I – этилен, II – метанол, III – этанол.

[Оглавление](#)

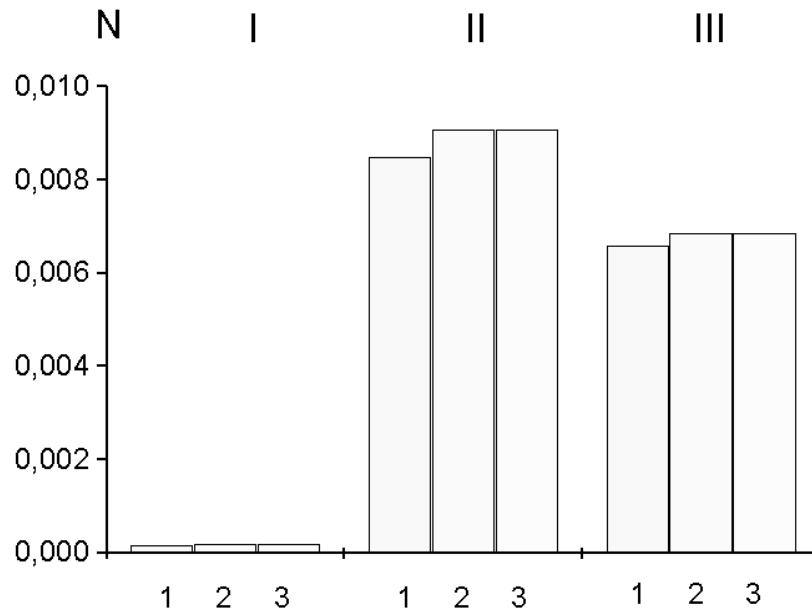


Рисунок 1 - Результаты определения концентраций газовых компонент в трехкомпонентной смеси

При использовании метода байесовских оценок задавались относительное среднеквадратическое значение шума измерения в спектральных каналах (для расчета $\sigma_{i\xi}^2$ - дисперсии шума измерения в i -ой спектральном канале), относительное среднеквадратическое значение случайных изменений концентраций компонент смеси (для расчета σ_{jn}^2 - дисперсии случайных изменений концентрации j -ой газовой компоненты смеси) и отличие средних значений концентраций компонент (компонент вектора \mathbf{n}_0) от действительных (заданных значений концентраций – компонент вектора \mathbf{n}).

На рисунке 1 приведены результаты для одиночных измерений в случае относительного среднеквадратического значения шума измерения 3% (шум измерения одинаков во всех спектральных каналах). Принималось, что относительное среднеквадратическое значение случайных изменений концентраций для всех компонент смеси равно 100%, а средние значения концентраций компонент отличаются от действительных на 50...100%.

[Оглавление](#)

Из рисунка хорошо видно, что в малокомпонентной смеси метод байесовских оценок (как и метод прямого решения матричного уравнения (4)) позволяет с большой точностью определять концентрации газов в условиях ошибок измерения.

Многокомпонентные газовые смеси, в которых концентрации компонент смеси примерно одного порядка.

На рисунке 2 приведен пример математического моделирования для многокомпонентных газовых смесей (с числом компонент больше пяти) в случае, когда в смеси присутствует компонента, не имеющая ярко выраженного пика поглощения в используемых спектральных каналах.

Здесь показаны средние по серии из 100 измерений погрешности δ (в процентах) определения концентрации газовой компоненты (монометилгидразина, не имеющей ярко выраженного пика поглощения в используемых спектральных каналах) в зависимости от шума измерения. Концентрации компонент смеси примерно одного порядка: $1,6 \cdot 10^{-3}$ - $6,6 \cdot 10^{-3}$ - $7,3 \cdot 10^{-3}$ - $8,5 \cdot 10^{-3}$ - $6,7 \cdot 10^{-3}$ - $9,2 \cdot 10^{-3}$. Относительные среднеквадратические значения возможных изменений концентраций газов задавались равными 90%, а средние значения концентраций - большими или меньшими действительных значений на 90 %. На рисунке: а - погрешности, полученные при использовании прямого решения уравнения лазерного газоанализа (4); б - погрешности для байесовской оценки концентраций газов, найденных из уравнения (11); 1 - относительное среднеквадратическое значение шума измерения 0,5 %; 2 - 1 %; 3 - 1,5 %; 4 - 2 %; 5 - 2,5 %; 6 - 3 %.

Из рисунка 2 видно, что при небольшом шуме измерения (0,5%) оба используемых метода позволяют определять концентрацию монометилгидразина с приемлемыми погрешностями (погрешности достаточно большие, но они позволяют правильно оценить порядок концентрации этой газовой компоненты). При увеличении шума измерения погрешность для метода прямого решения уравнения лазерного газоанализа (4) очень быстро возрастает и становится неприемлемо большой, а для метода байесовской оценки погрешность возрастает очень медленно и этот метод позволяет с приемлемой точностью оценить концентрацию монометилгидразина.

[Оглавление](#)

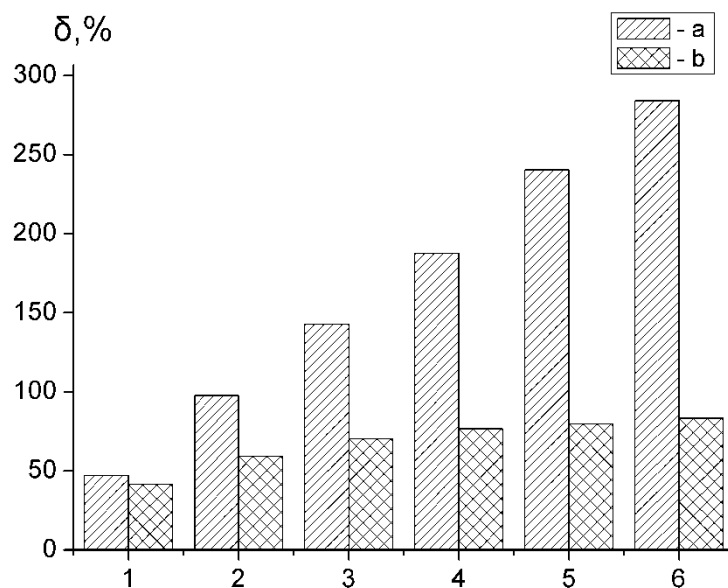


Рисунок 2 - Результаты определения концентрации монометилгидразина в шестикомпонентной смеси

Остальные компоненты смеси этилен-монометилгидразин-аммиак-метанол-этанол-изопропанол имеют ярко выраженные пика поглощения в используемых спектральных каналах и определяются с большой точностью (единицы процентов) обоими используемыми методами.

Многокомпонентные газовые смеси, в которых концентрации одних компонент много меньше концентрации других компонент смеси.

На рисунках 3, 4 приведен пример математического моделирования для многокомпонентных газовых смесей (с числом компонент больше пяти) в случае, когда концентрации одних компонент много меньше концентрации других компонент смеси. Здесь показаны средние по серии из 100 измерений погрешности δ определения концентраций газовых компонент смеси этилен-углекислый газ-аммиак-метанол-этанол-изопропанол для относительного среднеквадратического значения шума измерения 3% и относительных среднеквадратических значений возможных изменений концентраций компонент смеси 90% при изменении концентрации одной компоненты смеси (этанола). Исходные концентрации газов в смеси примерно одного порядка: $1,6 \cdot 10^{-3}$ - $9,6 \cdot 10^{-3}$ - $7,3 \cdot 10^{-3}$ - $8,5 \cdot 10^{-3}$ - $6,6 \cdot 10^{-3}$ - $9,2 \cdot 10^{-3}$.

[Оглавление](#)

На рисунке 3 приведены погрешности δ для этанола при уменьшении его концентрации в смеси. Средние значения концентрации газов смеси задавались на 50% меньше или больше их действительных значений. На рисунке: а - погрешности, полученные при использовании прямого решения уравнения лазерного газоанализа (4); b – погрешности для байесовской оценки концентраций газов, найденных из уравнения (11); 1- концентрация этанола - $6,6 \cdot 10^{-3}$; 2- концентрация этанола - $2,2 \cdot 10^{-3}$; 3- концентрация этанола - $6,6 \cdot 10^{-4}$; 4- концентрация этанола - $2,2 \cdot 10^{-4}$; 5- концентрация этанола - $6,6 \cdot 10^{-5}$.

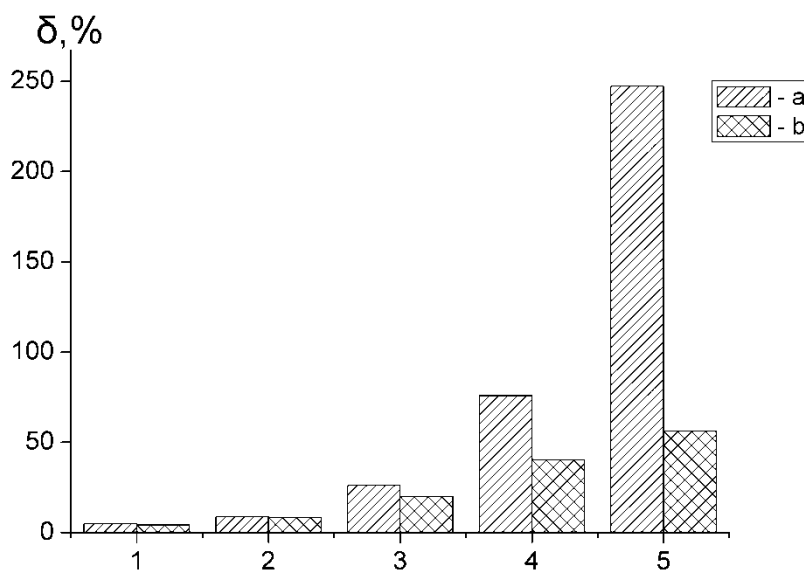


Рисунок 3 - Результаты определения концентрации этанола в шестикомпонентной смеси этилен-углекислый газ-аммиак-метанол-этанол-изопропанол

Из рисунка хорошо видно, что:

- когда концентрации газов в смеси примерно одного порядка оба метода позволяют определять концентрацию этанола с небольшими погрешностями;
- при уменьшении концентрации этанола погрешности определения его концентрации возрастают для обоих методов. Однако для метода прямого решения уравнения лазерного газоанализа (4) погрешность быстро возрастает и становится неприемлемо большой, а для метода байесовской оценки погрешность возрастает гораздо медленнее и этот метод позволяет с приемлемой точностью определять концентрацию

[Оглавление](#)

этанола даже в случае, когда она на два порядка меньше концентрации других газов смеси.

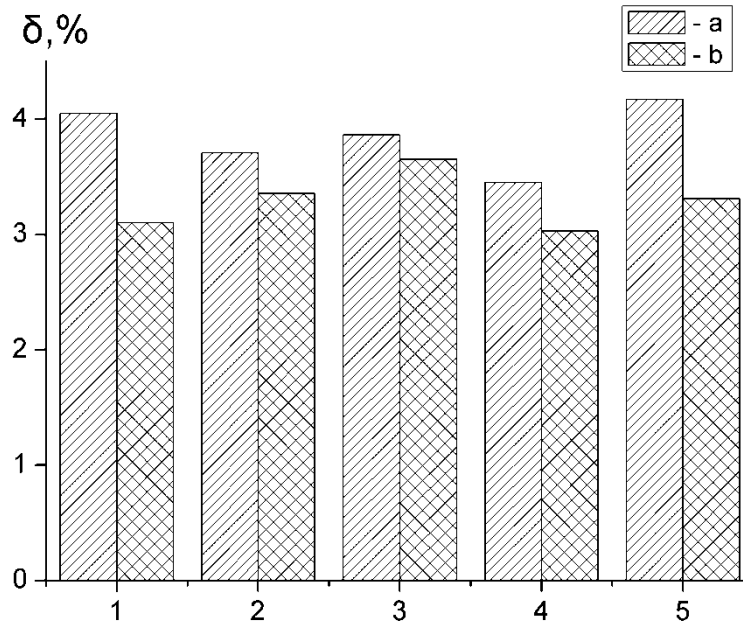


Рисунок 4 - Результаты определения концентрации изопропанола в шестикомпонентной смеси этилен-углекислый газ-аммиак-метанол-этанол-изопропанол

Погрешности определения других (кроме этанола) газов смеси не зависят от изменения его концентрации. Это иллюстрирует рисунок 4, где для примера приведены погрешности δ для изопропанола при уменьшении концентрации этанола в смеси. Обозначения на рисунке 4 и условия моделирования те же, что и для рисунка 3.

2. Метод калмановской фильтрации

Теоретически фильтр Калмана является методом рекуррентного оценивания вектора состояния дискретной динамической системы возмущаемой белым шумом по результатам измерений искаженных белым шумом. При этом рассматриваемая динамическая система является линейной, т.е. вектор состояния линейно связан с вектором измерений. Получаемая методом фильтрации Калмана оценка является

[Оглавление](#)

статистически оптимальной по отношению к некоторой квадратичной функции ошибки оценивания [20-23].

Общая форма записи уравнений поведения динамической дискретной системы позволяет свести к задаче оценивания вектора состояния множество задач автоматического управления и обработки данных.

Применение понятия «фильтр» по отношению к методу оптимального оценивания может быть объяснено тем, что назначением всякого фильтра является выделение полезного сигнала из принимаемого, искаженного шумом. Таким образом, фильтр является «оценителем» сигнала. Однако фильтр Калмана это, прежде всего, устойчивый метод решения обратной задачи, который позволяет получить функциональную зависимость между измеряемыми переменными и искомыми переменными, представляющими наибольший интерес.

Рекуррентными называются алгоритмы последовательной обработки данных измерений, в которых при поступлении нового вектора измерений происходит коррекция текущей оптимальной оценки. Вычисляемая данными алгоритмами оценка является оптимальной для накопленных к данному моменту времени векторов измерений. С инженерной точки зрения такие алгоритмы являются наиболее эффективными, так как позволяют существенно снизить требования к вычислительным ресурсам.

В настоящее время фильтрация Калмана применяется для решения широкого круга различных задач, таких как: управление технологическими процессами, сопровождение целей в радиолокации, навигация и т.д.

В данном разделе учебного пособия будет рассмотрено применение фильтрации Калмана для решения задачи лазерного многокомпонентного газоанализа.

2.1 Дискретные динамические системы

Фильтр Калмана наиболее удобно рассматривается с использованием метода пространства состояний применяемого для описания поведения динамических систем. Данный подход обоснован и тем, что автор фильтра Калмана – Рудольф Эмиль Калман использовал этот подход при разработке своего фильтра [20].

Под системой будем понимать совокупность взаимосвязанных объектов, которые могут быть рассмотрены как единое целое (более строгую систему определений можно

[Оглавление](#)

найти, например, в [21]). Если система изменяется во времени, то она называется динамической системой.

Для описания динамической системы в пространстве состояний создаётся её модель, включающая набор переменных входа, выхода и состояния, связанных между собой дифференциальными уравнениями первого порядка, которые записываются в матричной форме.

Динамическая система называется линейной, если для ее описания достаточно использования линейных дифференциальных уравнений. На рисунке 5 условно изображена линейная динамическая система.

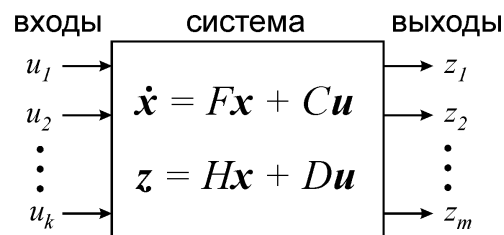


Рисунок 5 – Схематическое представление линейной динамической системы

Система линейных дифференциальных уравнений описывающих динамическую систему представленную на рисунке 5 можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = F\mathbf{x} + C\mathbf{u} \\ \mathbf{z} = H\mathbf{x} + D\mathbf{u} \end{cases}, \quad (14)$$

где:

$\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ - вектор состояния динамической системы, компоненты которого называются переменными состояния, в большинстве приложений это искомые неизвестные переменные;

$\dot{\mathbf{x}}$ - производная вектора состояния по времени;

$\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_k]^T$ - вектор управления динамической системой, компоненты которого являются входами динамической системы, с помощью которых осуществляется управление системой;

[Оглавление](#)

$z = [z_1, z_2, \dots, z_m]^T$ - вектор выхода (вектор наблюдения) динамической системы, как правило, возможно непосредственное измерение компонент этого вектора;

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nm} \end{bmatrix} - \text{ матрица системы (иногда называется матрицей}$$

динамических коэффициентов), описывающая динамическое поведение исследуемой системы, элементы матрицы называются динамическими коэффициентами;

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nk} \end{bmatrix} - \text{ матрица управления, компоненты матрицы задают}$$

коэффициенты передачи управляющего воздействия;

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{m1} & h_{m2} & \cdots & h_{mn} \end{bmatrix} - \text{ матрица выхода или матрица чувствительности}$$

измерений, компонента матрицы h_{ij} определяет коэффициент чувствительности i -ого измеряемого выхода z_i к изменению j -ой переменной состояния x_j , коэффициенты чувствительности известны априорно;

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1k} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mk} \end{bmatrix} - \text{ матрица прямой передачи, компоненты этой матрицы}$$

определяют степень непосредственного влияния управляющего воздействия на выхода динамической системы, и называются коэффициентами прямой передачи, коэффициенты прямой передачи известны априорно.

Первое уравнение в системе (14) называют уравнением (моделью) динамической системы, а второе уравнением (моделью) измерения.

[Оглавление](#)

Компоненты векторов состояния, управления, выхода, матриц системы, управления, выхода и прямой связи являются в общем случае некими функциями от времени, т.е. $x_i = x_i(t)$, $u_i = u_i(t)$, $z_i = z_i(t)$, $f_{ij} = f_{ij}(t)$, $c_{ij} = c_{ij}(t)$, $h_{ij} = h_{ij}(t)$, $d_{ij} = d_{ij}(t)$.

В большинстве практически значимых задач матрица D является нулевой, что означает, что в системе нет явной прямой связи. В этом случае линейная динамическая система описывается следующими дифференциальными уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = F\mathbf{x} + \mathbf{C}\mathbf{u} \\ \mathbf{z} = H\mathbf{x} \end{cases} \quad (15)$$

Время, в котором рассматривается динамическая система, может быть непрерывным и дискретным. При наблюдении в дискретном времени вектор выхода динамической системы измеряется не непрерывно, а только в дискретные моменты времени t_k . При этом моменты времени, в которые осуществляется наблюдение, не обязательно эквидистантны. Отметим, что случай дискретного времени является более простым для рассмотрения, так как в этом случае производные заменяются на разности, а интегралы на суммы.

Рассмотрим поведение линейной динамической системы записанной уравнениями (15) в дискретном времени. Как было сказано выше, дискретизация компонент вектора \mathbf{z} во времени достигается тем, что измерения осуществляются не непрерывно, а в моменты времени t_k .

Связь между значениями вектора состояния системы \mathbf{x} в двух следующих друг за другом моментах времени t_k и t_{k+1} определяется из формулы общего решения дифференциального уравнения $\dot{\mathbf{x}} = F\mathbf{x} + \mathbf{C}\mathbf{u}$ [24]:

$$\mathbf{x}(t_{k+1}) = \hat{\Phi}(t_{k+1}, t_k)\mathbf{x}(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \hat{\Phi}(t_{k+1}, \tau)\mathbf{C}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau, \quad (16),$$

где:

$\hat{\Phi}(t_{k+1}, t_k)$ - переходная матрица для матрицы F .

Оглавление

Переходная матрица $\hat{\Phi}(t, \tau)$ определяется следующим образом:

$$\hat{\Phi}(t, \tau) = \Psi(t)\Psi^{-1}(\tau), \quad (17),$$

где:

$\Psi(t)$ - матрица фундаментального решения, удовлетворяющая условию:

$$\dot{\Psi}(t) = F(t)\Psi(t).$$

Для дискретного времени регулирующее воздействие может вводиться в виде кусочно-непрерывной функции:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t_k) \quad \text{для} \quad t_k \leq t \leq t_{k+1}$$

В этом случае интеграл в выражении (16) может быть представлен как:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \hat{\Phi}(t_{k+1}, \tau) \mathcal{C}(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau = \mathbf{u}(t_k) \int_{t_k}^{t_{k+1}} \hat{\Phi}(t_{k+1}, \tau) \mathcal{C}(\tau) d\tau = \mathbf{u}(t_k) B(t_k),$$

где:

$$B(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \hat{\Phi}(t_{k+1}, \tau) \mathcal{C}(\tau) d\tau - \text{переходная матрица управления.}$$

Связь между измеряемым значением вектора наблюдения и вектором состояния системы в момент времени t_k имеет следующий вид:

$$\mathbf{z}(t_k) = H(t_k) \mathbf{x}(t_k).$$

Для удобства обозначим моменты времени t_k индексами k , матрицу $\hat{\Phi}(t_{k+1}, t_k) \equiv \Phi(k)$. Тогда линейная динамическая система (15), рассматриваемая для случая дискретного времени может быть описана в виде:

Оглавление

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \Phi(k)\mathbf{x}(k) + B(k)\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{z}(k) = H(k)\mathbf{x}(k) \end{cases} \quad (18)$$

Первое уравнение системы (18) называется разностным уравнением первого порядка и описывает поведение линейной динамической системы в дискретном времени или просто дискретной линейной динамической системы.

Описание динамической системы в виде (18) является полностью детерминированным, это означает, что известно состояние системы $\mathbf{x}(k)$ в любой момент времени k , если известны: начальное состояние системы $\mathbf{x}(0)$, регулирующее воздействие $\mathbf{u}(k)$, матрицы $\Phi(k)$ и $B(k)$.

С другой стороны состояние дискретной динамической системы может быть определено из второго уравнения системы (18) если матрица $H(k)$ квадратная и невырожденная. Это достижимо, если можно разместить достаточное количество измерительных устройств для наблюдения за всеми переменными состояния объекта, а погрешности измерений пренебрежимы.

Задача определения вектора состояния динамической системы путем решения (18) называется задачей наблюдения.

Детерминированный подход в описании динамической системы приемлем для рассмотрения систем с небольшой размерностью таких, например, как идеальный маятник. Такой подход неприемлем для описания систем большой размерности, таких как, например, ансамбль молекул газа находящийся в замкнутом объеме химического реактора. Описание поведения такой системы через состояния каждой молекулы ансамбля на практике не приемлемо. В таких задачах интерес представляют статистические характеристики системы. Состояние системы при этом представляет собой либо векторную случайную переменную либо векторный случайный процесс. Задача наблюдения, сформулированная в стохастических терминах, называется задачей фильтрации. В задаче фильтрации производится оценка вектора состояния системы на основе наблюдения ее выхода с учетом случайных возмущений и погрешностей измерений.

Дифференциальные уравнения, используемые для описания случайных процессов, называются стохастическими дифференциальными уравнениями. Динамические системы для описания, которых используются стохастические дифференциальные уравнения,

[Оглавление](#)

называются стохастическими. Стохастическая линейная динамическая система, рассматриваемая в дискретном времени может быть описана следующей системой разностных уравнений:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \Phi(k)\mathbf{x}(k) + B(k)\mathbf{u}(k) + \Gamma(k)\mathbf{w}(k) \\ \mathbf{z}(k) = H(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k) \end{cases}, \quad (19)$$

где:

$\Gamma(k)$ - переходная матрица возмущений;

$\mathbf{w}(k)$ - вектор возмущений;

$\mathbf{v}(k)$ - вектор шума измерений (погрешности измерений).

Отметим что, попытка найти решение стохастического дифференциального уравнения связана со следующей сложностью – случайные процессы не являются интегрируемыми функциями в классическом Римановском исчислении. В этом случае применяется исчисление Ито, а вместо решения ищется оценка решения. С другой стороны погрешности измерения приводят к тому, что вектор состояния, полученный путем обращения второго уравнения, не обладает свойством устойчивости.

2.2 Фильтр Калмана

Будем решать задачу оценки вектора состояния линейной динамической стохастической системы по результатам измерений линейно зависящих от вектора состояний. Система будет рассматриваться для случая дискретного времени. Будем считать, что влияние известных входных воздействий исключено. Данное ограничение может быть снято (см., например, [24]). Для простоты так же положим, что $\Gamma(k) \equiv I$ (I - единичная матрица), данное положение тоже может быть снято [24]. Однако будут учитываться случайные возмущения входного воздействия и случайные погрешности измерения.

Поведение исследуемой стохастической системы описывается системой разностных уравнений первого порядка записанных в матричном виде:

[Оглавление](#)

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \Phi(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{w}(k) \\ \mathbf{z}(k) = H(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k) \end{cases} \quad (20)$$

Недоступный непосредственному наблюдению вектор $\mathbf{x}(k)$ имеет размерность n . Предположим, что начальное значение вектора состояния $\mathbf{x}(k=0)$ есть случайный вектор, подчиняющийся нормальному распределению с известным математическим ожиданием \mathbf{m}_{x0} и заданной ковариационной матрицей V_{x0} .

Измеряемый вектор $\mathbf{z}(k)$ имеет размерность m . Параметры исследуемой динамической системы известны и заданы матрицами $\Phi(k)$, $H(k)$. Вектор возмущений $\mathbf{w}(k)$ и погрешность измерений $\mathbf{v}(k)$ представляют собой векторные случайные процессы типа белого шума с дискретным временем, с нулевыми средними и заданными ковариационными матрицами:

$$\begin{aligned} M[\mathbf{w}(k)] &\equiv 0 & M[\mathbf{w}(k)\mathbf{w}^T(i)] &= V_w(k)\delta_{ki} \\ M[\mathbf{v}(k)] &\equiv 0 & M[\mathbf{v}(k)\mathbf{v}^T(i)] &= V_v(k)\delta_{ki}, \end{aligned}$$

где:

δ_{ki} - символ Кронекера;

$$\delta_{ki} = \begin{cases} 1, & \text{если } k = i \\ 0, & \text{если } k \neq i \end{cases}$$

Предполагается, что начальное состояние, погрешность измерения и вектор возмущений взаимно некоррелированы:

$$M[\mathbf{x}(k)\mathbf{w}^T(i)] \equiv 0, \quad M[\mathbf{x}(k)\mathbf{v}^T(i)] \equiv 0, \quad M[\mathbf{w}(k)\mathbf{v}^T(i)] \equiv 0$$

Будем искать оценку вектора состояния $\mathbf{x}(k)$ (которую будем обозначать $\hat{\mathbf{x}}(k)$) являющуюся линейной функцией последовательности измерений $\mathbf{z}(i), \dots, \mathbf{z}(k)$. Ошибку оценивания $\varepsilon(k)$ определим как разность $\mathbf{x}(k)$ и $\hat{\mathbf{x}}(k)$:

$$\varepsilon(k) = \mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k).$$

[Оглавление](#)

При построении оценки будем использовать квадратичную функцию потерь, что соответствует минимизации среднеквадратичной погрешности оценивания вектора состояния.

Предположим в некоторый момент времени k известна предварительная (априорная) оценка вектора состояния $\hat{x}^-(k)$, полученная с использованием всех измерений полученных до момента времени k . Погрешность априорной оценки $\varepsilon^-(k)$:

$$\varepsilon^-(k) = x(k) - \hat{x}^-(k).$$

Предположим также, что известна ковариационная матрица погрешности априорной оценки $P^-(k)$:

$$P^-(k) = M \left[\{x(k) - \hat{x}^-(k)\} \{x(k) - \hat{x}^-(k)\}^T \right] \quad (21)$$

Попробуем улучшить априорную оценку вектора состояния, используя результаты измерений $z(k)$, полученные в момент времени k . Будем искать апостериорную оценку вектора состояния $\hat{x}(k)$ как линейную комбинацию априорной оценки и уточняющей добавки полученной как разность между результатом измерения и вектором $H(k)\hat{x}(k)$:

$$\hat{x}(k) = \hat{x}^-(k) + K(k) \{z(k) - H(k)\hat{x}(k)\}, \quad (22)$$

где:

$K(k)$ - некая матрица, которая будет определена ниже.

Отметим, что величина $z(k) - H(k)\hat{x}(k)$ является мерой несоответствия априорной оценки $\hat{x}^-(k)$ результатам измерений $z(k)$ полученных в момент времени k .

Основной проблемой получения оценки по формуле (22) является определение матрицы $K(k)$, такой чтобы полученная оценка являлась оптимальной, минимизирующей выбранную функцию потерь.

Рассмотрим ковариационную матрицу погрешности апостериорной оценки $P(k)$:

$$P(k) = M \left[\{x(k) - \hat{x}(k)\} \{x(k) - \hat{x}(k)\}^T \right] \quad (23)$$

Подставив второе уравнение системы (20) в (22) и используя полученное выражение для $\hat{x}(k)$ получим из (23):

[Оглавление](#)

$$P(k) = M \left[\left(\left\{ \mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}^-(k) \right\} - K(k) \left\{ H(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k) - H(k)\hat{\mathbf{x}}^-(k) \right\} \right) \left(\left\{ \mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}^-(k) \right\} - K(k) \left\{ H(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k) - H(k)\hat{\mathbf{x}}^-(k) \right\} \right)^T \right] \quad (24)$$

Преобразовав (24), раскрывая, оператор математического ожидания и учитывая, что $\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}^-(k)$ - есть погрешность априорной оценки, которая некоррелирована с погрешностью измерения $\mathbf{v}(k)$ (т. е. $M[\boldsymbol{\varepsilon}^-(k)\mathbf{v}(k)] \equiv 0$) [20, 25], получим:

$$P(k) = \{I - K(k)H(k)\}P^-(k)\{I - K(k)H(k)\}^T + K(k)V_v(k)K(k)^T \quad (25).$$

Оценка (22) будет оптимальной (доставлять минимум функции потерь) при таком значении матрицы $K(k)$, при котором диагональные элементы матрицы $P(k)$ будут минимальны (диагональные элементы матрицы $P(k)$ являются дисперсиями погрешности оценки вектора состояния). Решение задачи поиска минимума может быть выполнено различными способами [20-26]. В работе [25] предложен способ, не требующий использования матричного дифференциального исчисления, поэтому этот на наш взгляд более простой для понимания способ будет изложен ниже.

Для простоты изложения опустим в (25) скобки, описывающие зависимость от момента времени k :

$$P = (I - KH)P^-(I - KH)^T + KV_vK^T \quad (26)$$

Перегруппируем члены в (26):

$$P = P^- - KHP^- - P^-H^TK^T + K(HP^-H^T + V_v)K^T \quad (27)$$

В выражении (27) член $K(HP^-H^T + V_v)K^T$ квадратично зависит от K , а член $KHP^- - P^-H^TK^T$ линейно. Выделим в выражении (27) матричный эквивалент формулы квадрата разности. Член $HP^-H^T + V_v$ является симметричным и положительно определенным. Это член может быть разложен следующим образом [25]:

$$S \cdot S^T = HP^-H^T + V_v \quad (28)$$

[Оглавление](#)

Как осуществить разложение (28) нас в данный момент не интересует, главное, что это разложение существует. Перепишем (27) с учетом (28):

$$P = P^- - KHP^- - P^-H^TK^T + K(SS^T)K^T \quad (29)$$

Выделим в (29) квадрат разности и запишем в виде:

$$P = P^- - (KS - A)(KS - A)^T - AA^T, \quad (30)$$

где:

A - некая матрица не зависящая от K .

Покажем, что (30) соответствует (29), для чего разложим квадрат разности в (30) сравним его почленно с (29). Пояснения требует соответствие следующих членов:

$$KSA^T + AS^TK^T \stackrel{?}{=} KHP^- + P^-H^TK^T \quad (31)$$

Равенство (31) легко подтвердить, положив A равным:

$$A = P^-H^T(S^T)^{-1} \quad (32)$$

В выражении (29) первый и третий член не содержат K . Только второй член выражения (29) содержит K , причем этот член является произведением матрицы на саму себя транспонированную, что означает что элементы, стоящие на главной диагонали являются неотрицательными числами. Таким образом достичь минимума дисперсии оценки мы можем, если второй член в выражении (30) будет равен нулю, то есть:

$$KS = A \quad (33)$$

Перепишем (33) используя (32):

$$K = AS^{-1} = P^-H^T(S^T)^{-1}S^{-1} = P^-H^T(SS^T)^{-1} \quad (34)$$

Вспомнив, что SS^T есть разложение $HP^-H^T + R$, получим:

$$K(k) = P^-(k)H^T(k) \{H(k)P^-(k)H^T(k) + V_v(k)\}^{-1} \quad (35)$$

Это значение $K(k)$, минимизирующее среднеквадратичную погрешность оценки вектора состояния, называется коэффициентом усиления фильтра Калмана.

Вычислим ковариационную матрицу погрешности оптимальной оценки

$$\begin{aligned} P(k) &= \{I - K(k)H(k)\}P^-(k)\{I - K(k)H(k)\}^T + K(k)V_v(k)K(k)^T = \\ &= P^-(k) - K(k)H(k)P^-(k) - P^-(k)H^T(k)K^T(k) + K(k)\{H(k)P^-(k)H^T(k) + V_v(k)\}K^T(k) \end{aligned} \quad (36)$$

Оглавление

Подставив значение оптимального коэффициента усиления (выражение (34)) в выражение (36), получим:

$$P(k) = P^-(k) - P^-(k)H^T(k)\{H(k)P^-(k)H^T(k) + V_v(k)\}^{-1}H(k)P^-(k) \quad (37)$$

или:

$$P(k) = P^-(k) - K(k)\{H(k)P^-(k)H^T(k) + V_v(k)\}K^T(k) \quad (38)$$

или:

$$P(k) = \{I - K(k)H(k)\}P^-(k) \quad (39)$$

Из трех выражений (37) - (39) на практике для вычисления $P(k)$ наиболее часто используют выражение (39), как наиболее простое и требующее меньших вычислительных затрат.

Итак, в выражении (22), позволяющем уточнить априорную оценку вектора состояния (используя результаты измерений, полученные в момент времени k), нам известна величина оптимального коэффициента $K(k)$ - коэффициента усиления фильтра Калмана. Однако для вычисления оценки вектора состояния $\hat{x}(k)$, используя выражение (22) необходимо знать априорную оценку $\hat{x}^-(k)$, а также ковариационную матрицу погрешности априорной оценки $P^-(k)$ необходимую для вычисления коэффициента усиления фильтра Калмана. Отметим также, что в момент времени $k+1$ для вычисления оценки $\hat{x}(k+1)$ нам потребуются также $\hat{x}^-(k+1)$ и $P^-(k+1)$. Априорную оценку вектора состояния $\hat{x}^-(k+1)$ в момент времени $k+1$ можно получить, используя первое уравнение системы (20) и апостериорную оценку $\hat{x}(k)$ для предыдущего момента времени:

$$\hat{x}^-(k+1) = \Phi(k)\hat{x}(k) \quad (40)$$

Вклад вектора возмущений $w(k)$ был проигнорирован, так как он имеет нулевое среднее значение и некоррелирован с предыдущим значением $w(k-1)$.

Величина погрешности априорной оценки $\varepsilon^-(k+1)$ в момент времени $k+1$ равна:

$$\begin{aligned} \varepsilon^-(k+1) &= x(k+1) - \hat{x}^-(k+1) = \{\Phi(k)x(k) + w(k)\} - \Phi(k)\hat{x}(k) = \\ &= \Phi(k)\varepsilon(k) + w(k). \end{aligned} \quad (41)$$

Оглавление

С учетом того, что $w(k)$ и $\varepsilon(k)$ некоррелированы, запишем выражение для оценки ковариационной матрицы погрешности априорной оценки в $k+1$ момент времени:

$$\begin{aligned} P^-(k+1) &= M[\varepsilon^-(k+1)\varepsilon^-(k+1)^T] = M[\{\Phi(k)\varepsilon(k) + w(k)\}\{\Phi(k)\varepsilon(k) + w(k)\}^T] = \\ &= \Phi(k)P(k)\Phi^T(k) + V_w(k). \end{aligned} \quad (42)$$

Таким образом, теперь мы имеем все необходимые величины для вычисления оценки вектора состояния системы для момента времени $k+1$, и результаты измерений $z(k)$ также будут использованы в построении оценки, как и предыдущий момент времени.

Выражения (22), (35), (39), (40) и (42) составляют описание рекуррентного фильтра Калмана.

В начале работы фильтра Калмана (в нулевой момент времени) при поступлении результатов измерений $z(0)$ в качестве априорной оценки вектора состояния используется заданное математическое ожидание вектора состояния для $k=0$, а качестве ковариационной матрицы погрешности априорной оценки его ковариационная матрица:

$$\begin{aligned} \hat{x}^-(0) &= m_{x0} \\ P^-(0) &= V_{x0} \end{aligned} \quad (43)$$

Для определения начальных приближений можно использовать метод регуляризации Тихонова [27]:

$$\begin{aligned} \hat{x}^-(0) &= \{\alpha I + H(0)^T H(0)\}^{-1} H(0)^T z(0), \\ P^-(0) &= \delta^2 \{\alpha I + H(0)^T H(0)\}^{-1}, \end{aligned} \quad (44)$$

где:

α - параметр регуляризации, выбранный в соответствии с тем или иным методом;

δ - среднеквадратичная погрешность измерений.

Отметим, что при увеличении k оценка вектора состояния $\hat{x}(k)$ становится независимой от задания начальных значений $\hat{x}^-(0)$ и $P^-(0)$ [20].

Оглавление

Алгоритм работы фильтра Калмана представлен на рисунке 6. Одной из наиболее важных особенностей фильтра Калмана является его рекуррентная форма, что делает этот фильтр эффективным средством для оптимального оценивания при обработке результатов измерения с использованием компьютеров.

В фильтре Калмана текущая оценка состоит из двух слагаемых: предсказания $\hat{x}^-(k)$ - априорной оценки вектора состояния и коррекции определяемой невязкой измерения взвешенной с помощью матрицы коэффициента усиления фильтра Калмана.

При реализации фильтра Калмана на каждой итерации требуется вычисление обратной матрицы размером $m \times m$, где длина вектора измерений $z(k)$. В большинстве случаев длина вектора измерений не превышает 10..20, обращение матрицы такого размера с использованием современной вычислительной техники не вызывает существенных вычислительных затрат. Кроме того, последовательность матриц $K(k)$ не зависит от векторов измерений $z(k)$ и векторов возмущений $w(k)$, поэтому она может быть вычислена до начала измерений и сохранена в памяти используемого вычислителя, а в процессе измерения будет выбираться необходимая матрица $K(k)$. Такой подход позволяет вести обработку данных измерений в режиме реального времени, даже если они поступают в очень высоком темпе.

До начала процесса измерения также могут быть оценены характеристики фильтра Калмана, так как величина $P(k)$, не зависящая от векторов измерений $z(k)$ и векторов возмущений $w(k)$, является ковариационной матрицей погрешности оценки.

[Оглавление](#)

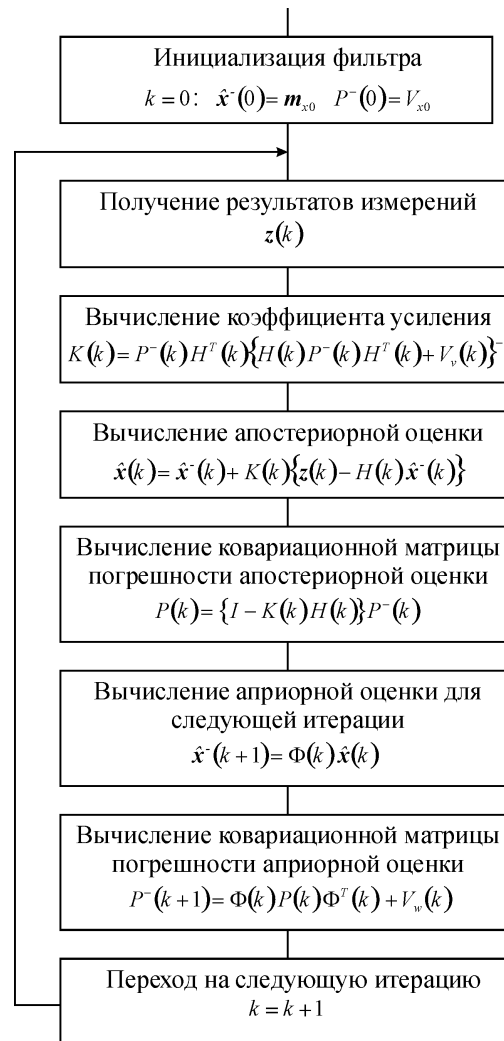


Рисунок 6 – Алгоритм работы фильтра Калмана

При реализации фильтра Калмана можно столкнуться со следующей вычислительной проблемой: ковариационная матрица погрешности оценки $P(k)$ вычисляется по сути как разность матриц $P^-(k)$ и $K(k)H(k)P^-(k)$ (см. (39)), поэтому при конечной точности вычислений возможна ситуация когда вычисленная матрица $P(k)$ может быть не неотрицательно определенной, что является недопустимым для ковариационной матрицы и приводит к нестабильности фильтра [28]. Выходом в данной ситуации является использование при вычислении матрицы $P(k)$ факторизации Чолески (Cholesky) [28]:

$$P(k) = P^{1/2}(k)P^{1/2}(k)^T, \quad (45),$$

[Оглавление](#)

где:

$P^{1/2}(k)$ - нижняя левая треугольная матрица матрицы $P(k)$.

Также для вычисления $P(k)$ может использоваться устойчивая форма Джозефа [29]:

$$P(k) = \{I - K(k)H(k)\}P^-(k)\{I - K(k)H(k)\}^T + K(k)V_v(k)K(k)^T \quad (46)$$

Матрица $P(k)$, вычисленная с использованием выражений (46) или (46) гарантировано является неотрицательно определенной.

Фильтр Калмана может применяться не только при выполнении описанных при постановке задачи условий. Так если вектор возмущений $w(k)$ и погрешность измерений $v(k)$ не являются последовательностями типа белого шума или коррелированы между собой, то фильтр Калмана может быть модифицирован для решения и такой задачи [20, 25].

Фильтр Калмана может быть модифицирован и для оценки векторов состояния нелинейных динамических систем, т.е. для решения достаточно широкого круга нелинейных задач [29, 30].

2.3 Применение фильтра Калмана при решении задач лазерного абсорбционного газоанализа

Фильтр Калмана может эффективно применяться для решения обратной задачи лазерного газоанализа [31-33]. При использовании фильтра Калмана для решения задачи лазерного газоанализа осуществляется обработка последовательности результатов измерений, а не одиночных измерений как в большинстве других применяемых методов. При этом газовый объект, концентрации компонент которого определяются, рассматривается как динамическая система, изменяющаяся во времени.

Запишем систему уравнений (20), описывающую поведение линейной динамической системы в дискретном времени для исследуемого газового объекта, используя обозначения принятые в разделе 1:

[Оглавление](#)

$$\begin{cases} \mathbf{n}(k+1) = \Phi(k)\mathbf{n}(k) + \mathbf{w}(k) \\ \Delta \mathbf{y}(k) = \Delta K \mathbf{n}(k) + \xi(k) \end{cases}, \quad (47)$$

где:

$\mathbf{n}(k)$ - вектор концентраций в момент времени k , являющийся вектором состояния $\mathbf{x}(k)$ исследуемого газового объекта;

ΔK - матрица коэффициентов поглощения газов, являющаяся матрицей чувствительности измерений $H(k)$, отметим что, матрица ΔK не зависит от момента времени k , так как в подавляющем большинстве задач лазерного газоанализа считается, что коэффициенты поглощения являются константами;

$\Delta \mathbf{y}(k)$ - вектор с разностями приведенных сигналов – вектор $\mathbf{z}(k)$ результатов измерений;

$\xi(k)$ - вектор шума – вектор $\mathbf{v}(k)$ погрешностей измерений;

$\mathbf{w}(k)$ - вектор возмущений, описывающий случайные флуктуации концентраций компонент газового объекта;

$\Phi(k)$ - переходная матрица.

Переходная матрица $\Phi(k)$ описывает детерминированные изменения концентраций газов от одного момента времени к другому, задающие динамику поведения газового объекта. В некоторых ситуациях такие изменения могут быть известны, например, в случае протекания химической реакции в газах находящихся в некотором замкнутом объеме. В этом случае (при известной скорости протекания химической реакции) известна динамика поведения газового объекта во времени, но при этом неизвестны случайные флуктуации концентраций, которые и требуется определить.

В задачах экологического мониторинга может быть известен среднесуточный ход изменения концентраций загрязняющих газов, эта информация может быть использована, путем соответствующего задания матрицы $\Phi(k)$. Использование дополнительной априорной информации о поведении исследуемого газового повышает точность проводимого анализа.

Однако во множестве случаев нет априорной информации о поведении газового объекта во времени, в такой ситуации матрица $\Phi(k)$ задается равной единичной матрице. Запишем систему уравнений (47) для этого случая:

[Оглавление](#)

$$\begin{cases} \mathbf{n}(k+1) = \mathbf{n}(k) + \mathbf{w}(k) \\ \Delta \mathbf{y}(k) = \Delta K \mathbf{n}(k) + \xi(k) \end{cases} \quad (48)$$

Будем считать, что вектор возмущений $\mathbf{w}(k)$ и погрешность измерений $\xi(k)$ представляют собой векторные случайные процессы типа белого шума с дискретным временем, с нулевыми средними и заданными ковариационными матрицами $V_\xi(k)$ и $V_w(k)$ соответственно. Будем также считать, что матрицы $V_\xi(k)$ и $V_w(k)$ не зависят от момента времени: $V_\xi(k) \equiv V_\xi$ и $V_w(k) \equiv V_w$. В большинстве задач лазерного газоанализа корреляционные связи между компонентами векторов $\mathbf{w}(k)$, $\xi(k)$ отсутствуют. В этом случае матрицы V_ξ , V_w являются диагональными, элементы $(V_\xi)_{ii}$ задают дисперсии погрешностей измерения соответствующих элементов вектора $\Delta \mathbf{y}(k)$, а элементы $(V_w)_{ii}$ дисперсии элементов вектора возмущений.

Перепишем уравнения фильтра Калмана (22), (35), (40), (42) и (46) для динамического газового объекта описываемого системой уравнений (48):

$$\hat{\mathbf{n}}(k) = \hat{\mathbf{n}}^-(k) + K(k) \{ \Delta \mathbf{y}(k) - \Delta K \hat{\mathbf{n}}(k) \} \quad (49)$$

$$K(k) = P^-(k) \Delta K^T \{ \Delta K P^-(k) \Delta K^T + V_\xi \}^{-1} \quad (50)$$

$$P(k) = \{ I - K(k) \Delta K \} P^-(k) \{ I - K(k) \Delta K \}^T + K(k) V_\xi K(k)^T \quad (51)$$

$$\hat{\mathbf{n}}^-(k+1) = \hat{\mathbf{n}}(k) \quad (52)$$

$$P^-(k+1) = P(k) + V_w, \quad (53)$$

где:

$\hat{\mathbf{n}}(k)$ - оценка вектора концентраций для момента времени k ;

$\hat{\mathbf{n}}^-(k)$ - априорная оценка вектора концентраций для момента времени k .

Для определения начальных приближений будем использовать метод регуляризации Тихонова:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}}^-(0) &= (\alpha I + \Delta K^T \Delta K)^{-1} \Delta K^T \Delta \mathbf{y}(0) \\ P^-(0) &= \delta^2 \{ \alpha I + \Delta K^T \Delta K \}^{-1} \end{aligned} \quad (54)$$

Оглавление

2.4 Примеры определения концентраций газов с помощью фильтра Калмана

Рассмотрим применение фильтра Калмана для определения концентраций газов в многокомпонентной газовой смеси по результатам лазерных многоспектральных измерений показателя поглощения. В качестве примера приведем результаты математического моделирования определения количественного состава шестикомпонентной газовой смеси, качественный состав которой приведен в таблице 5. Моделировались измерения проводимые методом дифференциального поглощения на длинах волн генерации CO₂ лазера низкого давления. Число обусловленности матрицы разностей коэффициентов поглощения равнялось 270.

Изменение концентраций компонент во времени задавалось уравнением:

$$n(k+1) = n(k) + w(k)$$

Значения концентраций в момент времени $k = 0$ приведены в таблице 5.

Таблица 5 – Качественный и количественный состав газовой смеси

Качественный состав (наименования компонент)	Количественный состав для $k = 0$ (концентрации, объемные доли на млн.)
фреон 11	1,0
фреон 12	2,0
хлоропрен	3,0
1,2-дихлорэтан	3,5
моноклорэтан	5,6
трихлорэтилен	3,0

Компоненты вектора $w(k)$ были некоррелированы, имели математическое ожидание равное нулю и относительное значение среднеквадратичного отклонения 2% от начального значения концентрации. Относительное среднеквадратичное отклонение погрешности измерения показателя поглощения задавалось равным 4%.

На рисунках 7, 8 приведены результаты определения концентрации хлоропрена и трихлорэтилена соответственно. Здесь 1 - истинное значение концентрации; значение концентрации, полученное методом прямого решения, 3 - значение концентрации, полученное с использованием фильтра Калмана. На рисунках 9, 10 приведены

[Оглавление](#)

относительные погрешности определения концентраций хлоропрена и трихлорэтилена соответственно. На рисунках 9, 10: 1 – погрешность определения концентрации методом прямого решения, 2 – погрешность определения концентрации полученная с использованием фильтра Калмана. 3 – значение $\frac{\sqrt{P(k)_{ii}}}{\bar{n}(k)_i} \cdot 100\%$, являющееся, по сути, оценкой относительной погрешности определения концентрации определяемой при работе фильтра Калмана (здесь i – номер компоненты, $P(k)_{ii}$ – i –ый диагональный элемент матрицы $P(k)$, $\bar{n}(k)_i$ – истинное значение концентрации i – ой компоненты).

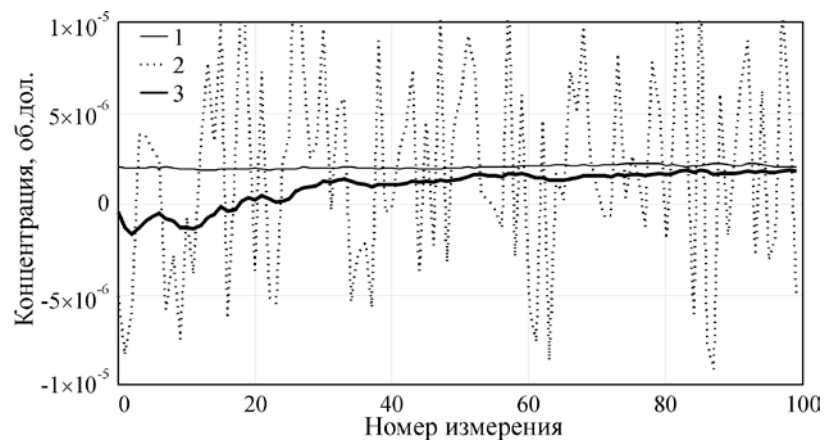


Рисунок 7 – Результат определения концентрации хлоропрена

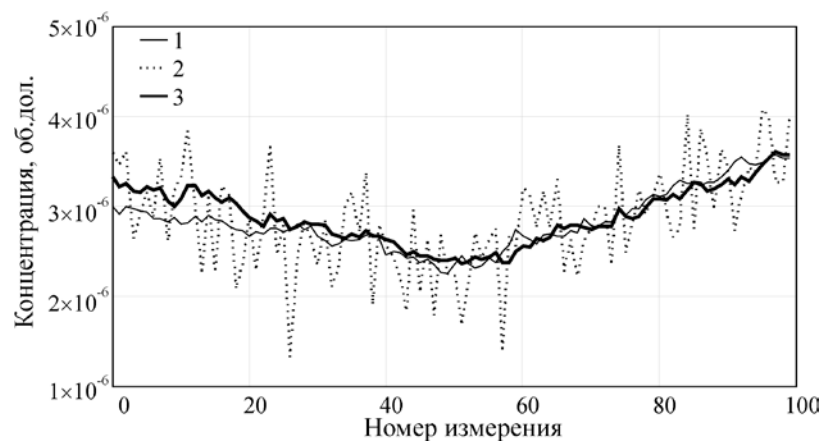


Рисунок 8 – Результат определения концентрации трихлорэтилена

[Оглавление](#)

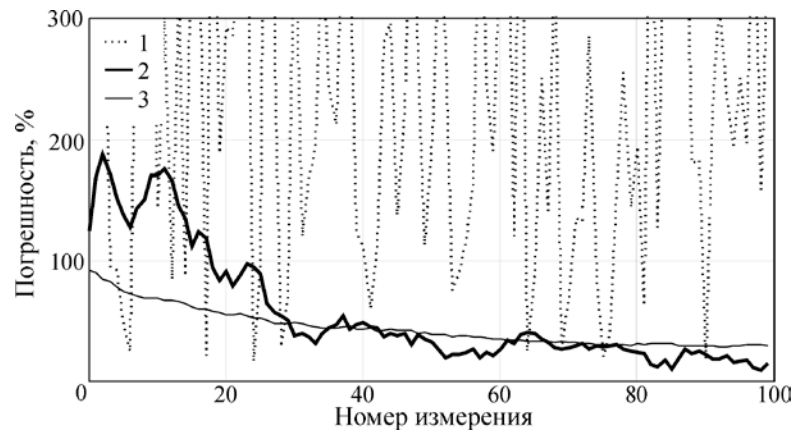


Рисунок 9 – Погрешность определения концентрации хлоропрена

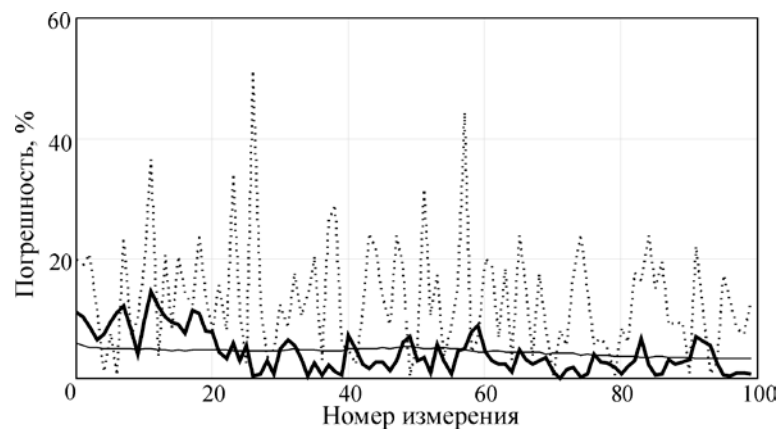


Рисунок 10 – Погрешность определения концентрации трихлорэтилена

Из рисунков 7-10 хорошо видно, что метод прямого решения дает очень большие (по сравнению с фильтром Калмана) погрешности определения концентраций. Концентрацию хлоропрена методом прямого решения определить не удалось. Фильтр Калмана после примерно 30 измерения стал выдавать вполне приемлемые значения концентраций хлоропрена и далее с поступлением новых измерений погрешность определения концентраций продолжала снижаться. Концентрацию трихлорэтилена удалось определить методом прямого решения, но значение концентрации, полученное с использованием фильтра Калмана обладало существенно меньшей погрешностью и было более устойчиво.

[Оглавление](#)

Отметим, что в случае проведения реальных измерений, когда истинное значение концентрации неизвестно, величина $\sqrt{P(k)_{ii}}$, может служить оценкой погрешности определения концентрации соответствующей компоненты.

Приведенные выше результаты математического моделирования относятся к случаю, когда поведение исследуемого газового объекта во времени соответствует модели заложенной в фильтр Калмана. Рассмотрим ситуацию, когда концентраций изменяется ступенчато в два раза в интервале между двумя измерениями. Моделирование будем проводить для шестикомпонентной смеси описанной выше.

Зададим относительное среднеквадратичное отклонение погрешности измерения показателя поглощения равным 4%. При формировании матрицы V_w положим, что среднеквадратичное отклонение элементов вектора $\bar{w}(k)$ составляет 15% относительно начального значения концентрации.

Результаты математического моделирования приведены на рисунках 11, 12, здесь 1 – истинное значение концентрации, 2 – значение концентрации определенное с помощью фильтра Калмана.

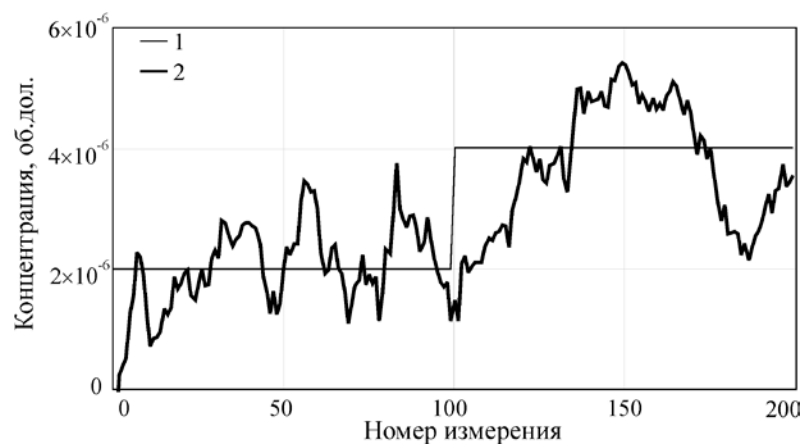


Рисунок 11 – Результат определения концентрации хлоропрена

[Оглавление](#)

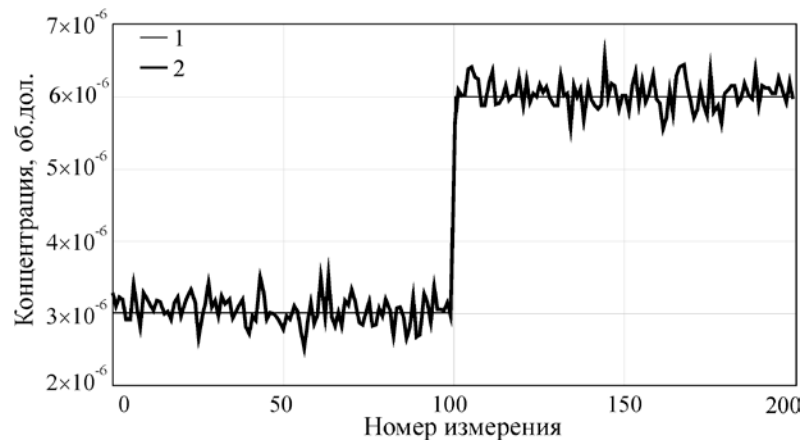


Рисунок 12 – Результат определения концентрации трихлорэтилена

Концентрация трихлорэтилена определяется с приемлемой погрешностью, а фильтр Калмана очень быстро откликается на изменение концентрации. Погрешность определения хлоропрена достаточно велика, но найденные значения концентрации имеет правильный порядок величины, и видна реакция фильтра на ступенчатое изменение концентрации.

[Оглавление](#)

Список литературы

1. Лазерный контроль атмосферы / под ред. Э. Д. Хинкли. М.: Мир, 1979. 416 с.
2. Хргиан А. Х. Физика атмосферы. М.: Изд-во МГУ, 1986. 328 с.
3. Кароль И. Л., Розанов В.В., Тимофеев Ю.М. Газовые примеси в атмосфере. Л.: Гидрометеиздат, 1983. 192 с.
4. Зуев В.Е., Комаров В.С. Статистические модели температуры и газовых компонент атмосферы. Л.: Гидрометеиздат, 1986. 264 с.
5. Костко О.К., Портасов В.С., Хаттатов В.У., Чайнова Э.А. Применение лазеров для определения состава атмосферы. Л.: Гидрометеиздат, 1983. 216 с.
6. Meyer P. L., Sigrist M. W.. Atmospheric pollution monitoring using CO₂-laser photoacoustic spectroscopy and other techniques // Rev. Sci. Instrum. 1990. V.61(7). P.1779-1806.
7. Лазерная аналитическая спектроскопия / В.С. Антонов, Г.И.Беков, М.А.Большов и др. М.: Наука, 1986. 320 с.
8. Демтрёдер В. Лазерная спектроскопия: Основные принципы и техника эксперимента. М. Наука, 1985. 608 с.
9. Жаров В.П., Летохов В.С. Лазерная оптико-акустическая спектроскопия. М.: Наука. 1984. 320 с.
10. Оптико-акустический метод в лазерной спектроскопии молекулярных газов / А.Б. Антипов, В.А. Капитанов, Ю.Н. Пономарев, В.А. Сапожников. Новосибирск: Наука. 1984. 128 с.
11. Пономарев Ю.Н. Лазерная оптико-акустическая спектроскопия атмосферы // Оптика атмосферы и океана. 1995. Т.8. № 1-2. С. 224-241.
12. Лазерная оптико-акустическая спектроскопия межмолекулярных взаимодействий в газах / Ю.Н. Пономарев, Б.Г. Агеев, М.В. Зигрист, В.А. Капитанов, Д. Куртуа, О.Ю. Никифорова. Томск: МГП «РАСКО», 2000. 199 с.
13. Основы количественного лазерного анализа / В.И. Козинцев, М.Л. Белов, В.А. Городничев, Ю.В. Федотов. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2006. 464 с.
14. Лазерный оптико-акустический анализ многокомпонентных газовых смесей / В.И. Козинцев, М.Л. Белов, В.А. Городничев, Ю.В. Федотов. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2003. 352 с.

Оглавление

15. Оптико-электронные системы экологического мониторинга природной среды / В.И. Козинцев, В.М. Орлов, М.Л. Белов, В.А. Городничев, Б.В. Стрелков. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2002. 528 с.

16. Савенко В.С. Природные и антропогенные источники загрязнения атмосферы // Итоги науки и техники. ВИНТИ. Сер. Охрана природы и воспроизв. природных ресурсов. 1991. Т. 31. С. 1-212.

17. Марковский С.И., Козловский А.В., Федичкин И.Л. и др. Контроль технологических процессов в металлургическом производстве с использованием масс-спектрометрического газоанализатора // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2000. Т. 66. № 6. С. 8-13.

18. Ладыгичев М.Г., Чижикова В.М. Сырье для черной металлургии. Справочное издание: в 2-х томах . Т.2 Экология металлургического производства. М.: Теплоэнергетик, 2002. 448 с.

19. Воскобойников Ю.Э., Преображенский Н.Г., Седельников А.Н. Математическая обработка эксперимента в молекулярной газодинамике. Новосибирск: Наука, 1984. 238с.

20. M. S. Grewal, A.P. Andrew. Kalman Filtering: Theory and Practice Using MATLAB. New York: John Wiley and Sons Inc., 2001. 401 p.

21. Калман Р.Э., Фалб П.Л., Арbib М.А. Очерки по математической теории систем. М.: Едиториал УРСС, 2004. 400с.

22. Воскобойников Ю.Е. Рекуррентное оценивание в динамических системах. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2002. 92 с.

23. Балакришнан А. Теория фильтрации Калмана. М.: Мир, 1988. 168 с.

24. Браммер К., Зиффлинг Г. Фильтр Калмана-Бьюси. М.: Наука, 1982. 200 с.

25. Brown R.G. Introduction to Random Signal Analysis and Kalman Filtering. New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore: John Wiley & Sons, Inc., 1983. 347 p.

26. Anderson B.D.O., Moore J.B. Optimal Filtering. London: Prentice Hall International, Inc., 1979. 354 p.

27. Сизиков В.С. Математические методы обработки результатов измерений. СПб: Политехника, 2001. 240 с.

28. Kalman Filtering and Neural Networks / Ed. S. Haykin. New York, Chichester, Weinheim, Brisbane, Toronto, Singapore: John Wiley & Sons, Inc., 2001. 284 p.

[Оглавление](#)

29. Simon D. Optimal State Estimation. Kalman and Nonlinear Approaches. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2006. 526 p.

30. Evensen G. Data Assimilation. The Ensemble Kalman Filter. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2007. 279 p.

31. Application of Kalman filtering to real-time trace gas concentration measurements / D.P. Leleux et al. // Applied Physics B. 2002. V.74. P.85-93.

32. Kalman filtering real-time measurements of H₂O isotopologue ratios by laser absorption spectroscopy at 2.73 μm / Tao Wu et al. // Optics Letter. 2010. V.35, N.5. P. 634-636.

33. Riris H., Carlisle C.B., Warren R.E. Kalman filtering of tunable diode laser spectrometer absorbance measurements // Applied Optics. 1994. V. 33, N. 24. P. 5506 – 5508.

[Оглавление](#)