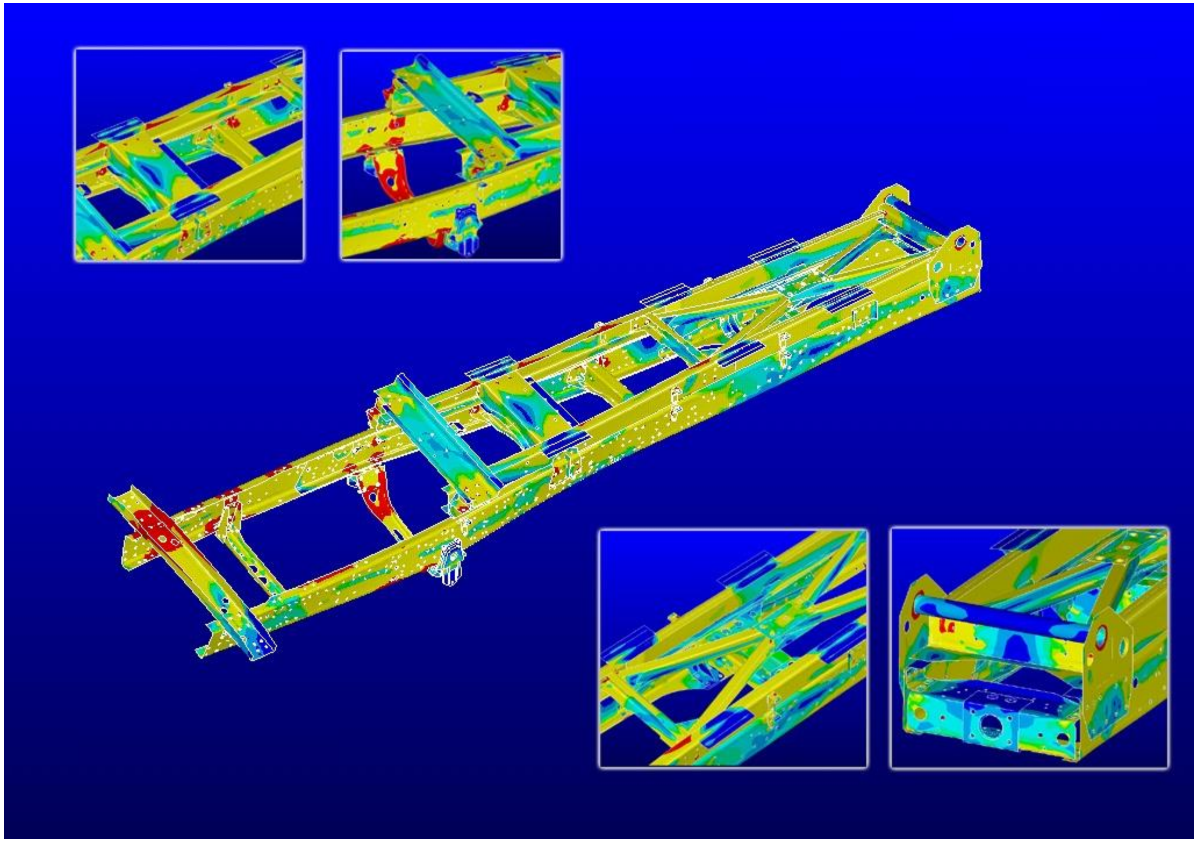
Лекция №4

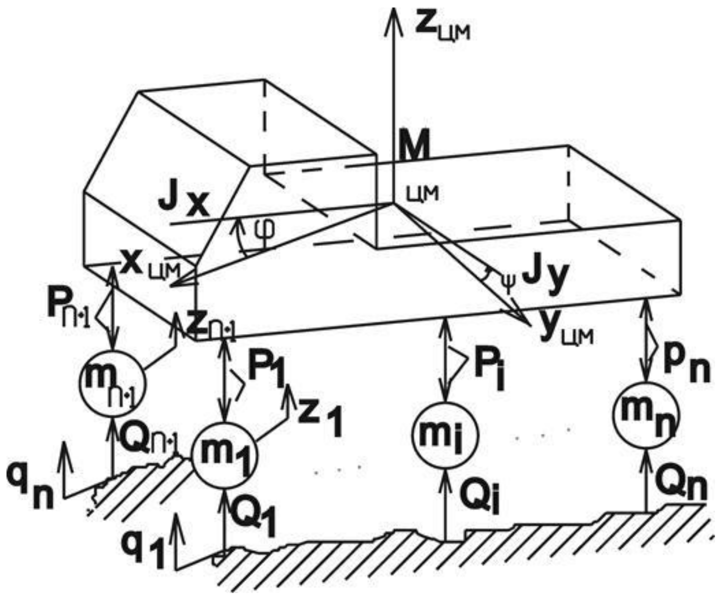
Функциональное проектирование в САПР



4.1.Введение

Наряду с конструкторским проектированием изделий, выполняемым геометрическим моделированием в CAD системах, важным этапом при автоматизированном проектировании является этап функционального проектирования изделия. На этапе функционального проектирования изделия строится математическое описание его функционирования, которое называется функциональной моделью. В основном функциональные модели используются для решения задач анализа. В САПР анализ выполняется математическим моделированием.

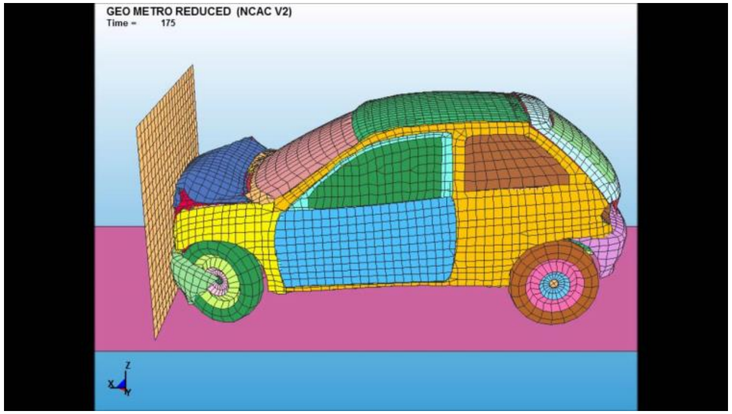
Математическое моделирование — процесс создания модели и оперирование ею с целью получения сведений о реальном объекте.

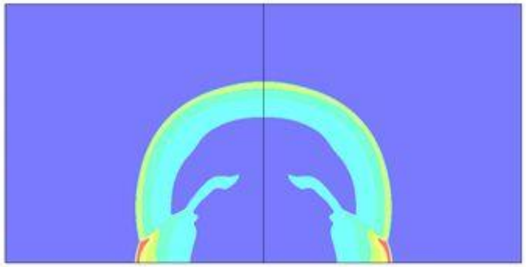


4.1.Введение

Преимущества математического моделирования перед физическим макетированием

- меньшие сроки на подготовку анализа;
- значительно меньшая материалоемкость, особенно при проектировании крупногабаритных объектов;
- возможность выполнения экспериментов на критических режимах, которые привели бы к разрушению физического макета, и др.





4.2. Математические модели

Математическая модель (ММ) — совокупность математических объектов (чисел, символов, множеств и т. д.) и связей между ними, отражающих важнейшие для проектировщика свойства проектируемого технического объекта.

ММ как и объект проектирования характеризуется своими параметрами: выходными (вектор **Y**), внутренними (вектор **X**) и внешними (вектор **Q**).

В общем случае математическая модель записывается в виде:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{F}(\mathbf{X},\mathbf{Q}) \; ,$$

где **F** – некоторая вектор-функция.

4.2. Математические модели

Внешние параметры – это параметры, характеризующие внешнюю по отношению к ОП среду.

Например, окружающая температура, действующие нагрузки и т.д. Вектор внешних параметров обозначим **Q**.

В общем случае математическая модель ОП записывается в виде:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{Q}), \qquad (1.1)$$

где **F** – некоторая вектор-функция.

4.2. Математические модели

Наличие математической модели в виде (1.1) позволяет легко определить выходные параметры ОП по известным векторам **X** и **Q**. Однако получить математическую модель ОП в таком виде удается только для простейших случаев. При проектировании сложных объектов эту модель используют в основном на начальных этапах, в остальных случаях пользуются моделью ОП, в которую входят фазовые и независимые переменные.

Следует отметить следующие особенности параметров:

1) Внутренние параметры в моделях i-го иерархического уровня становятся выходными параметрами в моделях более низкого (i+1)-го уровня.

2) Выходные параметры, фигурирующие в модели одной из подсистем, часто оказываются внешними параметрами в описаниях других подсистем.

4.2. Математические модели

В большинстве случаев связь между выходными, внутренними и внешними параметрами известна не в виде явной функциональной зависимости **F**, а задается в алгоритмической форме, например через численное решение системы уравнений. Уравнения, решение которых требуется для определения выходных параметров, содержат ***независимые переменные*** (например, время *t*, пространственные координаты *x*, *y*, *z*) и зависимые переменные – ***фазовые переменные V (переменные состояния)***– величины, характеризующие состояние объекта. Примерами фазовых переменных могут служить скорости, силы, напряжения и деформации в механических системах, давления и расходы в гидравлических системах, напряжения, токи и заряды в электрических системах и т.д. В любой момент времени математическая модель объекта характеризуется вектором фазовых переменных, который задает точку в некотором пространстве, называемом ***фазовым пространством***.

4.2.1. Классификация ММ

В зависимости от *характера отображаемых свойств объекта* модели делятся на ***структурные*** и ***функциональные***.

Математические модели, используемые в проектных процедурах, относящихся к процессу конструкторского проектирования, отражающие только структурные свойства объекта (например, его геометрическую форму, размеры, взаимное расположение элементов в пространстве), называются ***структурными ММ***.

Математические модели, используемые в проектных процедурах, связанных с функциональным проектированием, отражающие закономерности процессов функционирования объектов, называются ***функциональными ММ***. Типичная функциональная модель представляет собой систему уравнений, описывающих механические, гидравлические, пневматические, электрические, тепловые процессы. Поскольку характер функционирования объекта в большинстве случаев невозможно описать без учета его структуры, в функциональных ММ отражаются также и структурные свойства объекта.

4.2.1. Классификация ММ

В зависимости от степени детализации описываемых свойств и процессов, протекающих в объекте, функциональные модели разделяют на:

– ММ на микроуровне (ММ с распределенными параметрами);
– ММ на макроуровне (ММ с сосредоточенными параметрами);
– ММ на метауровне.

4.2.1. Классификация ММ

На микроуровне ММ представлены дифференциальными уравнениями в частных производных (ДУЧП) вместе с краевыми условиями. К этим моделям, называемым *распределенными*, относятся многие уравнения математической физики – уравнения упругости, электродинамики, теплопроводности, гидродинамики, газовой динамики, которые описывают напряженно-деформированное состояние деталей механических конструкций, поля электрического потенциала и температуры и т. п.

К типичным фазовым переменным на микроуровне относятся механические напряжения и деформации, давления, температуры, электрические потенциалы, концентрации частиц, плотности токов.

Число совместно исследуемых различных сред (число деталей, слоев материала, фаз агрегатного состояния) в практически используемых моделях микроуровня не может быть большим из-за сложностей вычислительного характера. Резко снизить вычислительные затраты в многокомпонентных средах можно, только применив иной подход к моделированию, основанный на принятии определенных допущений, приводящих к ММ макроуровня.

4.2.1. Классификация ММ

На макроуровне производится дискретизация пространства с выделением в качестве элементов отдельных деталей. Такая дискретизация означает переход от распределенных моделей к ***сосредоточенным***. При этом из числа независимых переменных исключают пространственные координаты, независимой переменной здесь остается только время.

Элементами этого уровня являются объекты, которые на микроуровне рассматривались как системы (например, валы, пружины, элементы сопротивления). Упрощение описания отдельных компонентов (деталей) позволяет исследовать модели процессов в устройствах, приборах, механических узлах, число компонентов в которых может доходить до нескольких тысяч.

ММ на макроуровне представляют собой системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В качестве фазовых переменных фигурируют силы, скорости, температуры, расходы, электрические напряжения, токи и т.д. Они характеризуют проявления внешних свойств элементов при их взаимодействии между собой и внешней средой.

С увеличением числа элементов системы возможности решения задач с использованием ММ макроуровня резко сужаются. В этом случае целесообразен переход к следующему, более высокому иерархическому уровню.

4.2.1. Классификация ММ

На метауровне с помощью дальнейшего абстрагирования от характера физических процессов удается получить приемлемое по сложности описание процессов, протекающих в проектируемых объектах. Математические модели на метауровне — системы обыкновенных дифференциальных уравнений, системы алгебраических уравнений, системы логических уравнений, имитационные модели систем массового обслуживания.

4.2.2. Основные требования к ММ

Основными требованиями, предъявляемыми к ММ, являются требования адекватности, точности, универсальности и экономичности.

Адекватность и точность. Модель считается адекватной, если она отражает заданные свойства объекта с точностью не хуже заданной. Точность определяется как степень совпадения предсказанных с помощью модели значений выходных параметров объекта с истинными значениями этих параметров.

Точность модели оценивается относительной погрешностью:

$$\varepsilon_м = \frac{y_м - y_{ист}}{y_м}, \qquad (4.2)$$

где $y_м$ – выходной параметр, рассчитанный с помощью модели; $y_{ист}$ – тот же выходной параметр, имеющий место в моделируемом объекте.

4.2.2. Основные требования к ММ

Обычно ММ создается для исследования поведения объекта в некоторых областях изменения его внутренних и внешних параметров. Поскольку выходные параметры системы являются функциями внешних **Q** = (*q*1, *q*2, … *qk*) и внутренних Х = (*x1, x2, … xk)* ее параметров, погрешность $\varepsilon_м$ зависит от **Q** и **X**. Обычно внутренние параметры ММ выбираются из условия минимизации погрешности $\varepsilon_м$ в некоторой точке $Q_{ном}$ пространства внешних параметров, и величина погрешности модели становится функцией **Q**.

Если задаться предельно допустимой погрешностью, то в пространстве внешних параметров можно выделить область, в которой выполняется условие $\varepsilon_м < \delta$.

4.2.2. Основные требования к ММ

Такую область называют областью адекватности (ОА) модели. Графическая иллюстрация ОА для двумерного пространства внешних параметров $\mathbf{Q} = (q_1, q_2)$ представлена на рис. 4.1, где область адекватности ограничена линиями *j* = 1, *j* = 2 и *j* = 3, задаваемыми уравнениями

$$\left|\varepsilon_j(Q)\right| = \delta_j, \; j = 1, 2, 3. \qquad (4.3)$$

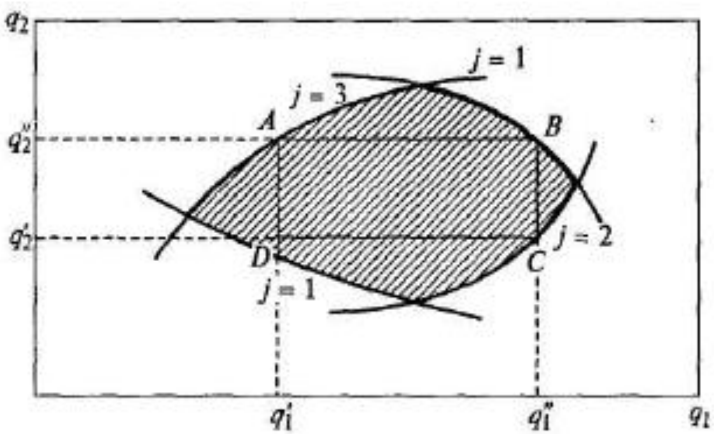


Рис. 4.1. Пример области адекватности

Определение областей адекватности для конкретных моделей – сложная процедура, требующая больших вычислительных затрат. Эти затраты и трудности определения ОА быстро растут с увеличением размерности пространства внешних параметров.

4.2.2. Основные требования к ММ

Универсальность. Степень универсальности ММ характеризует полноту отображения в ней свойств реального объекта и определяется возможностью использования модели для анализа более или менее многочисленной группы однотипных объектов, а также числом доступных для анализа режимов функционирования. Использование машинных методов проектирования станет неудобным, если в процессе анализа объекта при каждом изменении режима функционирования пользователю потребуется смена ММ.

Универсальность модели в первую очередь зависит от числа и состава учитываемых в модели внешних и выходных параметров. Увеличение их расширяет применимость модели, но существенно усложняет ее разработку.

4.2.2. Основные требования к ММ

Экономичность. Экономичность ММ характеризуется затратами вычислительных ресурсов для ее реализации, а именно *затратами машинного времени* и *памяти*. Общие затраты на выполнение в САПР какойлибо проектной процедуры зависят как от особенностей выбранных моделей, так и от методов решения.

Требования широких областей адекватности, высокой степени универсальности, с одной стороны, и высокой экономичности, с другой, являются **противоречивыми**. Наилучшее компромиссное удовлетворение этих требований оказывается неодинаковым в различных применениях. Данное обстоятельство обусловливает использование в САПР многих моделей для объектов одного и того же типа.

4.2.3. Преобразование ММ в процессе анализа

Процедура анализа в САПР заключается в определении свойств объекта, отражаемых в его ММ, на основе решения уравнений. Реализация ММ на ЭВМ подразумевает выбор численного метода решения уравнений и преобразование их в соответствии с особенностями выбранного метода. Все преобразования исходной ММ в последовательность элементарных действий ЭВМ выполняются автоматически по специальным программам, создаваемым разработчиком САПР. Пользователь САПР должен лишь указать, какие программы из имеющихся он хочет использовать. Однако ему важно знать методы решения уравнений, прежде всего для правильного выбора прикладных программ в конкретных ситуациях.

Процесс преобразования ММ, относящихся к различным иерархическим уровням, иллюстрирует рис. 4.2.

4.2.3. Преобразование ММ в процессе анализа

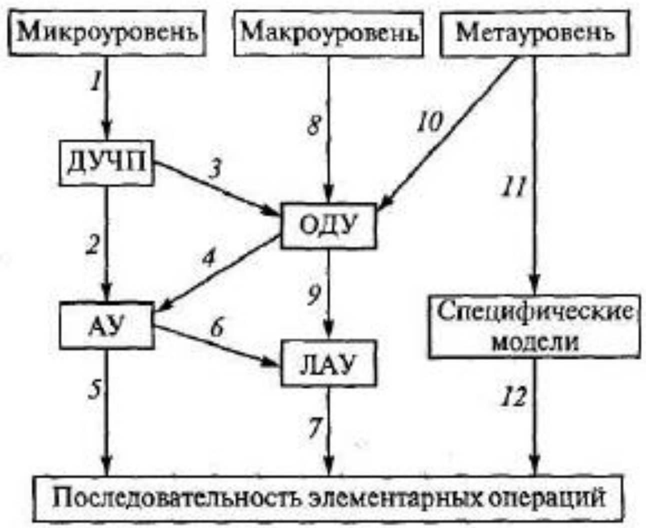


Рис. 4.2. Преобразование ММ

Ветви 1 соответствует постановка задачи, относящейся к микроуровню. Описание объекта в данном случае обычно сводится к составлению системы дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП), численные методы решения которых основаны на дискретизации переменных и алгебраизации задачи. Дискретизация заключается в замене переменных конечным множеством их значений в заданных пространственном и временном интервалах, алгебраизация – в замене производных алгебраическими соотношениями.

4.2.3. Преобразование ММ в процессе анализа

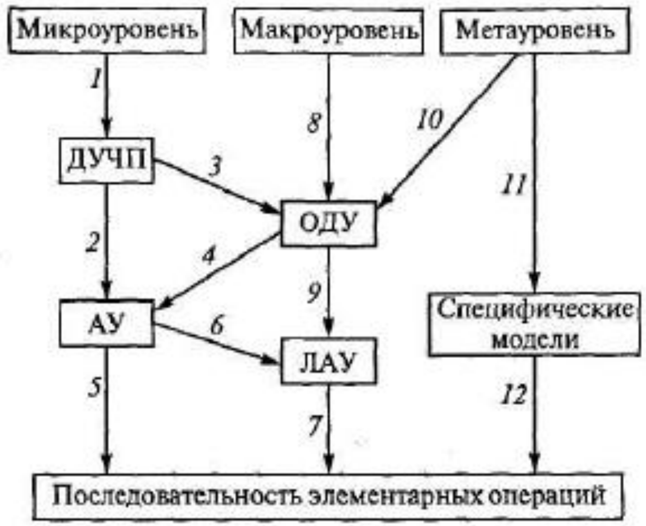


Рис. 4.2. Преобразование ММ

Используют два основных подхода к дискретизации и алгебраизации задачи, составляющих сущность методов конечных разностей и конечных элементов.

Если ДУЧП стационарные (описывают статическое состояние и время не фигурирует в качестве независимой переменной), дискретизация и алгебраизация преобразуют систему ДУЧП в систему алгебраических уравнений (АУ) – *ветвь 2* (см. рис. 4.2).

4.2.3. Преобразование ММ в процессе анализа

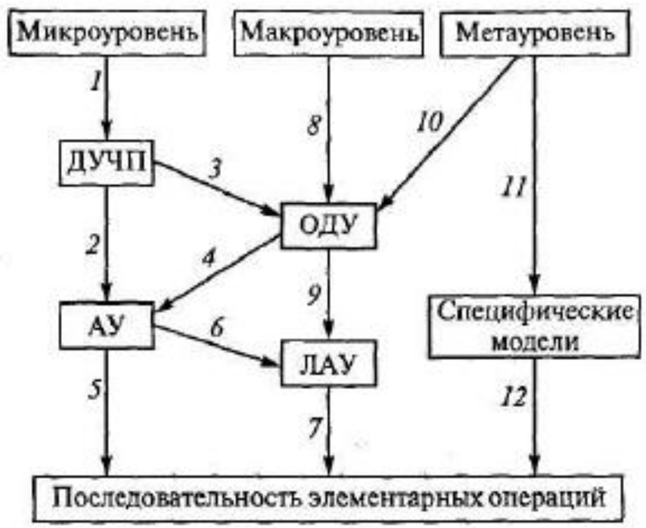


Рис. 4.2. Преобразование ММ

Если система ДУЧП нестационарная, дискретизацию и алгебраизацию можно представить состоящими из двух этапов: устранение производных по пространственным координатам (*ветвь 3*), в результате чего получается система обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), и устранение производных по времени (*ветвь 4* или *ветвь 9*).

4.2.3. Преобразование ММ в процессе анализа

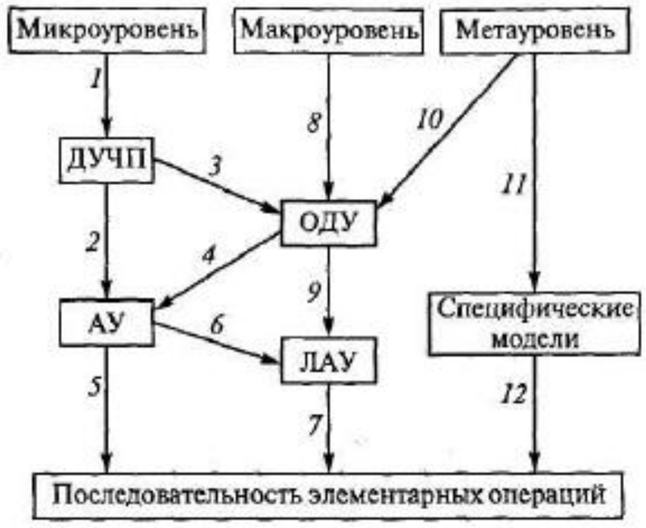


Рис. 4.2. Преобразование ММ

Для решения ОДУ при заданных начальных условиях разработано большое количество численных методов. Как правило, эти методы являются пошаговыми: на каждом шаге интегрирования производится алгебраизация уравнений с помощью аппроксимирующих выражений, связывающих производные переменных по времени в некоторой точке *tk* со значениями переменных в этой же точке и в одной или нескольких соседних точках. С точки зрения пользователя методы отличаются степенью универсальности, скоростью вычислений и требованиями к объему оперативной памяти. В САПР широко используются методы Гира, Адамса и Рунге-Кутта.

4.2.3. Преобразование ММ в процессе анализа

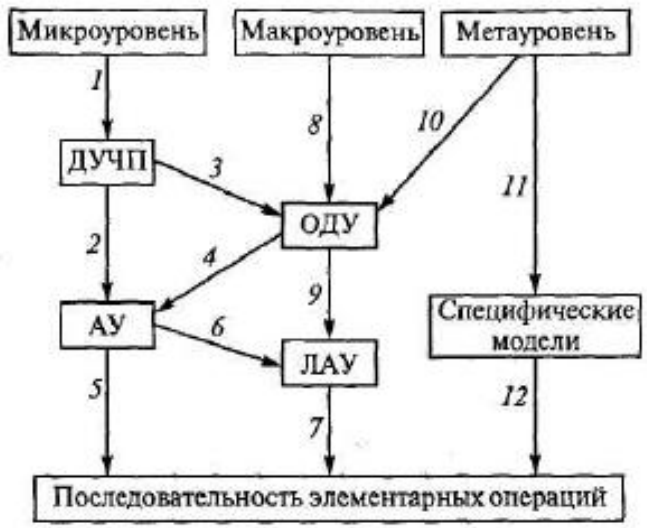


Рис. 4.2. Преобразование ММ

Алгебраические уравнения в общем случае нелинейные. Если нелинейность несущественная, уравнения предварительно линеаризуют (*ветвь 6*). Основу решения системы нелинейных алгебраических уравнений (*ветвь 5*) составляют итерационные методы.

4.2.3. Преобразование ММ в процессе анализа

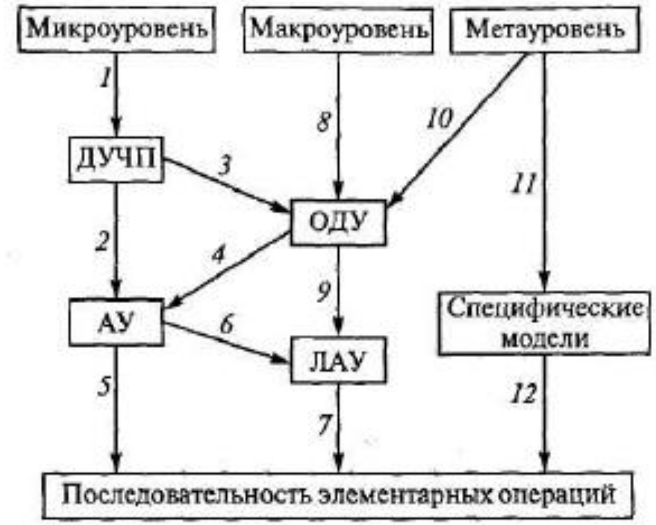


Рис. 4.2. Преобразование ММ

В САПР для решения систем нелинейных алгебраических уравнений обычно применяют метод Ньютона, как обладающий наибольшей эффективностью по показателю затрат машинного времени. Основным его недостатком является то, что сходимость к решению имеется не всегда, причем заранее предсказать ее наличие или отсутствие довольно сложно. Стремление повысить надежность метода привело к появлению ряда его модификаций. В случаях большой размерности задач при нехватке емкости оперативной памяти вместо метода Ньютона применяют метод последовательной верхней релаксации, в отдельных случаях — методы Якоби и Зейделя.

4.2.3. Преобразование ММ в процессе анализа

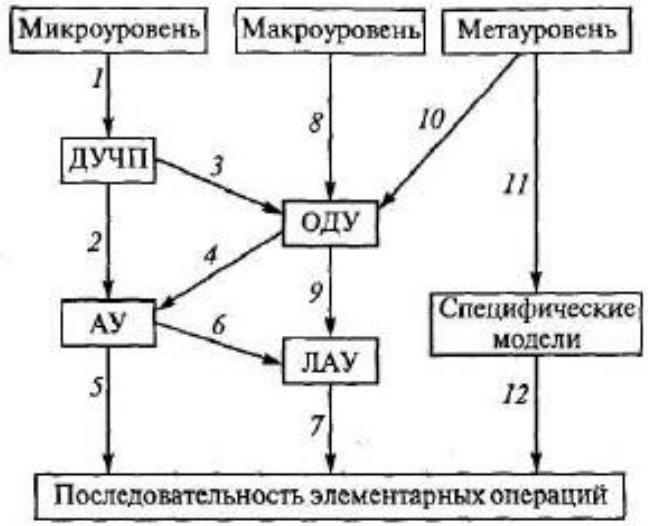


Рис. 4.2. Преобразование ММ

Ветви 7 соответствует решение систем линейных алгебраических уравнений (ЛАУ). Наиболее часто применяется метод Гаусса и его разновидности.

4.2.3. Преобразование ММ в процессе анализа

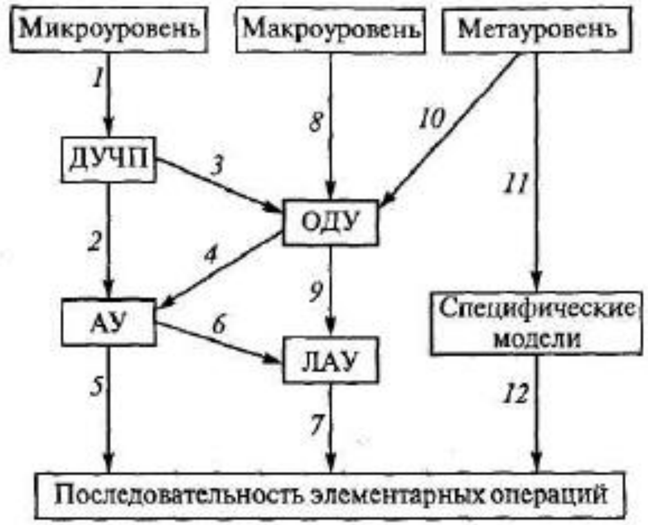


Рис. 4.2. Преобразование ММ

Ветви 8 соответствует преобразование исходного описания задачи, относящейся к макроуровню, в систему ОДУ с начальными условиями. Если это система нелинейных ОДУ, дальнейшее преобразование происходит по *ветвям 4, 6, 7 или 4, 5*; если это система линейных ОДУ – осуществляется переход к системе ЛАУ (*ветвь 9*).

4.2.3. Преобразование ММ в процессе анализа

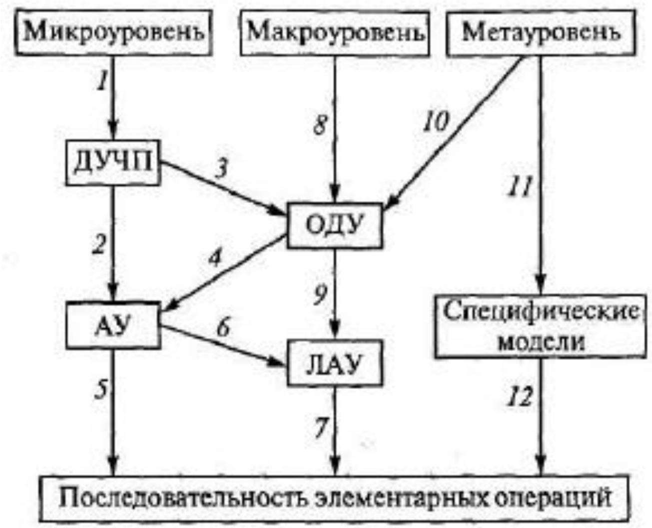


Рис. 4.2. Преобразование ММ

Для анализа объектов на метауровне осуществляют либо перевод к системе ОДУ (*ветвь 10*), либо переход к системам логических уравнений, моделям массового обслуживания или аналитическим моделям, отображающим упрощенно технико-экономические показатели объекта (*ветвь 11*). Сведение этих форм моделей в последовательность элементарных вычислительных операций (*ветвь 12*) не вызывает затруднений.

4.3. ММ объекта с распределенными параметрами (на микроуровне)

Проектирование многих технических объектов связано с необходимостью анализа непрерывных физических процессов, математическим описанием которых являются ДУЧП. Для численного решения таких систем используются *сеточные методы* – метод конечных элементов (МКЭ), метод конечных разностей, метод конечных объемов и другие.

4.3.1. Постановка задачи на микроуровне

В некоторой области пространства (рис. 4.3) необходимо решить ДУЧП с заданными краевыми условиями:

$$LV + P = 0\,, \qquad (4.4)$$

где L – дифференциальный оператор (например, $L \equiv \dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y}$), V – вектор фазовых переменных, P – свободный член.

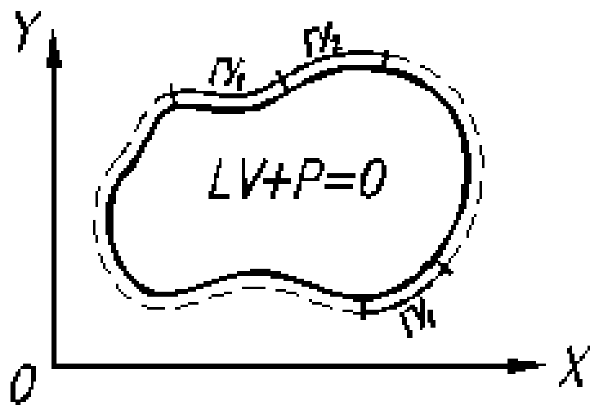


Рис. 4.3

Для получения единственного решения уравнения (4.4) необходимо задать *краевые условия* – значения фазовых переменных или их функций на границе исследуемой области (*граничные условия*) и значения фазовых переменных в нулевой момент времени во внутренних токах области (*начальные условия*). Для стационарных задач начальные условия отсутствуют. Дифференциальное уравнение в частных производных вместе с краевыми условиями носит название *краевой задачи*.

4.3.1. Постановка задачи на микроуровне

Граничные условия могут быть трех типов:

1) 1-го рода (условие Дирихле): задается значение фазовых переменных. Например, при решении задачи теплопроводности задается температура на границе:

$$T(\Gamma) = T^* . \qquad (4.5)$$

2) 2-го рода (условие Неймана): задается значение производной по координатам от фазовых переменных. Например, при решении задачи теплопроводности задается значение теплового потока на границе в каждый момент времени:

$$-k\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{\Gamma} = q(t) . \qquad (4.6)$$

3) 3-го рода: задается уравнение баланса потоков. Например, при решении задачи теплопроводности задаются условия теплообмена на границе с окружающей средой:

$$-k\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{\Gamma} = \alpha(T - T_0) \qquad (4.7)$$

В приведенных выше выражениях использованы обозначения: k – коэффициент теплопроводности материала; $q(t)$ – тепловой поток через единицу площади; α – коэффициент теплообмена; T_0 – температура окружающей среды.

4.3.1. Постановка задачи на микроуровне

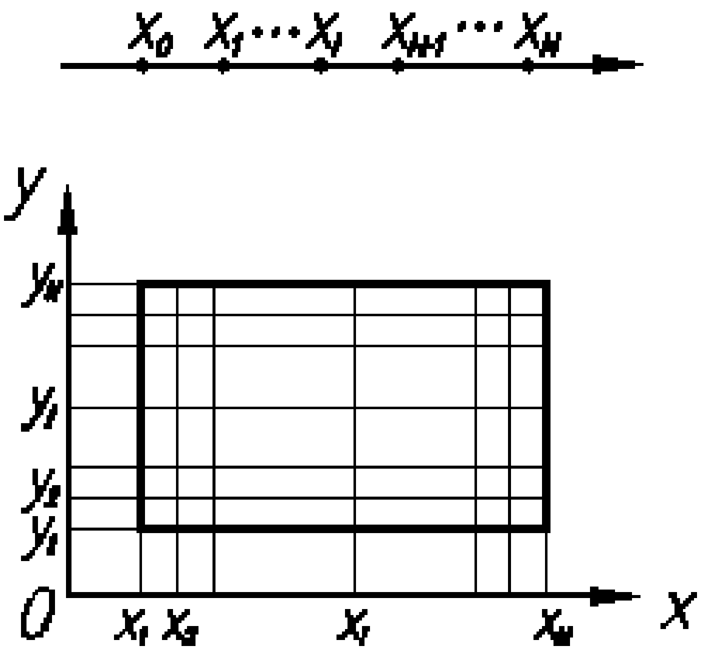


Рис. 4.4

Метод конечных разностей является старейшим методом решения краевых задач. Он состоит из трех этапов.

Этап 1. Построение сетки в заданной области. Пример разбиения одно- и двумерной области показан на рис. 4.4.

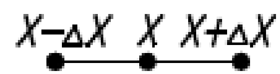
Этап 2. Замена дифференциального оператора L в исходном дифференциальном уравнении его разностным аналогом. Существует несколько возможных схем (шаблонов) построения разностных аналогов. Рассмотрим некоторые из них:

4.3.1. Постановка задачи на микроуровне

Правая разность: $$\frac{\partial V}{\partial x} \approx \frac{V_{i+1} - V_i}{\Delta x} \qquad (4.8)$$

Левая разность: $$\frac{\partial V}{\partial x} \approx \frac{V_i - V_{i-1}}{\Delta x} \qquad (4.9)$$

Центральная разность: $$\frac{\partial V}{\partial x} \approx \frac{V_{i+1} - V_{i-1}}{2\Delta x} \qquad (4.10)$$



Аналогично получают разностные аналоги для производных в двухмерной области.

При решении нестационарных задач, в которых вектор фазовых переменных зависит не только от пространственных координат, но и от времени, проводится одновременная дискретизация пространства и времени и получаются разностные аналоги производных по времени и по координатам.

4.3.1. Постановка задачи на микроуровне

Этап 3. Решение полученной системы алгебраических уравнений каким-либо численным методом.

При кажущейся простоте алгоритма МКР его практическая реализация наталкивается на ряд трудностей, главными из которых являются проблема сходимости приближенного решения к точному, а также проблема устойчивости разностной схемы.

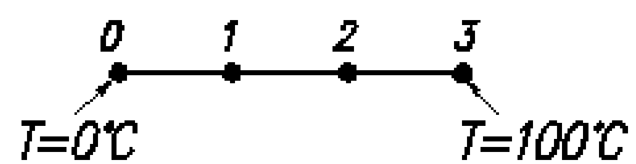


Рис. 4.5

Рассмотрим пример использования МКР для решения стационарной задачи теплопроводности в стержне, на концах которого поддерживается постоянная температура (рис. 4.5). Стационарное уравнение теплопроводности в одномерном случае имеет вид:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 . \qquad (4.11)$$

Сначала получим разностный аналог производной второго порядка:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \approx \left(\frac{V_{i+1} - V_i}{\Delta x} - \frac{V_i - V_{i-1}}{\Delta x} \right) \Big/ \Delta x = \frac{V_{i+1} - 2V_i + V_{i-1}}{\Delta x^2} . \qquad (4.12)$$

4.3.1. Постановка задачи на микроуровне

Тогда для выбранного разбиения можно записать следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{T_2 - 2T_1 + T_0}{\Delta x^2} = 0 \quad \text{\textit{Узел} } 1 \\ \dfrac{T_3 - 2T_2 + T_1}{\Delta x^2} = 0 \quad \text{\textit{Узел} } 2 \\ T_0 = 0 \qquad \text{\textit{ГУ на узле} } 0 \\ T_3 = 100 \quad \text{\textit{ГУ на узле} } 3 \end{cases} \tag{4.13}$$

Решение данной системы уравнений дает решение в узлах 1 и 2: T_1=33,3°C, T_1=66,7°C.

4.3.3. Метод конечных элементов (МКЭ)

В настоящее время одним из самых распространенных методов решения задач, описываемых ДУЧП, является **метод конечных элементов (**Finite Element Method - FEM). На его основе создан и успешно эксплуатируется ряд универсальных систем CAE, основными из которых являются ANSYS, MSC.NASTRAN, COSMOS и др.

Данные пакеты способны выполнять стационарные и нестационарные расчеты на прочность, долговечность, теплопередачу; решать задачи гидроаэромеханики, моделирование электромагнитных полей и распространение акустических волн.

МКЭ базируется на некоторой интегральной формулировке анализируемого явления, которая может быть либо *вариационного*, либо *проекционного* типа.

4.3.3. Метод конечных элементов (МКЭ)

Основная идея МКЭ состоит в том, что:
1) любую непрерывную величину (например, температуру, давление, перемещение) можно аппроксимировать дискретной моделью, которая строится на множестве кусочно-непрерывных функций, определённых на конечном числе подобластей (элементов);
2) кусочно-непрерывные функции определяются с помощью значений непрерывной величины в конечном числе точек рассматриваемой области.

4.3.3. Метод конечных элементов (МКЭ)

При построении дискретной модели непрерывной величины поступают следующим образом.
1.В рассматриваемой области фиксируется конечное число точек. Эти точки называются узловыми (или просто узлами).

2. Значение непрерывной величины в каждой узловой точке считается переменной, которая должна быть определена.

3. Область определения непрерывной величины разбивается на конечное число подобластей, называемых элементами (или конечными элементами).
Эти элементы имеют общие узловые точки и в совокупности аппроксимируют форму области.

4. Непрерывная величина аппроксимируется на каждом элементе полиномом (или какой-либо другой функцией), который определяется с помощью узловых значений этой величины.
Для каждого элемента определяется свой полином, но полиномы подбираются таким образом, чтобы сохранилась непрерывность величины вдоль границ элемента.
Этот полином называют ещё функцией элемента.

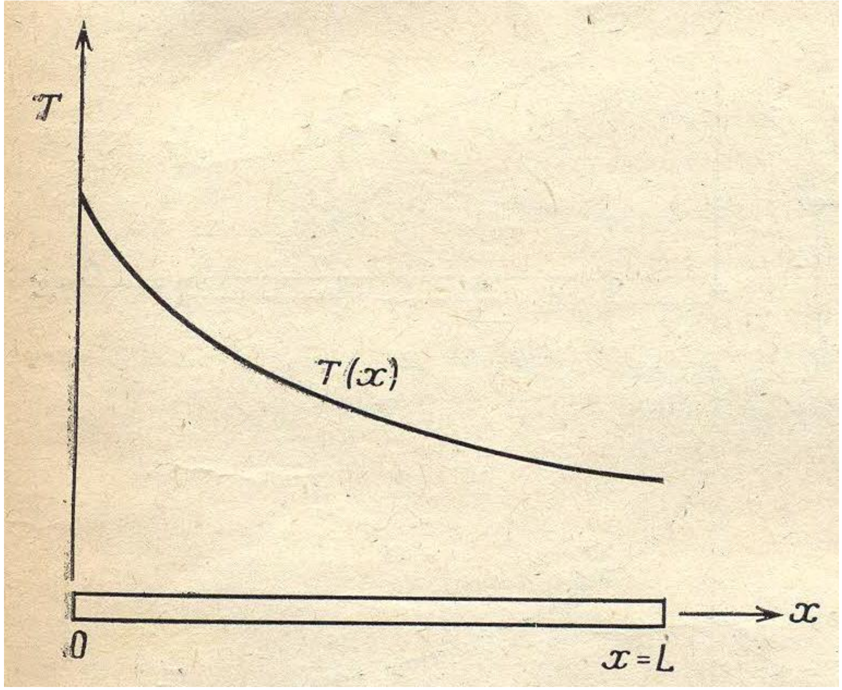
4.3.3. Метод конечных элементов (МКЭ)

Пусть задача, которую нужно решить, поставлена в вариационной форме: требуется найти функцию u, минимизирующую заданный функционал потенциальной энергии. Необходимость минимизации приводит к дифференциальному уравнению для u , которое обычно нельзя решить точно и приходится применять приближенные методы. Идея метода Релея-Ритца-Галеркина состоит в том, что выбирается конечное число пробных функций$\varphi 1$,$\varphi 2$, … , φN и среди всех линейных комбинаций вида $qj\varphi j$ ищется комбинация, доставляющая минимум функционалу. Это аппроксимация Ритца.

4.3.3. Метод конечных элементов (МКЭ)

Неизвестные веса qj определяются уже не из дифференциальных уравнений, а из системы N дискретных алгебраических уравнений, для решения которой можно применять ЭВМ. Теоретическое обоснование этого метода очень простое: процесс минимизации автоматически дает комбинацию, ближайшую к функции u. Таким образом, цель состоит в том, чтобы выбрать пробные функции φj достаточно удобными для вычисления и минимизации потенциальной энергии и в то же время обеспечить хорошее приближение неизвестного решения u.

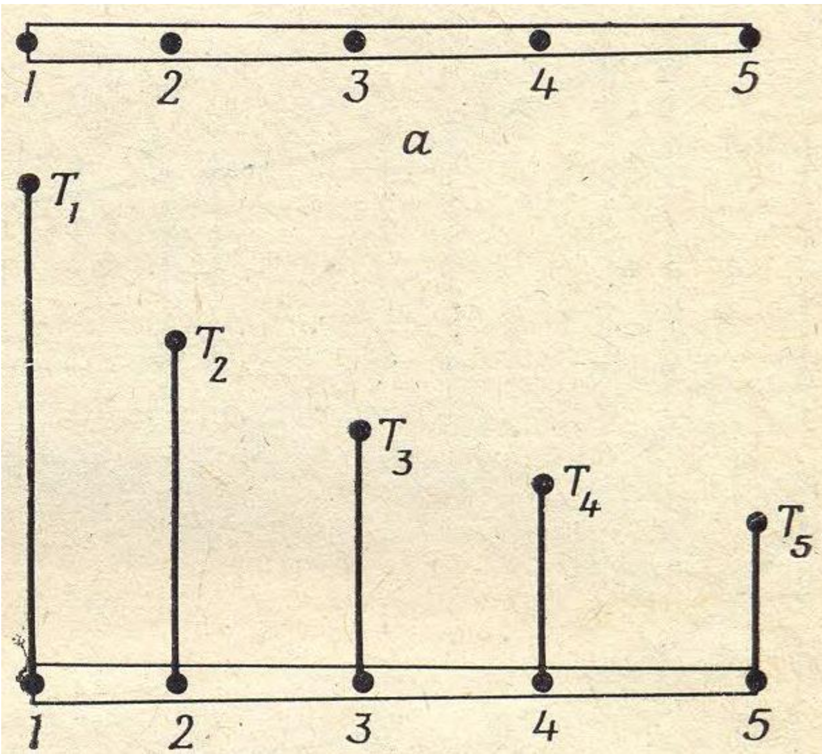
4.3.3. Метод конечных элементов (МКЭ)



Рассмотрим построение дискретной модели на примере одномерной задачи о распределении температуры в стержне.

Необходимо выполнить разбиение области в виде отрезка фиксированной длины для получения распределения температуры в нём T(x).

4.3.3. Метод конечных элементов (МКЭ)

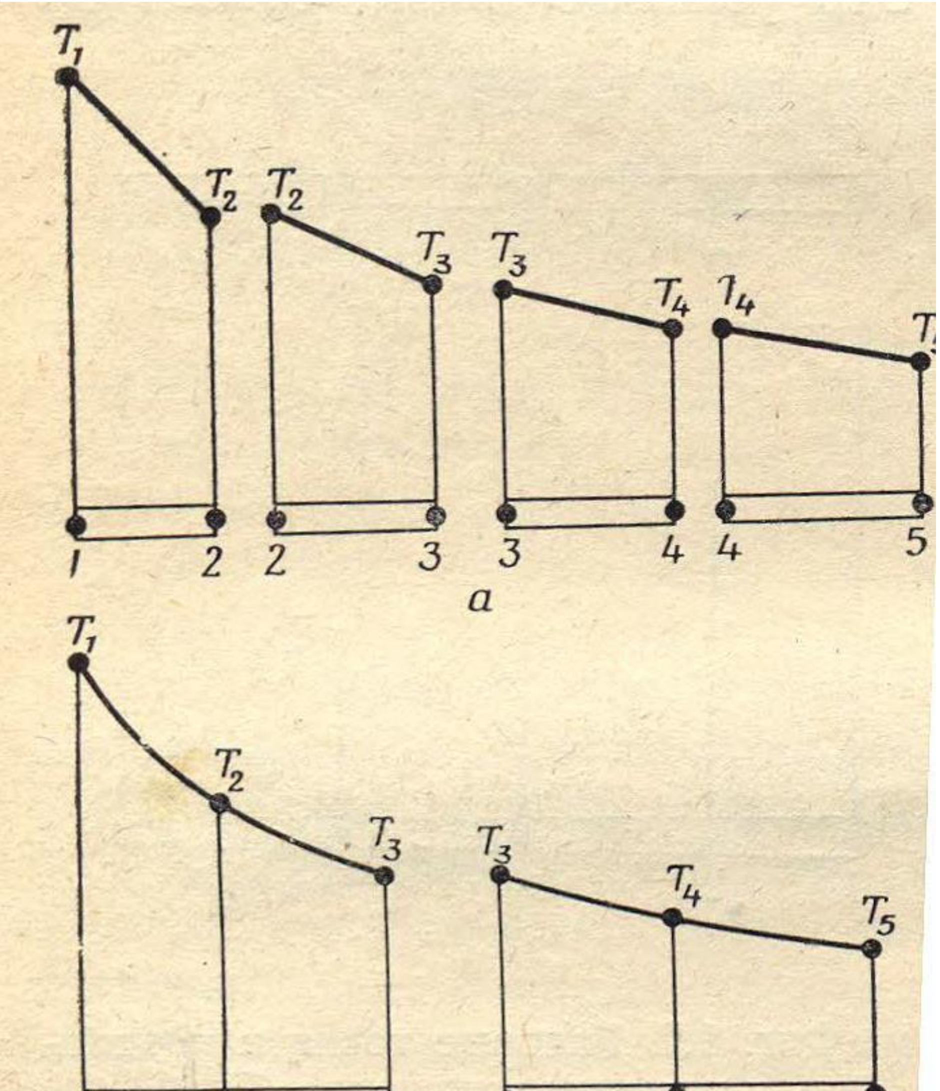


На оси ОХ фиксируются и нумеруются пять точек (рис. 2).

Это - узловые точки.

Совсем не обязательно располагать их на равном расстоянии друг от друга.

4.3.3. Метод конечных элементов (МКЭ)



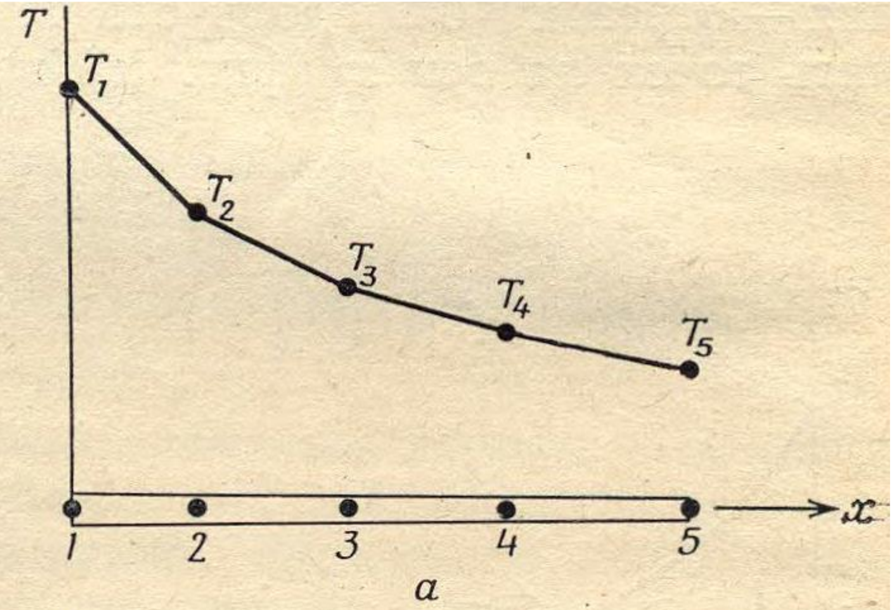
Разбиение области **на элементы** может быть произведено двумя различными способами:

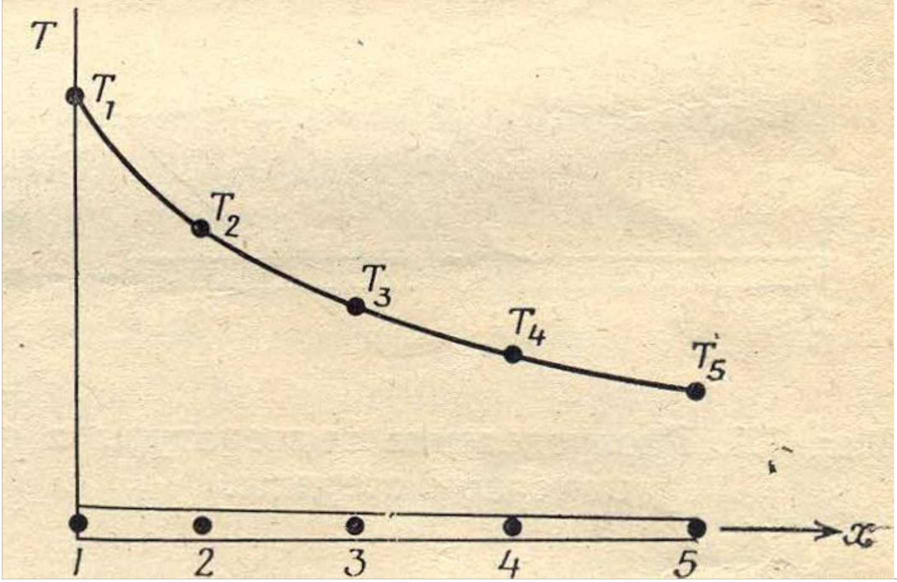
1)ограничение каждого элемента двумя соседними узловыми точками с образованием четырёх элементов

2)разбиение области на два элемента, каждый из которых содержит три узла

Соответствующий элементу полином определяется по значениям T(x) в узловых точках элемента.

4.3.3. Метод конечных элементов (МКЭ)





В случае разбиения области на четыре элемента на каждый элемент приходится по два узла, функция элемента будет линейна по x.

Окончательная аппроксимация T(x) будет состоять из четырёх кусочно-линейных функций, каждая из которых определена на отдельном элементе

4.3.3. Метод конечных элементов (МКЭ)

Ключевая задача – определение искомой функции (величины) в узловых точках. Она решается с использованием принципов вариационного исчисления (минимизация специально построенного функционала).
Поэтому МКЭ относят к вариационным методам.

Искомые узловые значения T(x) должны быть «отрегулированы» таким образом, чтобы обеспечивалось **«наилучшее» приближение** к истинному распределению температуры.
Это «регулирование» осуществляется путём **минимизации некоторой величины**, связанной с физической сущностью задачи.
Если рассматривается задача распространения тепла, то **минимизируется функционал,** связанный с уравнением теплопроводности.

Процесс минимизации в конечном итоге сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений относительно узловых значений T(x).

4.3.3. Метод конечных элементов (МКЭ)

Сущность *вариационной формулировки* состоит в том, что исходная задача сводится к задаче об отыскании функции, реализующей минимум, или в общем случае, экстремум некоторого функционала, и в последующем нахождении приближения к этой функции. Наиболее часто МКЭ в вариационной постановке используется при анализе прочности механических конструкций, при этом минимизируемый функционал описывает дополнительную работу или потенциальную энергию системы.

При использовании МКЭ в *проекционной формулировке* приближенное решение на конечном элементе представляется в виде линейной комбинации некоторых базисных функций. Приближенное решение при подстановке в исходное уравнение дает невязку, которая проецируется на ряд весовых функций и результат приравнивается к нулю. Этот метод также носит название метода взвешенных невязок. В зависимости от выбора весовых функций различают несколько методов взвешенных невязок, наиболее распространенным из которых является *метод Галеркина*.

4.3.3. Метод конечных элементов (МКЭ)

Метод Галеркина для решения дифференциальных уравнений

Постановка задачи. В некоторой области Ω необходимо решить краевую задачу:

$$\begin{aligned} &LV + P = 0 \\ &V(\Gamma) = V_\Gamma \end{aligned} \qquad (4.14)$$

Будем искать приближенное решение задачи в виде линейной комбинации некоторых функций:

$$V_a = \psi + \sum_{m=1}^{M} a_m N_m \,, \qquad (4.15)$$

4.3.3. Метод конечных элементов (МКЭ)

где ψ – функция, удовлетворяющая граничным условиям; N_m – известные *пробные функции*, которые на границе области принимает нулевые значения; a_m – коэффициенты, подлежащие определению.

Метод взвешенных невязок основан на минимизации ошибки аппроксимации точного решения выражением (4.15). Для этого в области Ω требуется выполнение равенства:

$$\int_{\Omega} W_l \cdot R \, d\Omega = 0, \quad l = 1 \ldots M \,, \tag{4.16}$$

где W_l – известные весовые функции; R – невязка:

4.3.3. Метод конечных элементов (МКЭ)

$$R = L(\psi + \sum_{m=1}^{M} a_m N_m) + P. \qquad (4.17)$$

При выборе весовых функций по методу Галеркина требуют, чтобы $W_i = N_i$.

Решение уравнения (4.16) приводит к системе алгебраических уравнений относительно коэффициентов a_m, найдя которые мы переходим по формуле (4.15) к приближенному решению краевой задачи.

4.3.3. Метод конечных элементов (МКЭ)

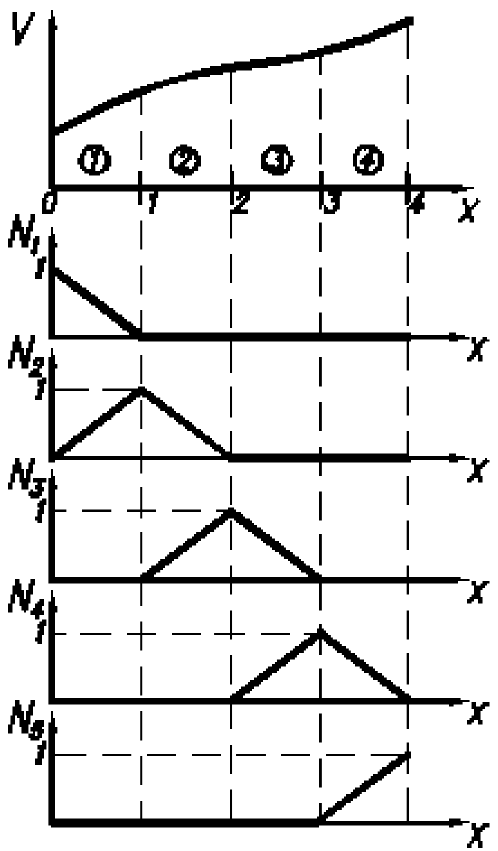


Рис. 4.6

Метод Галеркина в МКЭ

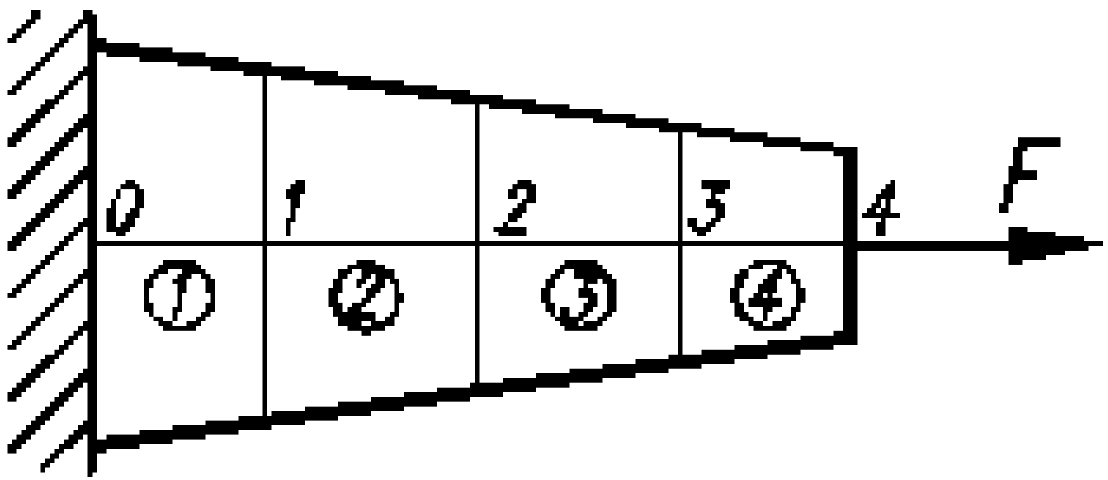
Основная идея МКЭ состоит в том, чтобы искать решение краевой задачи сразу не во всей области, а на ограниченных участках, то есть в пределах одного конечного элемента. Для этого пробные функции (называемые также функциями формы элемента) выбирают таким образом, чтобы они приобретали значения отличные от нуля только на конечных элементах, прилегающих к узлу аппроксимации, а их значение в узле аппроксимации было равно 1. Вид кусочно-линейных пробных функций показан на рис. 4.6. В силу такого выбора пробных функций приближенное решение на каждом элементе ***e*** может быть выражено с помощью только двух пробных функций. Кроме того, определенный интеграл (4.16) по области Ω может быть получен суммированием отдельных интегралов по подобластям *Ωe* для каждого элемента.

4.3.3. Метод конечных элементов (МКЭ)

Теперь коэффициенты *am*, получаемые при решении уравнения (4.16) численно равны значениям искомой функции в соответствующем узле.

Проиллюстрируем МКЭ на примере решения задачи о растяжении стержня переменного сечения (рис. 4.7). Дифференциальное уравнение, связывающее перемещения *u* и напряжения, в данном случае имеет вид (ось *x* направлена вдоль оси стержня):

$$\frac{du}{dx} - \frac{F}{S \cdot E} = 0,$$

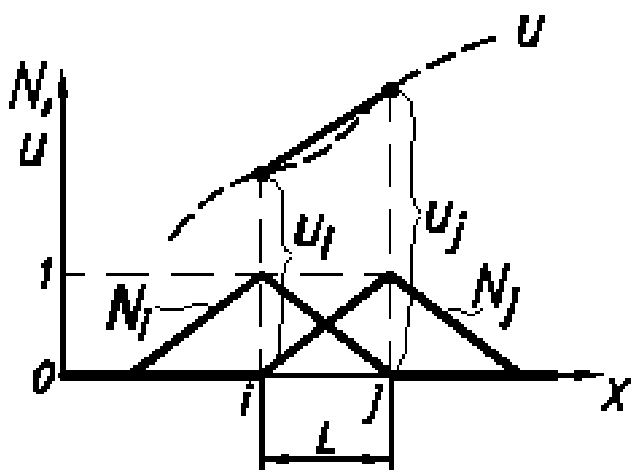


4.3.3. Метод конечных элементов (МКЭ)

Разобьем стержень на 4 элемента узлами 0, 1, …4. Выбираем кусочно-линейные пробные функции (рис. 4.8). На элементе длинной *L* с узлами *i* и *j* приближенное решение может быть выражено комбинацией двух базисных функций следующим образом:

$$u = u_i + \frac{u_j - u_i}{L} \cdot x = \left(1 - \frac{x}{L}\right) u_i + \frac{x}{L} u_j = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & N_j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix}, \qquad (4.19)$$

где $N_i = 1 - \dfrac{x}{L}$, $N_j = \dfrac{x}{L}$ - пробные функции.



4.3.3. Метод конечных элементов (МКЭ)

Запишем выражение для взвешенной невязки на одном элементе с узлами *i* и *j*:

$$\int_{\Omega_e} N_l \cdot (LV+P)d\Omega = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_0^L \begin{bmatrix} 1-\frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{bmatrix} \left(\frac{du}{dx} - \frac{F}{SE} \right) dx = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\int_0^L \begin{bmatrix} 1-\frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{bmatrix} \left(\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} 1-\frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} - \frac{F}{SE} \right) dx = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\int_0^L \begin{bmatrix} 1-\frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} - \frac{F}{SE} \right) dx = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{L} \int_0^L \begin{bmatrix} -\left(1-\frac{x}{L}\right) & 1-\frac{x}{L} \\ -\frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} dx - \int_0^L \begin{bmatrix} 1-\frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{bmatrix} \frac{F}{SE} dx = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{L} \begin{bmatrix} -\frac{L}{2} & \frac{L}{2} \\ -\frac{L}{2} & \frac{L}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{L}{2}\frac{F}{SE} \\ \frac{L}{2}\frac{F}{SE} \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{FL}{SE} \\ \frac{FL}{SE} \end{bmatrix} = 0$$

Полученная квадратная матрица называется ***матрицей жесткости*** элемента, а вектор свободных членов – ***вектором нагрузок***.

4.3.3. Метод конечных элементов (МКЭ)

Процесс суммирования невязок на отдельных элементах для получения невязки по всей области называется ***ансамблированием***. Эта процедура приводит к системе линейных алгебраических уравнений относительно перемещений u:

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1+1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 1+1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1+1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{FL_1}{S_1E} \\ -\dfrac{FL_1}{S_1E} + \dfrac{FL_2}{S_2E} \\ -\dfrac{FL_2}{S_2E} + \dfrac{FL_3}{S_3E} \\ -\dfrac{FL_3}{S_3E} + \dfrac{FL_4}{S_4E} \\ -\dfrac{FL_4}{S_4E} \end{bmatrix}$$

4.3.3. Метод конечных элементов (МКЭ)

После учета граничных условий: так как на левом конце стержня заделка, то $u0$ =0, имеем систему из четырех линейных алгебраических уравнений с четырьмя неизвестными. Значение длины конечного элемента *Li* может быть различным для каждого элемента. Значение площади поперечного сечения *Si* стержня на элементе может отличаться для каждого элемента, но остается постоянной в пределах одного элемента.

4.3.3. Метод конечных элементов (МКЭ)

Типы конечных элементов

Возможные типы конечных элементов (КЭ) могут быть разделены на несколько групп: по их назначению, по виду функций формы элемента, по форме элемента и геомет-рической размерности решаемых задач.

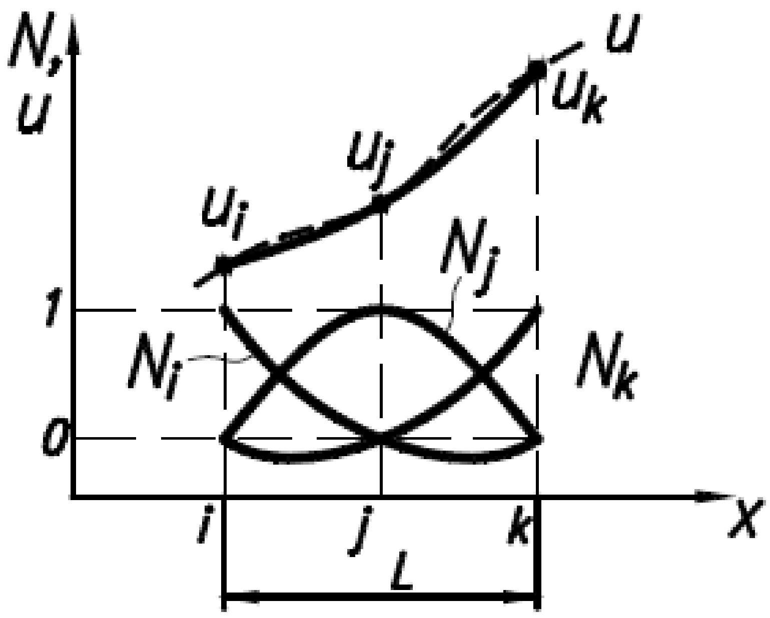
По назначению КЭ делятся на:

– элементы для анализа механики конструкций;
– элементы для анализа тепловых процессов;
– элементы для решения задач гидроаэромеханики;
– элементы для анализа электромагнитных полей;
– элементы для решения связанных задач, в которых учитывается взаимовлияние результатов двух и более видов анализа.
– др.

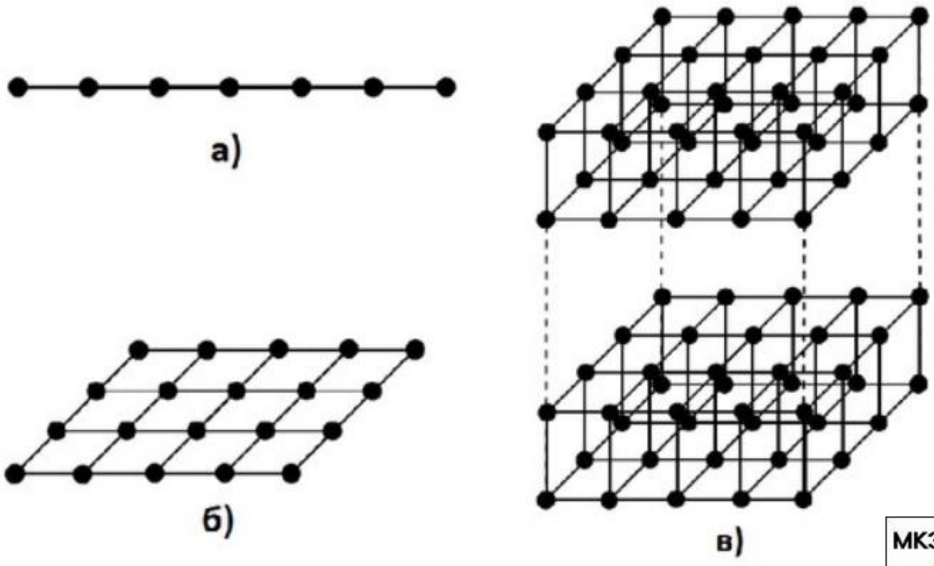
4.3.3. Метод конечных элементов (МКЭ)

По виду функций формы элемента КЭ могут быть линейными (т. е. функции формы являются кусочно-линейными – см. рис. 4.8) и нелинейными (т. е. функции формы являются либо квадратичной, либо кубической параболой – рис. 4.9). Такие элементы содержат промежуточные узлы. Нелинейные элементы позволяют получать более достоверные результаты при той же плотности разбиения.

Разделение КЭ ***по форме и геометрической размерности*** решаемых с их помощью задач приведено в табл. 4.1.

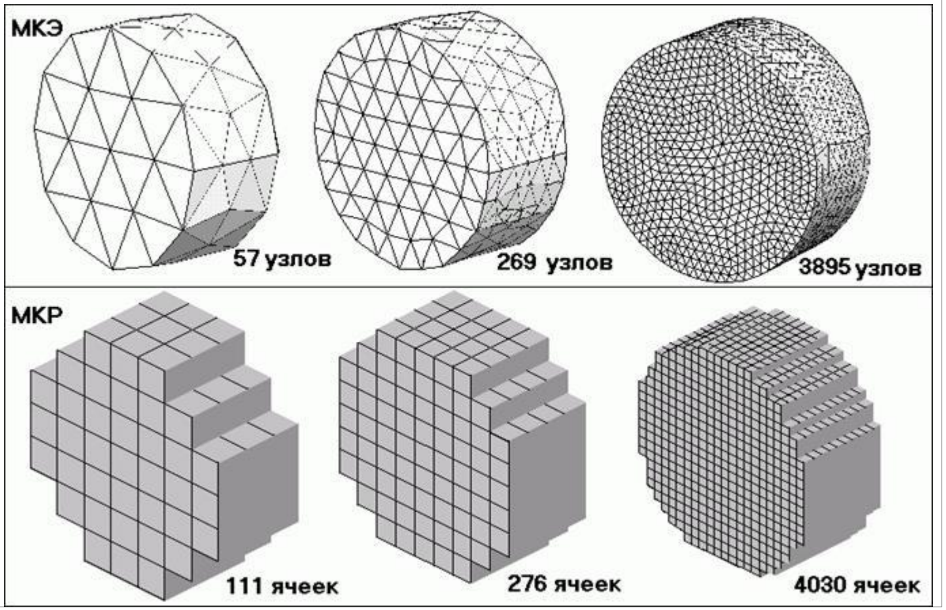


4.3.3. Метод конечных элементов (МКЭ)



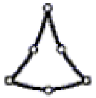
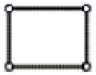
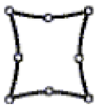
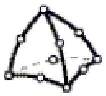
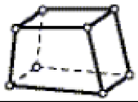
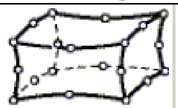
Дискретные модели элементов системы
а) одномерные; б) двумерные; в) трехмерные

МКР



4.3.3. Метод конечных элементов (МКЭ)

Таблица 4.1. Некоторые типы КЭ

Типы элементов	Графическое представление	Кол-во узлов	Размерность пространства
Балка, стержень		2	2D, 3D
		3	2D, 3D
Треугольные элементы		3	2D, 3D
		6	2D, 3D
Квадратные элементы		4	2D, 3D
		8	2D, 3D
Тэтраэдальные элементы		4	3D
		10	3D
Гексаэдральные элементы		8	3D
		20	3D

4.3.3. Метод конечных элементов (МКЭ)

Основные принципы работы с программами анализа МКЭ

Работа с современными программными комплексами анализа по методу конечных элементов состоит из трех основных этапов (рис. 4.10): 1) предварительная подготовка (препроцессорная подготовка); 2) получение решения; 3) обработка результатов моделирования (постпроцессорная обработка).

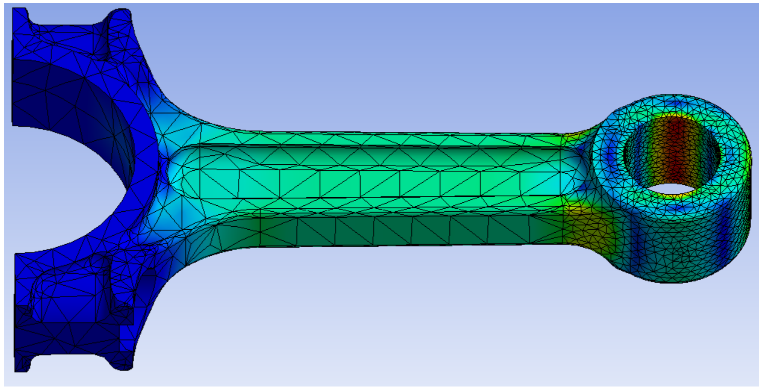
4.3.3. Метод конечных элементов (МКЭ)

Среди задач, которые инженер решает на первом этапе, можно выделить ***создание модели изделия, создание сеточной модели, контроль качества сеточной модели и ее модификацию, определение данных и ограничений*** и др.

Типы моделей. В инженерном анализе различают три типа моделей: ***геометрическую***, ***расчетную и сеточную***.

Геометрическая модель обычно представляет собой модель машиностроительного изделия в целом или его детали.

Расчетная модель - это упрощенная геометрическая модель, которая используется для анализа. Упрощение или идеализация геометрической модели достигается путем удаления тех ее элементов, которые несущественно влияют на результаты анализа.



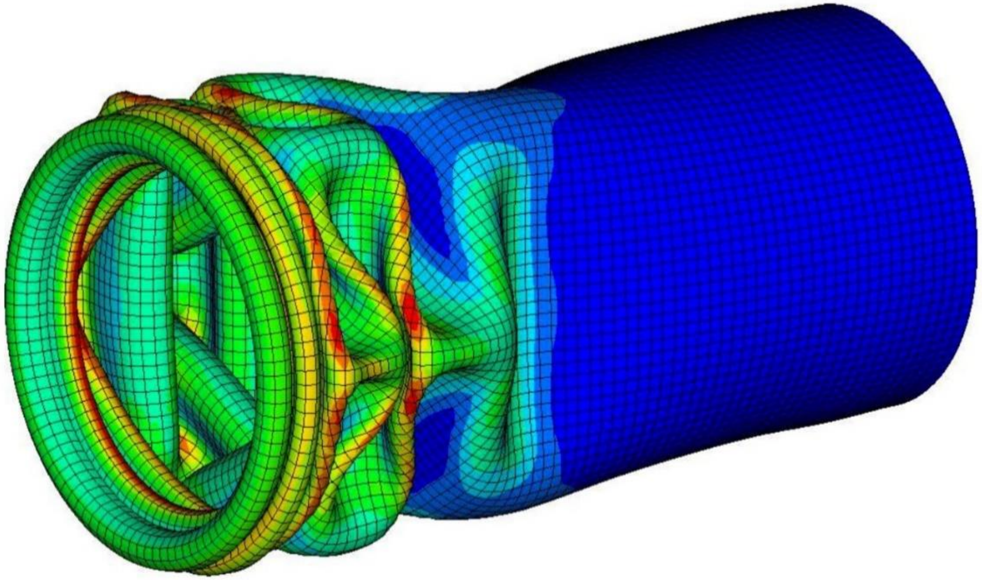
4.3.3. Метод конечных элементов (МКЭ)

Сеточная модель представляет собой совокупность узлов и элементов, которая натягивается на расчетную модель. Обычно геометрическая и расчетная модели создаются на этапе конструирования средствами твердотельного и поверхностного моделирования. Построение сеточной модели осуществляется в пакетах МКЭ в автоматическом или полуавтоматическом режиме. От того, насколько правильно расчетная модель разбита на элементы, во многом зависит правильность получаемых результатов. Поэтому в универсальных программах анализа заложены широкие возможности ***оценки качества сеточных моделей*** и широкий спектр методов их модификаций.

Определение данных и ограничений. Исходные данные анализа, введенные на этапе
предварительной подготовки, становятся частью базы данных пакета. Содержанием базы данных являются множества типов элементов, свойств материала, параметров узлов, нагрузок и др.

4.3.3. Метод конечных элементов (МКЭ)

Для описания свойств материала изделия используются параметры, необходимые для выполнения требуемого вида анализа. Так, в прочностном анализе учитываются ***модуль упругости (модуль Юнга), коэффициент теплового расширения при заданной темпуратуре, коэффициент Пуассона, плотность, коэффициент трения, модуль сдвига, коэффициент внутреннего трения***. Необходимые параметры материалов содержатся в соответствующих библиотеках. Свойства могут быть постоянными, нелинейными или зависеть от температуры. Списки существующих материалов в базе данных могут быть дополнены новыми материалами.



4.3.3. Метод конечных элементов (МКЭ)

В начале ***этапа получения решения*** пользователь настраивает решатель на выполнение конкретного варианта расчета. При этом можно выбрать тип решателя, метод решения, стратегию распределения памяти и т.д. После завершения проверки данных анализа запускается процесс вычисления, который требует больших затрат компьютерного времени.

После окончания расчета инженер переходит к ***этапу постпроцессорной обработки*** результатов. На этом этапе производится визуализация (в том числе анимация) результатов расчета. Возможно группирование полученных результатов с последующим их со-хранением в отдельном файле.