Вместо того, чтобы всё это сделать у доски, сижу удобно за столом. Да здравствует карантин!

Пример выполнения 2-го Д.З. „Приближённые методы..."

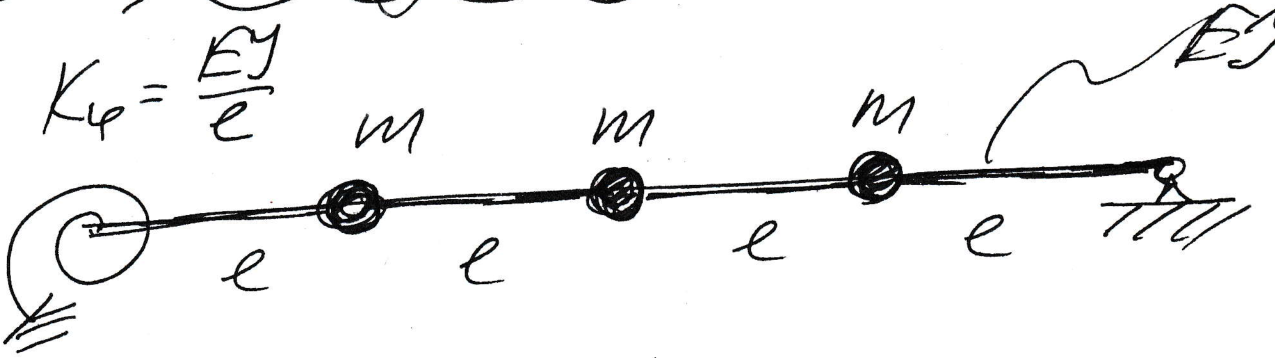
Досконально выполнили сами приближённые вычисления. Что касается точного метода (п. 3 и п. 4), то предлагаю варианты:

а). сделать всё "руками", как мы делали на семинарах с 2 степенями свободы.

б). подвести всё в матричной форме для использования стандартной процедуры eig в MATLAB.

Оба варианта принимаются.

1. Метод Рэлея



<u>Замечание</u>: рекомендую вместо того, чтобы задаваться формой оси $y(z)$ и пользоваться ф-лой

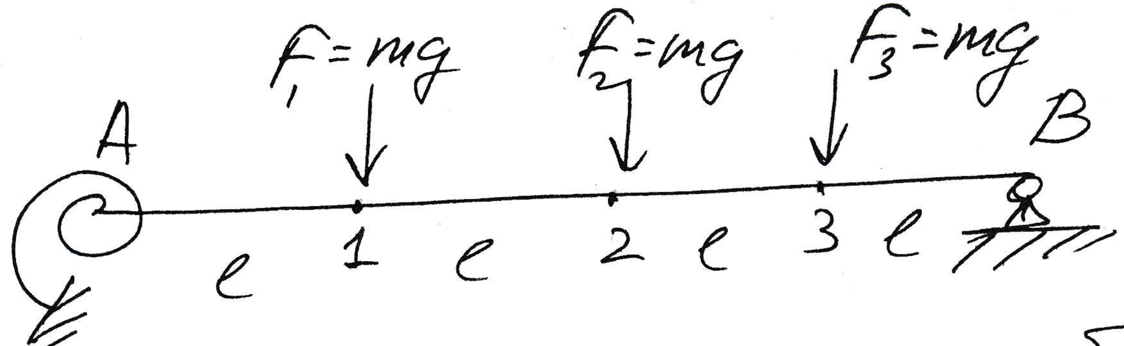
$$p^2 = \frac{\int_0^{4l} EJ (y'')^2 dz}{\sum_{i=1}^{3} m_i y_i^2}$$

приложить силы $F_i = m_i g$ к массам, найти от них соответствующие прогибы y_1, y_2, y_3 и применить ф-лу

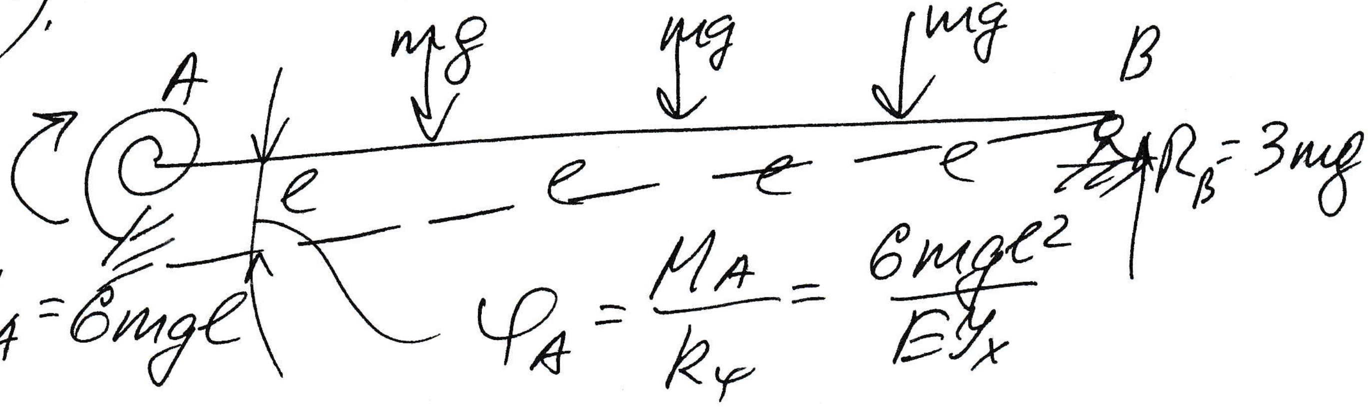
$$p^2 = \frac{\sum_{i=1}^{3} m_i g y_i}{\sum_{i=1}^{3} m_i y_i^2},$$

Итак, делай, как я.

3.



а) абсолютно жесткий брус.



$M_A = 6mgl$

$$\varphi_A = \frac{M_A}{K_\varphi} = \frac{6mgl^2}{EJ_x}$$

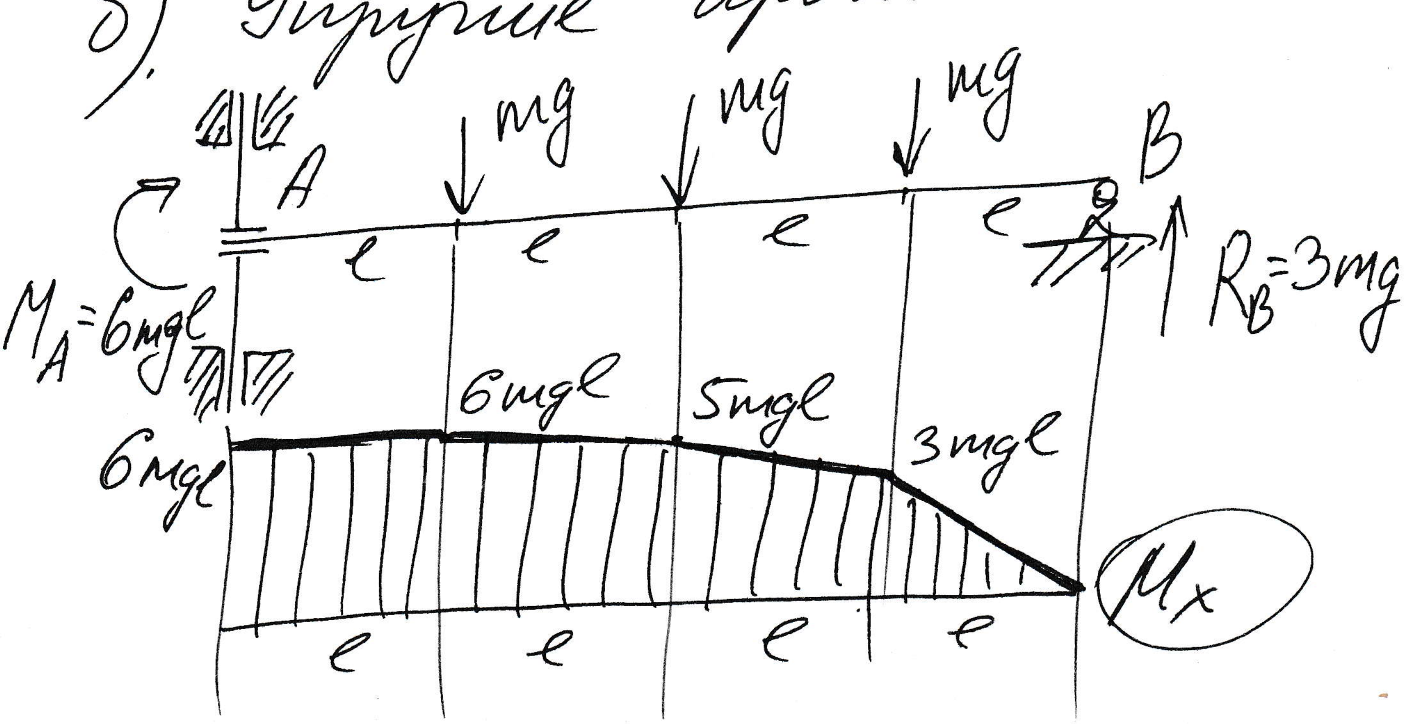
Соответственно

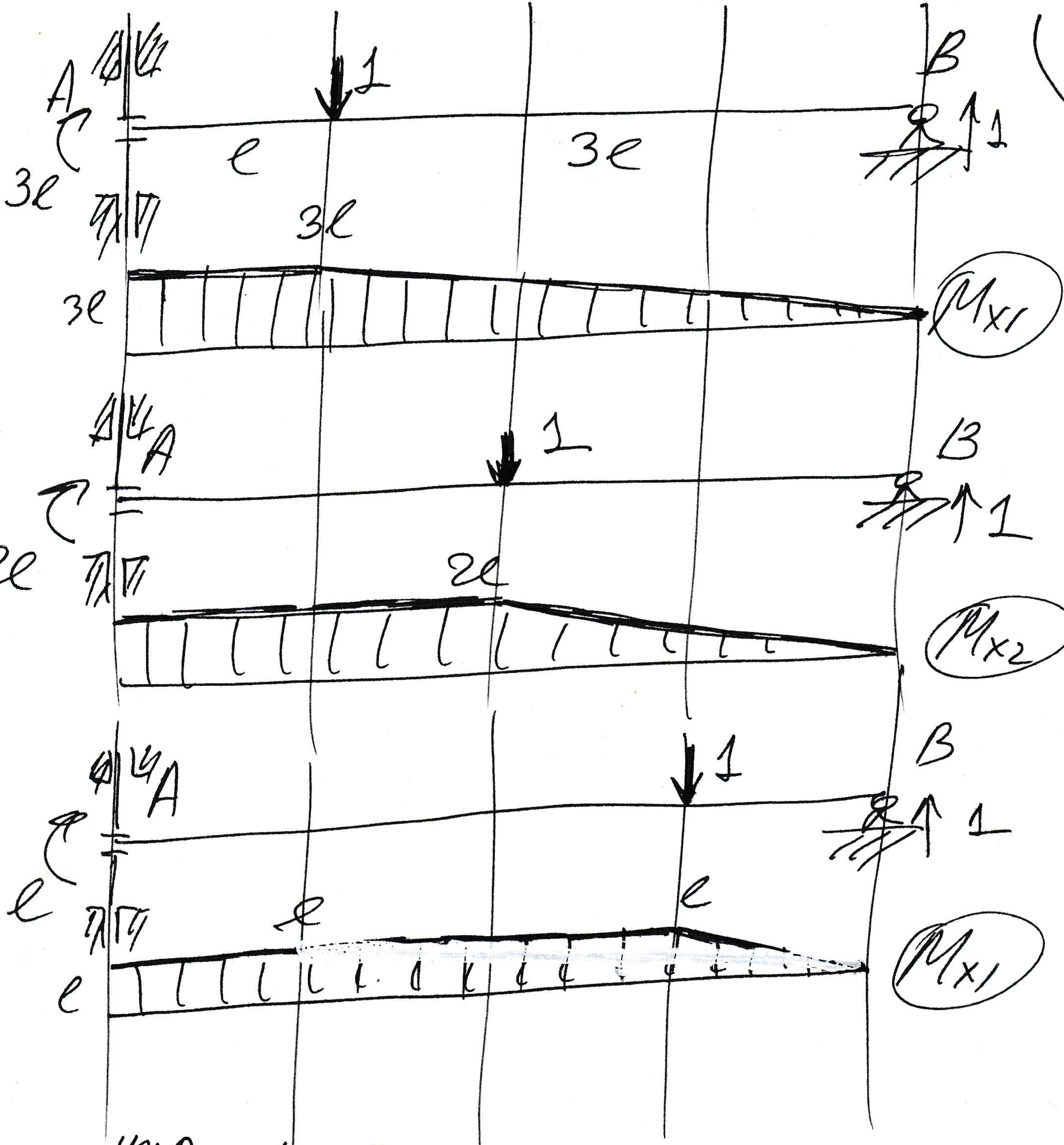
$$y_1^m = \varphi_A \cdot 3l = \frac{18mgl^3}{EJ_x};$$

$$y_2^m = \varphi_A \cdot 2l = \frac{12mgl^3}{EJ_x};$$

$$y_3^m = \varphi_A \cdot l = \frac{6mgl^3}{EJ_x};$$

б) Упругие прогибы балки.





$$y_1^{упр} = \frac{1}{EJ_x}\left[6mgl^2 \cdot 3l + \frac{1}{2}mgl^2 \cdot \frac{8}{3}l + 5mgl^2 \cdot \frac{5}{2}l + \frac{1}{2}2mgl^2 \cdot \frac{5}{3}l + 3mgl^2 \cdot \frac{3}{2}l + \frac{1}{2}3mgl^2 \cdot \frac{2}{3}l\right] =$$

$$= \frac{39\,mgl^3}{EJ_x};$$

Вы, конечно, считать будете по Симпсону.

$$y_2^{упр} = \frac{1}{EJ_x}\left[6mgl^2\cdot 2l + \frac{6mgl+5mgl}{2}\cdot l\cdot 2l + \frac{1}{2}2mgl^2\cdot\frac{5}{3}l + 3mgl^2\cdot\frac{3}{2}l + \frac{1}{2}3mgl^2\cdot\frac{2}{3}l\right] =$$

$$= \frac{181}{6}\frac{mgl^3}{EJ_x};$$

$$y_3^{упр} = \frac{1}{EJ_x}\left[6mgl^2\cdot l + \frac{6mgl+5mgl}{2}\cdot l\cdot l + \frac{5mgl+3mgl}{2}\cdot l\cdot l + \frac{1}{2}3mgl^2\cdot\frac{2}{3}l\right] =$$

$$= \frac{mgl^3}{EJ_x}\left[6 + \underset{5,5}{\frac{11}{2}} + 4 + 1\right] = 16,5\frac{mgl^3}{EJ_x};$$

Окончательно

$$y_1 = y_1^{и} + y_1^{упр} = \frac{18mgl^3}{EJ_x} + \frac{39mgl^3}{EJ_x} = \frac{57mgl^3}{EJ_x}$$

$$y_2 = y_2^{и} + y_2^{упр} = \frac{12mgl^3}{EJ_x} + \frac{181}{6}\frac{mgl^3}{EJ_x} = \frac{253}{6}\frac{mgl^3}{EJ_x} = 42,167\frac{mgl^3}{EJ_x}$$

$$y_3 = y_3^{и} + y_3^{упр} = \frac{6mgl^3}{EJ_x} + \frac{16,5mgl^3}{EJ_x} = 22,5\frac{mgl^3}{EJ_x}$$

По ф-ле Рэлея

$$p_1^2 = \frac{mg\cdot\frac{57mgl^3}{EJ_x} + mg\frac{42{,}167mgl^3}{EJ_x} + \frac{22{,}5mgl^3}{EJ_x}mg}{m\left(\frac{57mgl^3}{EJ_x}\right)^2 + m\left(42{,}167\frac{mgl^3}{EJ_x}\right)^2 + m\left(\frac{22{,}5mgl^3}{EJ_x}\right)^2}$$

$$= \frac{m^2g^2l^3(EJ_x)^2(57+42{,}167+22{,}5)}{EJ_x\, m^3g^2l^6(57^2+42{,}167^2+22{,}5^2)} =$$

$$= \frac{121{,}667}{5533{,}278}\frac{EJ_x}{ml^3} \cong 0{,}022\frac{EJ_x}{ml^3};$$

Ответ:

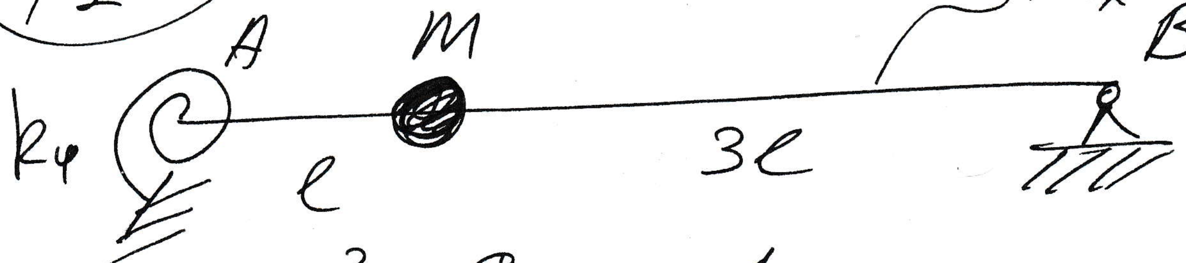
$$p_1 \approx 0{,}148\sqrt{\frac{EJ_x}{ml^3}};$$

2. Метод Донкерлея.

$$\frac{1}{p_1^2} = \frac{1}{\tilde{p}_1^2} + \frac{1}{\tilde{p}_2^2} + \frac{1}{\tilde{p}_3^2},$$

где $\tilde{p}_i$ – собственная частота одномассовой системы, в которой убраны все массы, кроме i-ой.

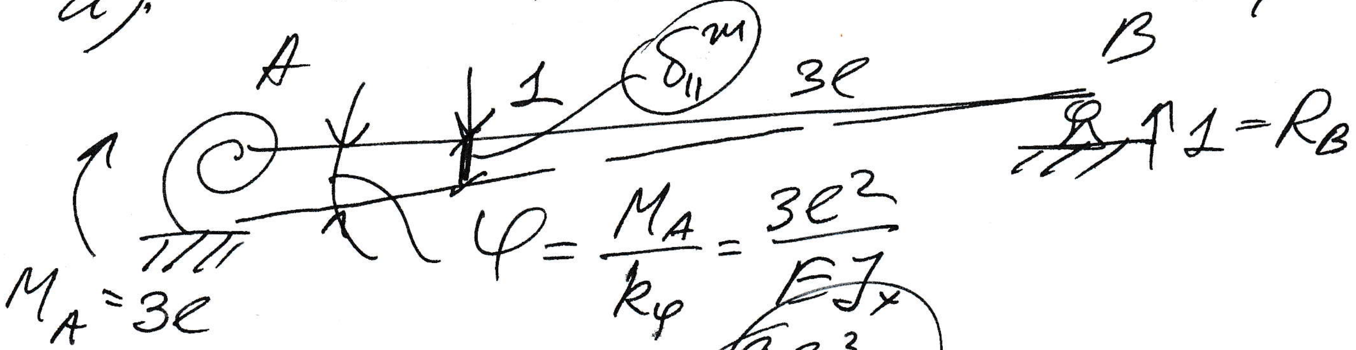
$\tilde{p}_1^2$:



$$\tilde{p}_1^2 = \frac{c}{m} = \frac{1}{m\delta_{11}},\ \text{где}$$

$$\delta_{11} = \delta_{11}^{ж} + \delta_{11}^{упр.}$$

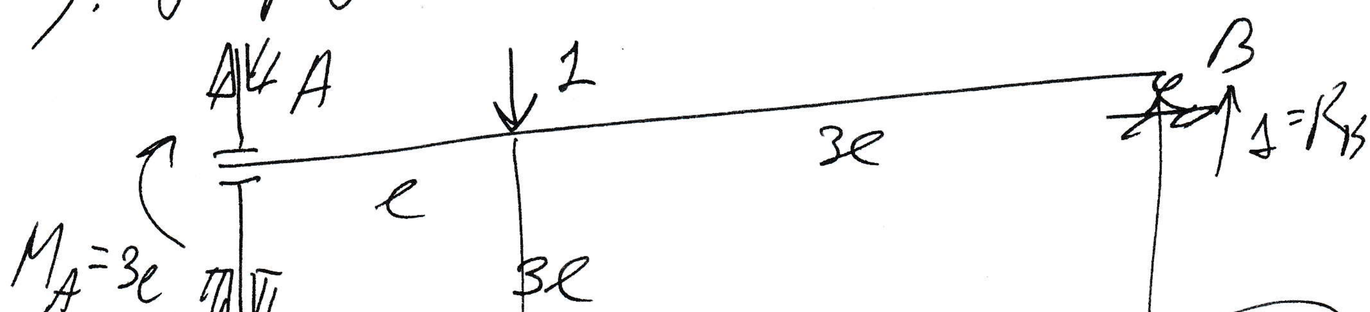
а). абсолютно жесткий брус.



$$\varphi = \frac{M_A}{k_\varphi} = \frac{3l^2}{EJ_x}$$

$$\delta_{11}^{ж} = \varphi \cdot 3l = \frac{9l^3}{EJ_x},$$

б). упругий прогиб балки



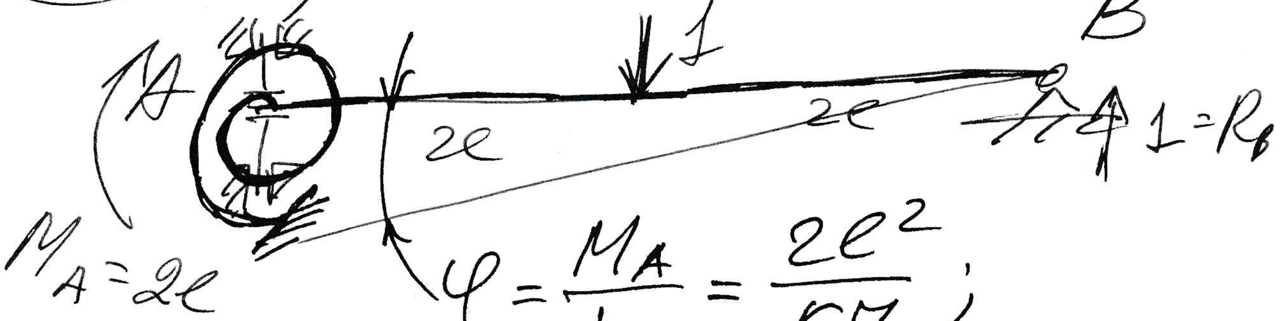
$$\delta_{11}^{упр} = \frac{1}{EJ_x}\left[3l^2 \cdot 3l + \frac{1}{2} 3l \cdot 3l \cdot \frac{2}{3} 3l\right] = \frac{18l^3}{EJ_x},$$

Итого $\delta_{11} = \frac{27l^3}{EJ_x}$

Таким образом,

$$\tilde{p}_1^2 = \frac{1}{27}\frac{EJ_x}{m\ell^3};$$

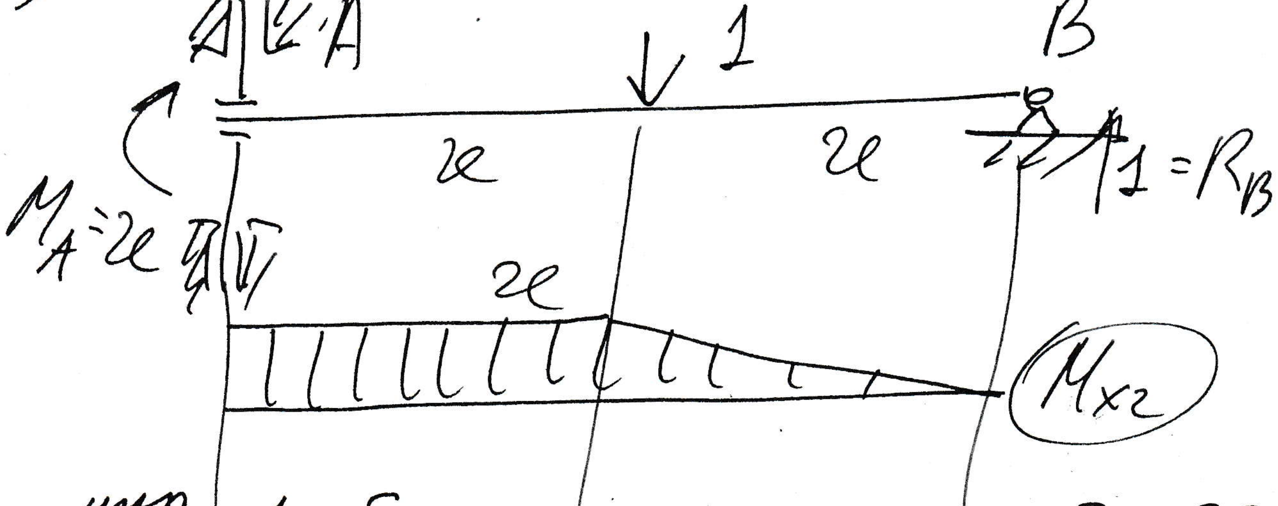
$\tilde{p}_2^2$: а) абсолютно жесткий брус:



$$\varphi = \frac{M_A}{k_\varphi} = \frac{2\ell^2}{EJ_x};$$

$$\delta_{22}^{m} = \varphi \cdot 2\ell = \frac{4\ell^3}{EJ_x};$$

б) упругий прогиб балки:



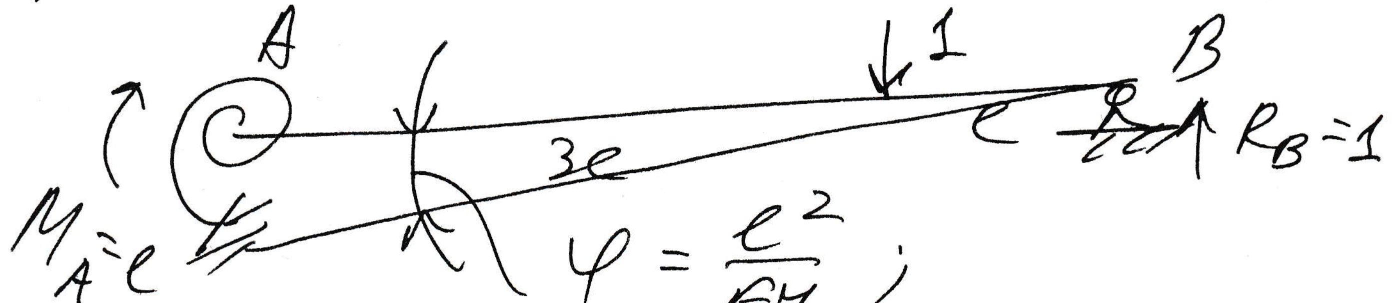
$$\delta_{22}^{упр} = \frac{1}{EJ_x}\left[2\ell \cdot 2\ell \cdot 2\ell + \frac{1}{2} 2\ell \cdot 2\ell \cdot \frac{2}{3} 2\ell\right] = \frac{32\ell^3}{3EJ_x}$$

$$\delta_{22} = \left(4 + \frac{32}{3}\right)\frac{\ell^3}{EJ_x} = \frac{44}{3}\frac{\ell^3}{EJ_x}$$

$$\tilde{p}_2^2 = \frac{3}{44}\frac{EJ_x}{m\ell^3}$$

$$p_3^2 = \frac{1}{m\delta_{33}};$$

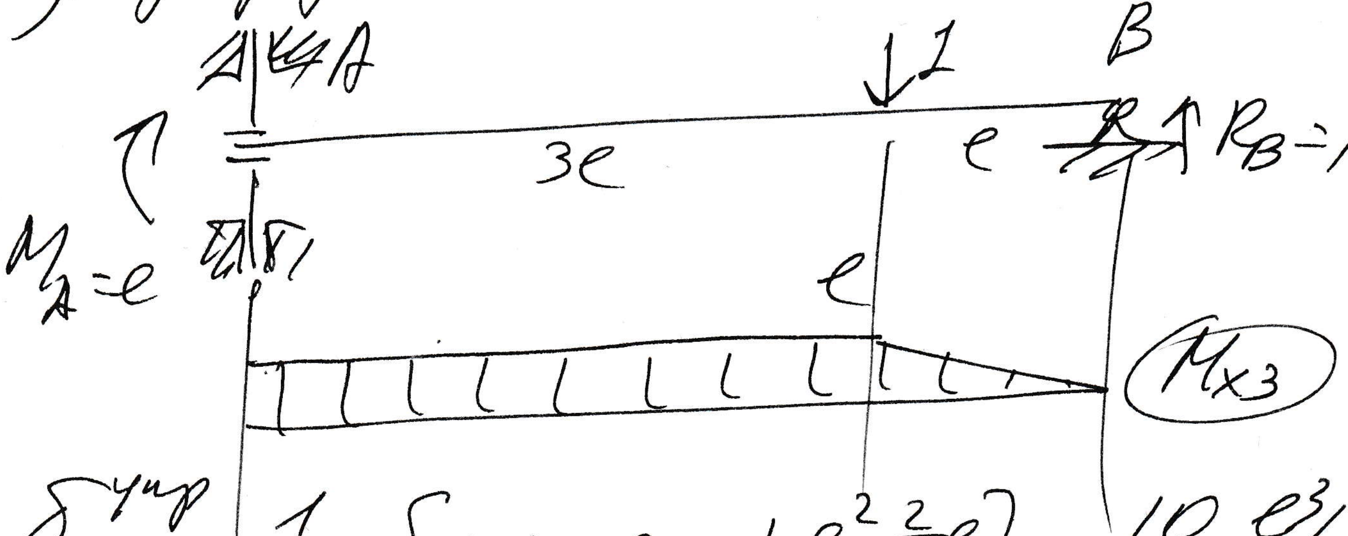
а). абсолютно жёсткий брус.



$$\varphi = \frac{l^2}{EJ_x};$$

$$\delta_{33}^{м} = \varphi \cdot l = l^3/EJ_x;$$

б). упругий прогиб балки



$$\delta_{33}^{упр} = \frac{1}{EJ_x}\left[l \cdot 3l \cdot l + \frac{1}{2} l^2 \cdot \frac{2}{3} l\right] = \frac{10}{3} l^3/EJ_x$$

$$\delta_{33} = \frac{l^3}{EJ_x}\left[1 + \frac{10}{3}\right] = \frac{13}{3}\frac{l^3}{EJ_x};$$

$$p_3^2 = \frac{3}{13}\frac{EJ_x}{ml^3}$$

По формуле Донкерлея

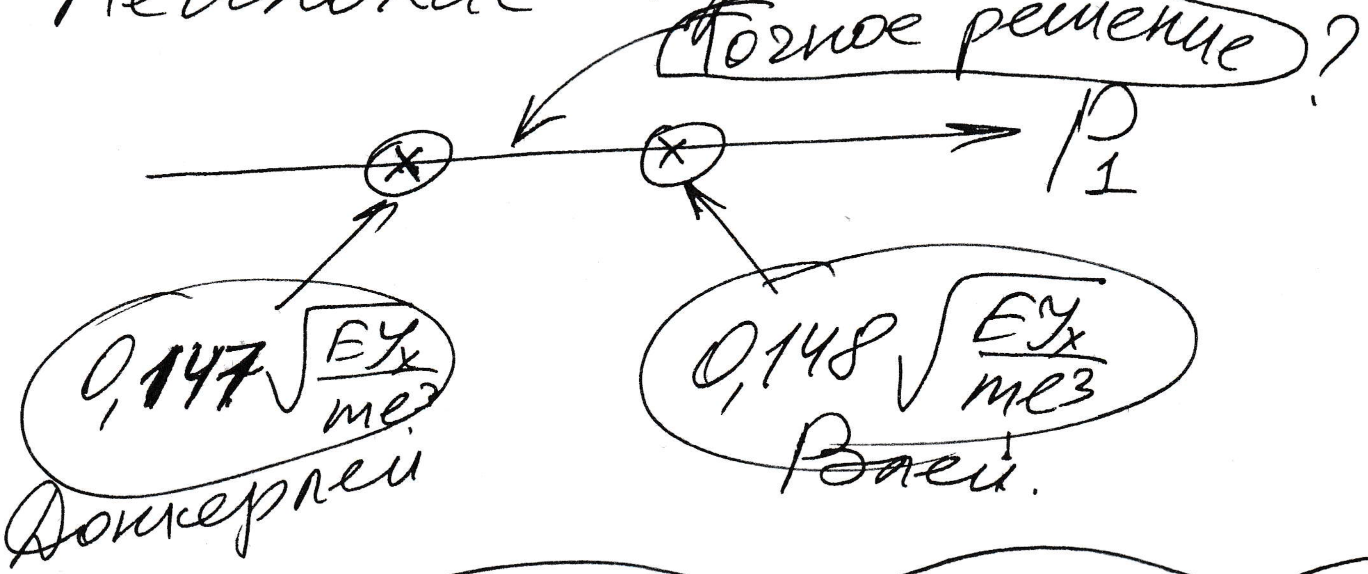
$$\frac{1}{p_1^2} = \frac{ml^3}{EJ_x}\left[27 + \frac{44}{3} + \frac{13}{3}\right] = \frac{46ml^3}{EJ_x};$$

Окончательно,

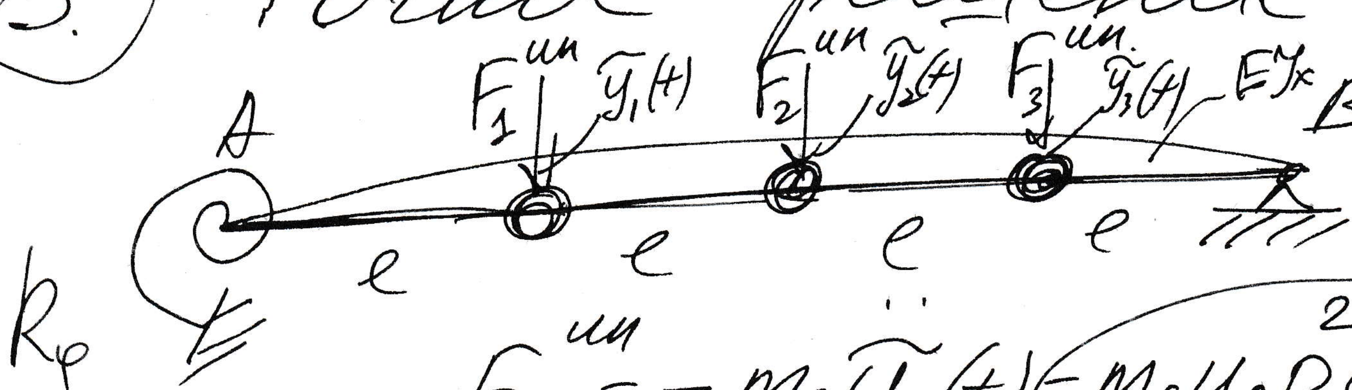
$$p_1^2 = \frac{EJ_x}{46\, m\ell^3} = 0{,}0217\,\frac{EJ_x}{m\ell^3};$$

$$p_1 \approx 0{,}147\sqrt{\frac{EJ_x}{m\ell^3}};$$

Неплохие "приближение"!



3. Точное решение



$$F_i^{ин} = -m_i\ddot{y}_i(t) = m_i y_i p^2 \cos pt$$

$y_i(t) = y_i \cos pt$

Запишем по принципу Д'Аламбера уравнение для прогиба под каждой массой:

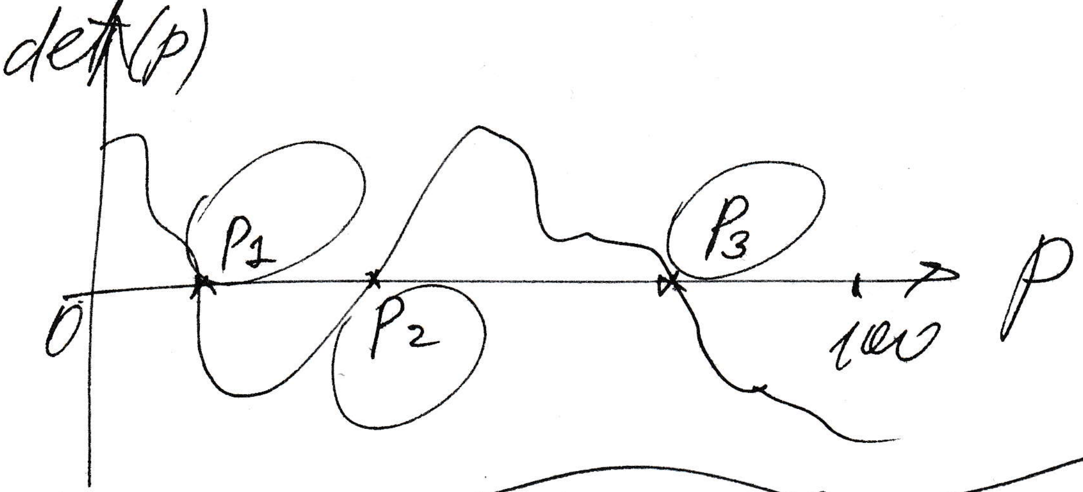
$$\begin{cases} y_1 = \delta_{11} F_1^{ин} + \delta_{12} F_2^{ин} + \delta_{13} F_3^{ин} \\ y_2 = \delta_{21} F_1^{ин} + \delta_{22} F_2^{ин} + \delta_{23} F_3^{ин} \\ y_3 = \delta_{31} F_1^{ин} + \delta_{32} F_2^{ин} + \delta_{33} F_3^{ин} \end{cases}$$

Подставляем $F_i^{ин}$ и переносим влево: ($\cos pt$ везде сократим).

$$\begin{cases} y_1(1-\delta_{11}m_1p^2) - \delta_{12}m_2y_2p^2 - \delta_{13}m_3p^2y_3 = 0 \\ -\delta_{21}m_1p^2y_1 + (1-\delta_{22}m_2p^2)y_2 - \delta_{23}m_3p^2y_3 = 0 \\ -\delta_{31}m_1p^2y_1 - \delta_{32}m_2p^2y_2 + (1-\delta_{33}m_3p^2)y_3 = 0 \end{cases}$$

Частотное ур-ние $\to \boxed{\det(p) = 0}$

$$\det(p) = \begin{vmatrix} (1-\delta_{11}m_1p^2) & -m_2\delta_{12}p^2 & -m_3\delta_{13}p^2 \\ -\delta_{21}m_1p^2 & (1-\delta_{22}m_2p^2) & -\delta_{23}m_3p^2 \\ -\delta_{31}m_1p^2 & -\delta_{32}m_2p^2 & (1-\delta_{33}m_3p^2) \end{vmatrix} = 0$$



Каждая податливость конечно

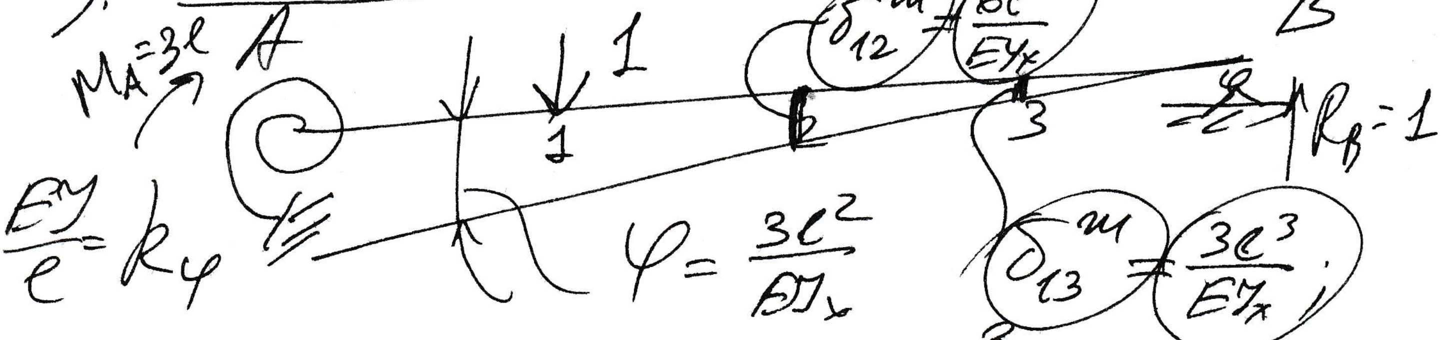
$$\delta_{ij} = \delta_{ij}^{ж} + \delta_{ij}^{упр}.$$

Это значит, что δ_{11}, δ_{22} и δ_{33} уже вычислены в разделе (2.) Метод Данкерлея.

Не хватает $\delta_{12}=\delta_{21}$, $\delta_{23}=\delta_{32}$ и $\delta_{13}=\delta_{31}$.

Например $\boxed{\delta_{12}=\delta_{21}}$:

а). абсолютно жесткий брус.

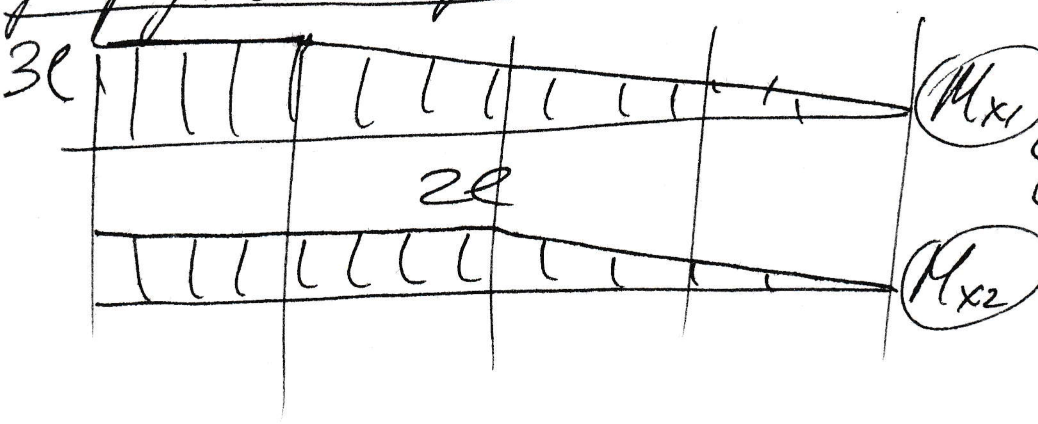


$\delta_{12}^{ж} = \frac{6l^3}{EJ_x}$

$\varphi = \frac{3l^2}{EJ_x}$

$\delta_{13}^{ж} = \frac{3l^3}{EJ_x}$ заодно.

б). упругий прогиб



$\delta_{12}^{упр} = \frac{41}{3}\frac{l^3}{EJ_x}$

Итого: $\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{\ell^3}{EY_x}\left[6 + \frac{41}{3}\right] = \frac{59}{3}\frac{\ell^3}{EY_x}$

и так далее.

③ Точное решение для любителей $\boxed{MATLAB}$:

Ур-ние в матричной форме:

Дифф. ур-ние $\rightarrow \bar{Y} + F \cdot M \cdot \ddot{\bar{Y}} = 0$, где

$$\bar{Y}(t) = \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{Bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix}$$ Матрица податливостей

$C = F^{-1}$ матрица жесткостей $\quad M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}$ Матрица масс.

$\underline{y_i(t) = y_i \cos pt}$ подставляем и на $\cos pt$ сокращаем.

$$(C - Mp^2)\bar{Y} = 0 \leftarrow$$ Теперь это алгебраич. ур-ние

Домножаем слева на M^{-1}

$$(\underbrace{M^{-1}C}_{} - p^2E)\bar{Y} = 0 \leftarrow$$ всё подготовлено для подстановки в eig

$K = M^{-1}C$

Матлаб ищет собственные числа и собств. векторы матрицы K