

ISSN 0869-7566

**2'2008**

**СТИН**

**СТАНКИ И ИНСТРУМЕНТ**

Учредитель ООО «СТИН»

Журнал входит в перечень утвержденных ВАК РФ изданий  
для публикации трудов соискателей ученых степеней

### СОДЕРЖАНИЕ

#### МЕТАЛЛОРЕЖУЩИЕ СТАНКИ

- Тугенгольд А. К.,  
Лукьянов Е. А.,  
Ремизов Э. В.,  
Коротков О. Е.      Интеллектуальное управление  
технологическими системами . . . . . 2
- Ямников А. С.,  
Шейнин Г. М.,  
Бобков М. Н.      Шлифование круговых зубьев цилиндрических колес  
с планетарным движением оси чашечного круга . . . . . 8
- Коднянко В. А.,  
Секацкий В. С.      Динамика кругового газостатического подпятника  
с микроканавкой и внутренней ступенью. . . . . 12

#### МЕТАЛЛООБРАБАТЫВАЮЩИЙ ИНСТРУМЕНТ

- Позняк Г. Г.,  
Рогов В. А.,  
Соловьев В. В.,  
Алаа Абдулах      Расчет жесткости и частоты собственных колебаний  
державок токарных резцов . . . . . 17
- Акимов А. А.      Патентный поиск при проектировании  
режущего инструмента . . . . . 19
- Барац Я. И.,  
Тихонов Д. А.,  
Двойнев А. Г.      Станок-полуавтомат для заточки  
алмазных выглаживающих инструментов . . . . . 22

#### ТЕХНОЛОГИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ

- Грубый С. В.      Оптимизация режимов  
одноинструментной лезвийной обработки. . . . . 24
- Безъязычный В. Ф.,  
Волков С. А.,  
Фоменко Р. Н.      Техничко-экономическое обоснование  
технологии обработки елочных пазов дисков ГТД . . . . . 27
- Мальцев В. Г.,  
Моргунов А. П.      Расчет профилей сечений  
при точении наружных поверхностей вращения . . . . . 32
- Свирщёв В. И.,  
Вольнов Д. Н.,  
Крохин А. Н.      Способ снижения шероховатости поверхностей  
на операциях шлифования . . . . . 37

#### ПРАКТИКА ЗАВОДОВ, ИНСТИТУТОВ, КБ

- Козерук А. С.,  
Сухоцкий А. А.,  
Климович В. Ф.,  
Филонов И. П.      Одновременная двусторонняя обработка  
линз с тонким центром . . . . . 39

## Оптимизация режимов одноинструментной лезвийной обработки\*

д.т.н. С. В. Грубый

Общая задача математического программирования с нелинейной целевой функцией (8) и нелинейными ограничениями (9) является оптимизационной задачей нелинейного программирования (НЛП), методы решения которой выбирают в зависимости от числа переменных и вида уравнений. В простейшем случае такая задача содержит только ограничения в виде равенств, и для ее решения можно использовать метод множителей Лагранжа. При этом задача с ограничениями преобразуется в эквивалентную задачу безусловной оптимизации, где фигурируют дополнительные неизвестные параметры, называемые множителями Лагранжа.

Рассмотрим минимизацию себестоимости с ограничением по заданной шероховатости  $R_{z\text{зд}}$  (в мкм) обработанной поверхности:  $S(v, s) \rightarrow \min$ ;  $R_z(v, s) = R_{z\text{зд}}$ . Тогда функция себестоимости преобразуется в функцию Лагранжа:

$$L(v, s, \lambda) = S(v, s) + \lambda[R_z(v, s) - R_{z\text{зд}}] \rightarrow \min, \quad (15)$$

где  $\lambda$  — множитель Лагранжа.

Оптимальное решение должно обеспечивать минимум целевой функции и одновременно равенство технологического ограничения заданному значению, что приводит к системе трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\left. \begin{aligned} \partial L(v, s, \lambda) / \partial v &= 0; & \partial L(v, s, \lambda) / \partial s &= 0; \\ R_z(v, s) - R_{z\text{зд}} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

В качестве **примера** рассмотрим задачу минимизации себестоимости обработки на операции точения с приведенными выше условиями и  $R_{z\text{зд}} = 40$  мкм. Уравнение шероховатости задано полиномиальным уравнением (6); износ резца принят постоянным  $h_3 = 0,6$  мм. Для решения системы нелинейных уравнений (16) использована функция MATLAB *fsolve*.

Обращение к этой функции имеет вид  $[\vec{X}, \vec{f}] = \text{fsolve}(@\text{funsc}, [3; 0,2; 0,5])$ , где функция пользователя *funsc* сформирована как вектор-столбец из со-

ответствующих функций системы (16); в квадратных скобках записаны координаты начальной точки ( $v = 3$  м/с;  $s = 0,2$  мм/об;  $\lambda = 0,5$ ). В результате расчета получены вектор  $\vec{X}$ , содержащий координаты оптимальной точки, и вектор  $\vec{f}$ , содержащий оптимальные значения соответствующих функций системы уравнений (16).

На рис. 2 показаны линии уровня функции Лагранжа (15) и линии уровня шероховатости  $R_z = \text{const}$ . По результатам расчетов получено:  $\vec{X} = [1,41; 0,46; 0,127]$ , т. е.  $v = 1,41$  м/с;  $s = 0,46$  мм/об;  $\lambda = 0,127$ . Видно, что достигнут глобальный минимум функции Лагранжа при одновременном обеспечении заданного технологического ограничения. Результирующие показатели в оптимальной точке составили:  $S = 11,3$  руб./шт.;  $S_{\text{ст}} = 8,4$  руб./шт.;  $S_3 = 0,2$  руб./шт.;  $S_{\text{и}} = 2,7$  руб./шт.;  $T = 23,1$  мин;  $R_z = 40$  мкм.

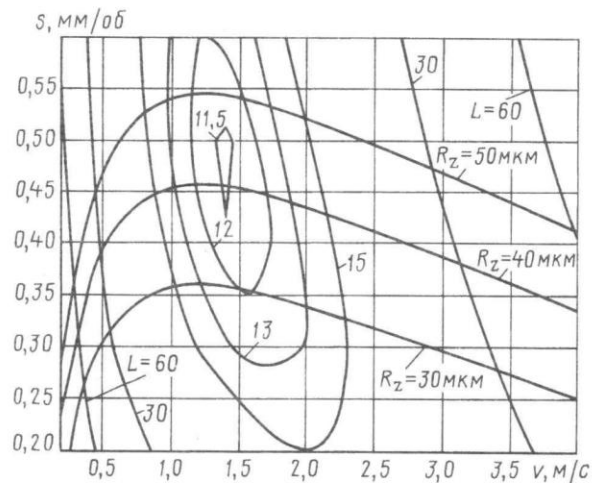


Рис. 2. Расположение линий уровня функции Лагранжа  $L$  и шероховатости  $R_z$  обработанной поверхности для точения

В приведенном примере множители Лагранжа использованы для оптимизации с ограничениями в виде равенств. Можно распространить этот подход на случай НЛП с ограничениями в виде нера-

\* Окончание. Начало см. в № 1 за 2008 г.

венств. Тогда задача НЛП может быть сформулирована в общем виде:

$$\left. \begin{aligned} f_0(\vec{X}) \rightarrow \min, \vec{X} = (x_1, x_2, \dots)^T \in \Omega; \\ g_1(\vec{X}) \geq 0, \dots, g_j(\vec{X}) \geq 0, j = 1, 2, \dots, J; \\ q_1(\vec{X}) = 0, \dots, q_i(\vec{X}) = 0, i = 1, 2, \dots, I, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

где  $g_j$  и  $q_i$  — некоторые функции;  $J$  неравенств и  $I$  равенств образуют систему технологических ограничений.

Исходя из предположения о дифференцируемости функций сформулированы условия оптимальности для задачи (17) в виде некоторой системы равенств и неравенств, известных как условия Куна—Таккера<sup>1</sup>.

Представим рассмотренный выше пример оптимизации параметров режима точения заготовки из стали 12Х18Н10Т сборными резцами с СМП из твердого сплава ВК8 как задачу НЛП (17). В качестве целевой функции использована функция себестоимости (12), а в качестве ограничений — шероховатость обработанной поверхности, мощность на шпинделе станка и минимальное значение подачи. Тогда условия Куна—Таккера будут иметь вид

$$\begin{aligned} S(v, s) \rightarrow \min; \quad g_1(v, s) = R_{\tau \text{зд}} - R_{\tau}(v, s) \geq 0; \\ g_2(v, s) = N_{\text{зд}} - N(v, s) \geq 0; \quad g_3(v, s) = s - s_{\min} \geq 0, \end{aligned}$$

где  $N_{\text{зд}}$  — заданная мощность, кВт.

Условия Куна—Таккера в координатной форме преобразуются в систему пяти уравнений с пятью неизвестными  $v, s, u_1, u_2, u_3$  (здесь  $u_1-u_3$  — переменные, на которые наложены дополнительные условия неотрицательности):

$$\left. \begin{aligned} F_1 = \partial S / \partial v - u_1(\partial g_1 / \partial v) - u_2(\partial g_2 / \partial v) = 0; \\ F_2 = \partial S / \partial s - u_1(\partial g_1 / \partial s) - u_2(\partial g_2 / \partial s) - u_3 = 0; \\ F_3 = u_1 g_1 = 0; \quad F_4 = u_2 g_2 = 0; \quad F_5 = u_3 g_3 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Решение системы уравнений (18) найдено с использованием функции MATLAB *fsolve* в следующем виде:  $[\vec{X}, \vec{f}] = \text{fsolve}(@\text{funvsp}, [3; 0,4; 0,1; 0,1; 0,1])$ . Здесь среди аргументов есть функция пользователя *funvsp*, образующая вектор из функций  $F_1-F_5$ , а в квадратных скобках записаны координаты начальной точки ( $v = 3$  м/с;  $s = 0,4$  мм/об;  $u_1 = u_2 = u_3 = 0,1$ ).

<sup>1</sup> Аггетков А. В., Галкин С. В., Зарубин В. С. Методы оптимизации: Учеб. для вузов / Под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2001. — 440 с.

В результате расчета получен вектор, содержащий координаты оптимальной точки:  $\vec{X} = [1,54; 0,37; 0,16; 0,0001; 0,03]$ . Таким образом, результирующие показатели составили:  $S(1,54; 0,37) = 12,71$  руб./шт.;  $S_{\text{ст}} = 9,56$  руб./шт.;  $S_{\text{э}} = 0,22$  руб./шт.;  $S_{\text{ш}} = 2,9$  руб./шт.;  $T = 24$  мин;  $R_{\tau} = 40$  мкм (фактическая шероховатость);  $N = 4,5$  кВт (фактическая мощность на шпинделе станка).

С увеличением числа технологических ограничений эффективными становятся **методы штрафных функций**. В этом случае решение задачи с ограничениями находят как последовательность решений вспомогательных задач безусловной минимизации штрафных функций, составленных определенным образом. Общая схема построения алгоритмов заключается в том, что минимизация функции (8) эквивалентна задаче безусловной минимизации суммы

$$f_0(\vec{X}) + \delta(\vec{X}) \rightarrow \min, \quad (19)$$

где  $\delta(\vec{X})$  — так называемая индикаторная функция:

$$\delta(\vec{X}) = \begin{cases} 0, & \text{если } \vec{X} \in \Omega; \\ +\infty, & \text{если } \vec{X} \notin \Omega. \end{cases}$$

Если множество, ограничивающее область  $\Omega$  допустимых значений, задано с помощью неравенств  $\varphi_i(\vec{X}) \geq 0; i = 1, 2, \dots, m$ , то можно построить последовательность штрафов, сходящихся к индикаторной функции по области  $\Omega$ , и неограниченно возрастающих при приближении к границе этой области.

В таком случае поиск минимума штрафной функции (19) нужно начинать с внутренней точки области  $\Omega$ , т. е. когда ограничения представляют собой строгие неравенства. Тогда траектория минимизации штрафной функции не выйдет за границы области допустимых значений (отсюда и название — метод внутренней штрафной функции).

Чаще всего используют индикаторную функцию вида  $\delta_k(\vec{X}) = r_k \sum_{i=1}^m \frac{1}{\varphi_i(\vec{X})}$ , где  $r_k$  — параметр штрафа,

представляющий собой монотонно убывающую сходящуюся к нулю последовательность положительных чисел;  $k$  — номер итерации.

Тогда общая задача НЛП (17) эквивалентна задаче безусловной минимизации:

$$\Phi(\vec{X}, r_k) = f_0(\vec{X}) + r_k \sum_{i=1}^m \frac{1}{\varphi_i(\vec{X})} \rightarrow \min; \quad \varphi_i(\vec{X}) \geq 0. \quad (20)$$

Для рассмотренной выше операции точения заготовки из стали 12X18H10T резцами с СМП из сплава ВК8 с учетом ограничений по заданной шероховатости, мощности на шпинделе и наибольшим значениям скорости и подачи уравнение (20) принимает вид

$$\Phi(v, s, r_k) = S(v, s) + r_k \left[ \frac{1}{R_{z\text{зд}} - R_z(v, s)} + \frac{1}{N_{\text{зд}} - N(v, s)} + \frac{1}{v_{\text{max}} - v} + \frac{1}{s_{\text{max}} - s} \right] \rightarrow \min, \quad (21)$$

где  $R_{z\text{зд}} = 40$  мкм;  $N_{\text{зд}} = 7,5$  кВт;  $v_{\text{max}} = 4$  м/с;  $s_{\text{max}} = 0,6$  мм/об.

Безусловная минимизация уравнения (21) может быть выполнена разными методами. Например, при реализации метода спуска выражения (14) принимают вид

$$\begin{aligned} v_{k+1} &= v_k - \alpha_v \partial \Phi(v_k, s_k, r_k) / \partial v; \\ s_{k+1} &= s_k - \alpha_s \partial \Phi(v_k, s_k, r_k) / \partial s, \end{aligned} \quad (22)$$

где для каждой  $k$ -й итерации частные производные рассчитаны численно; параметр штрафа  $r_k$  может оставаться постоянным для ряда итераций.

**Метод Ньютона** основан на итерационном процессе

$$\vec{X}_{k+1} = \vec{X}_k - H_k^{-1}(\Phi) \nabla_k(\Phi), \quad (23)$$

где вектор переменных  $\vec{X}$  изменяется на каждой итерации;  $H_k^{-1}$  — обратная матрица Гессе функции (21);  $\nabla_k$  — матрица-столбец, содержащая соответствующие частные производные.

Если представить матрицу Гессе по выражению (10), как  $H = [a_{11} \ a_{12}; a_{21} \ a_{22}]$ , и записать операцию обращения в явном виде, то выражение (23) в координатной форме примет вид

$$\begin{bmatrix} v_{k+1} \\ s_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_k \\ s_k \end{bmatrix} - \frac{1}{\det(H_k)} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}_k \cdot \begin{bmatrix} \partial \Phi / \partial v \\ \partial \Phi / \partial s \end{bmatrix}_k, \quad (24)$$

где элементы, определитель и частные производные рассчитываются на каждой итерации:

$$a_{11} = \partial^2 \Phi / \partial v^2; \quad a_{12} = a_{21} = \partial^2 \Phi / \partial v \partial s; \quad a_{22} = \partial^2 \Phi / \partial s^2.$$

Оба метода [см. выражения (22) и (24)] проиллюстрированы на рис. 3, где показаны линии уровня функции (21), построенные для следующих исходных данных:  $t = 2,5$  мм;  $h_3 = 0,8$  мм. В качестве на-

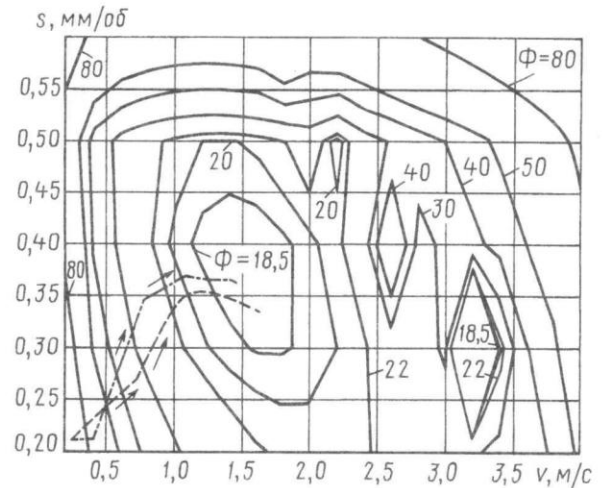


Рис. 3. Минимизация штрафной функции для точения методами спуска (штриховая линия) и Ньютона (штрихпунктирная линия)

чальной выбрана точка с координатами [0,25; 0,21]. Условием прекращения работы алгоритма является:  $\Phi(v_k, s_k) - \Phi(v_{k+1}, s_{k+1}) \leq \xi$ .

Как видно из рис. 3, оба метода характеризуются близкими траекториями и близкими оптимальными точками. Лучшие показатели по результатам оптимизации получены по методу Ньютона:  $v = 1,45$  м/с;  $s = 0,36$  мм/об;  $S = 12,9$  руб./шт.;  $T = 22,8$  мин;  $R_z = 38,9$  мкм;  $N = 4,5$  кВт.

## Выводы

1. Для оптимизации параметров режимов лезвийной обработки предложено использовать ряд методов (спуска, Ньютона, множителей Лагранжа, Куна—Таккера, штрафных функций), показавших свою эффективность для оптимизации параметров режима по критерию минимальной себестоимости с нелинейными технологическими ограничениями.

2. В качестве зависимостей для параметров процесса резания металлов могут использоваться уравнения различного вида. Рассмотренные методы оптимизации не налагают дополнительных ограничений на вид целевой функции и ограничений.

3. Предложенные подходы к оптимизации параметров режима могут быть распространены на другие критерии оптимизации и различные виды одно- и многоинструментной лезвийной обработки.