Интегрирование нормальных систем дифференциальных уравнений. **Семинар 21.** (1)

$$\begin{cases} y_1^{(p_1)}(x) = f_1(x, y_1, \dots, y_1^{(p_1-1)}, \dots, y_k, \dots, y_k^{(p_k-1)}) \\ y_2^{(p_2)}(x) = f_2(x, y_1, \dots, y_1^{(p_1-1)}, \dots, y_k, \dots, y_k^{(p_k-1)}) \\ \dots \\ y_k^{(p_k)}(x) = f_k(x, y_1, \dots, y_1^{(p_1-1)}, \dots, y_k, \dots, y_k^{(p_k-1)}) \end{cases}$$

Система наз. канонической. x — независимая переменная

Каноническая система при $p_1 = p_2 = \dots = p_k = 1$ наз. нормальной системой (все ДУ 1-го порядка)

$n = p_1 + p_2 + \dots + p_k$ — наз. порядком системы

$$\begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ y_2'(x) = f_2(x, y_1, \dots, y_n) \\ \dots \\ y_n'(x) = f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = F_1(t, y_1, \dots, y_n) \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dt} = F_n(t, y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

другая запись, t — независимая

Решением системы наз. совокупность n ф-ций $y_1 = \varphi_1(x), \dots, y_n = \varphi_n(x)$, таких, что при подстановке их и их производных в ур-ния системы они обращают (ур-ния) в тождества.

Интегралом нормальной системы наз. ф-ция $\Psi(x, y_1, \dots, y_n)$, определенная и непрерывная вместе с частными производными $\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \frac{\partial \Psi}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \Psi}{\partial y_n}$ в некоторой области D изменения переменных и принимающая $\forall x \in (a, b)$ постоянное значение при подстановке в нее произвольного решения системы.

$\Psi_i(x, y_1, \dots, y_n) = C_i$ — первый интеграл системы

Задача Коши: найти решение $y_1, \dots, y_n$ системы, удовлетворяющее начальным условиям
$y_1|_{x=x_0} = y_1^0, \dots, y_n|_{x=x_0} = y_n^0$, $y_1^0, \dots, y_n^0$ — заданные

Теорема Коши

Если все ф-ции $f_1, \dots, f_n$ непрерывны и имеют ограниченные частные производные по $y_1, \dots, y_n$ в некоторой замкнутой области D изменения $x, y_1, \dots, y_n$, то каждой внутренней точке $P(x_0, y_1^0, \dots, y_n^0)$ области D соответствует и притом единственное решение $y_1 = \varphi_1(x), \dots, y_n = \varphi_n(x)$ системы, удовлетворяющее начальным условиям.

Произвольно меняя в области D начальные условия, получаем бесконечное n-параметрическое семейство частных решений, которое может быть записано в виде равенств, зависящих от n произвольных постоянных:

$$y_1 = \psi_1(x, C_1, \dots, C_n), \quad y_2 = \psi_2(x, C_1, \dots, C_n), \quad \dots, \quad y_n = \psi_n(x, C_1, \dots, C_n)$$

Дифференциальное ур-ние n-го порядка с одной искомой ф-цией можно привести к системе нормальных ДУ, посредством ввода дополнительных неизвестных ф-ций.

В свою очередь систему НДУ можно привести к одному ДУ n-ого порядка с одной искомой функцией (это можно сделать при определённых условиях). Решение системы ДУ является более общим в курсе ДУ. (2)

Методы решения НДУ систем:

1) метод исключения неизвестных (систему сводят к одному или нескольким ДУ с одной неизвестной функцией в каждом)

2) метод выделения интегрируемых комбинаций (получение уравнений, которое можно проинтегрировать и получить первые интегралы системы)

Пример

t - аргумент

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = x \end{cases}$$

Дифференц. 1-ое

а) Метод исключения

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt}$$

и подставляем из 2^ого

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x \qquad \frac{d^2x}{dt^2} - x = 0$$

$$x = C_1 e^{t} + C_2 e^{-t}$$

$$y = \frac{dx}{dt} = C_1 e^{t} - C_2 e^{-t}$$

Ответ:
$$\begin{cases} x = C_1 e^{t} + C_2 e^{-t} \\ y = C_1 e^{t} - C_2 e^{-t} \end{cases}$$

б) С помощью метода интегрируемых комбинаций

Складываем почленно

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = x + y$$

интегрируемая комбинация

$$\frac{d(x+y)}{x+y} = dt \qquad \ln|x+y| = t + C_1$$

$$\ln|x+y| = \ln e^{t} + \ln e^{C_1}$$

$$x + y = \tilde{C}_1 e^{t}$$

Вычитаем уравнения

интегрируемая комбинация

$$\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = -(x-y); \qquad \frac{d(x-y)}{x-y} = -dt$$

$$\ln|x-y| = -t + C_2$$

$$\ln|x-y| = \ln e^{-t} + \ln e^{C_2}$$

$$x - y = \tilde{C}_2 e^{-t}$$

Ответ
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\left(\tilde{C}_1 e^{t} + \tilde{C}_2 e^{-t}\right) = \hat{C}_1 e^{t} + \hat{C}_2 e^{-t} \\ y = \frac{1}{2}\left(\tilde{C}_1 e^{t} - \tilde{C}_2 e^{-t}\right) = \hat{C}_1 e^{t} - \hat{C}_2 e^{-t} \end{cases}$$

④

№ 9.402

Заменить ДУ системой ДУ

$y''' - xyy' + y'^3 = 0$ x - независимая переменная

Обозначим $\frac{dy}{dx} = y' = z \longrightarrow dx = \frac{dy}{z}$

тогда $\frac{d^2y}{dx^2} = u = \frac{dz}{dx}$ $y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{du}{dx}$

подставляем в ур-ние: $\frac{du}{dx} - xyz + z^3 = 0$

$\frac{du}{dx} = xyz - z^3 \longrightarrow dx = \frac{du}{xyz - z^3}$

$dx = \frac{dy}{z}$; $dx = \frac{dz}{u}$; $dx = \frac{du}{xyz - z^3}$

$dx = \boxed{\frac{dy}{z} = \frac{dz}{u} = \frac{du}{xyz - z^3}}$ – симметрическая форма записи системы

Ответ: $\frac{dy}{z} = \frac{dz}{u} = \frac{du}{xyz - z^3}$

Метод исключения

Задача. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + e^t \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 1 \end{cases}$ $\begin{cases} t = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ } Здесь t - аргумент, $x(t)$, $y(t)$ - искомые ф-ции

Решение: Выразим из 1-ого ур-ния y: $y = \dfrac{dx}{dt} - e^t$ и подставляем во 2-ое ур-ние

$$\frac{d^2x}{dt^2} - e^t = x + 1; \qquad \frac{d^2x}{dt^2} - x = e^t + 1$$

получили ДУ $2^{ого}$ порядка с постоянными коэффиц. и правой частью спец вида

$$x'' - x = e^t + 1. \qquad f_1(x) = e^t \quad f_2(x) = 1$$

$$\lambda^2 - 1 = 0 \quad \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -1. \quad x_{oo} = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$$

$$x_{ч_1} = Ae^t \cdot t \qquad x'_{ч_1} = Ae^t t + Ae^t \qquad x''_{ч_1} = Ae^t \cdot t + Ae^t + Ae^t$$

$$\cancel{Ae^t t} + 2Ae^t - \cancel{Ae^t t} = e^t \qquad 2A = 1 \qquad A = \frac{1}{2} \qquad \underline{x_{ч_1} = \frac{1}{2} t e^t}$$

$$x_{ч_2} = B \qquad x''_{ч_2} = 0 \qquad 0 - B = 1 \qquad B = -1. \qquad \underline{x_{ч_2} = -1}$$

$$x_{част} = \frac{1}{2} e^t t - 1; \qquad \underline{x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + \frac{1}{2} e^t \cdot t - 1.}$$

$$y = \frac{dx}{dt} - e^t = C_1 e^t - C_2 e^{-t} + \frac{1}{2} e^t t + \frac{1}{2} e^t - e^t =$$

$$= \underline{C_1 e^t - C_2 e^{-t} + \frac{1}{2} e^t t - \frac{1}{2} e^t} = y(t)$$

Используем начальные условия:

$$\left.\begin{aligned} &\text{для } x: \quad 0 = C_1 + C_2 - 1 \\ &\text{для } y: \quad 0 = C_1 - C_2 - \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \rightarrow 0 = 2C_1 - \frac{3}{2} \qquad C_1 = \frac{3}{4}$$

$$C_2 = 1 - C_1 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

Ответ: $\begin{cases} x = \frac{3}{4} e^t + \frac{1}{4} e^{-t} + \frac{1}{2} e^t \cdot t - 1 \\ y = \frac{3}{4} e^t - \frac{1}{4} e^{-t} + \frac{1}{2} e^t t - \frac{1}{2} e^t \end{cases}$

Метод интегрируемых комбинаций.

Задача $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{t-y}{y-x} \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{x-t}{y-x} \end{cases}$ или $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{t}{y-x} - \dfrac{y}{y-x}$

$\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{x}{y-x} - \dfrac{t}{y-x}$

Решение: Сложим уравнения

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = \cancel{\frac{t}{y-x}} - \frac{y}{y-x} + \frac{x}{y-x} - \cancel{\frac{t}{y-x}}$$

$$\boxed{\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = -1.}$$

1-ое умножаем на x, 2-ое на y и складываем

$$x\frac{dx}{dt} = \frac{xt}{y-x} - \cancel{\frac{xy}{y-x}} + \cancel{\frac{yx}{y-x}} - \frac{yt}{y-x};$$

$$+y\frac{dy}{dt} \qquad \boxed{x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = -t}$$

Т. о. как следствие системы получили 2 равенства в полных дифференциалах.

После интегрирования этих уравнений получим первые интегралы системы

$$x + y + t = C_1$$

$$x^2 + y^2 + t^2 = C_2$$

Геометрическая иллюстрация решения

Сферы пересекаются плоскостями в пространстве

(7)

№3079

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y + 5z \\ \dfrac{dz}{dx} + y + 3z = 0 \end{cases}$$

Дифференцируем 1-ое (x-аргумент)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} + 5\frac{dz}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} + 5\underbrace{(-y-3z)}_{\text{из 2-ого}} \qquad \frac{dz}{dx} = -y - 3z$$

Выражаем z из 1-ого: $z = \frac{1}{5}y'_x - \frac{1}{5}y$

$$y'' - y' = 5\left(-y - \frac{3}{5}y'_x + \frac{3}{5}y\right)$$

$$y'' - y' + 2y + 3y' = 0 \qquad y'' + 2y' + 2y = 0.$$

$$k^2 + 2k + 2 = 0 \qquad k_{12} = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm i$$

$$y = C_1e^{-x}\cos x + C_2e^{-x}\sin x$$

$$z = \frac{1}{5}y'_x - \frac{1}{5}y = \frac{1}{5}\left(-C_1e^{-x}\cos x - C_1e^{-x}\sin x - C_2e^{-x}\sin x + C_2e^{-x}\cos x\right)$$

$$-\frac{1}{5}\left(C_1e^{-x}\cos x + C_2e^{-x}\sin x\right) =$$

$$= \frac{1}{5}e^{-x}\left[(C_2 - 2C_1)\cos x - (C_1 + 2C_2)\sin x\right]$$

№3080

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -3y - z \\ \dfrac{dz}{dx} = y - z \end{cases}$$

Дифференц. 1-ое x-аргумент

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -3y'_x - z'_x$$

из 2-ого $z'_x = y - z$

из 1-ого: $z = -3y - y'_x$

И подставляем в $\frac{d^2y}{dx^2}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -3y'_x - (y - z)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -3y'_x - y + (-3y - y'_x)$$

$$y'' + 4y'_x + 4y = 0.$$

$$k^2 + 4k + 4 = 0 \qquad (k+2)^2 = 0 \qquad k_{12} = -2$$

$$y = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x}$$

$$z = -3y - y'_x = -3C_1e^{-2x} - 3C_2xe^{-2x} + 2C_1e^{-2x} - C_2e^{-2x} +$$

$$+2C_2xe^{-2x} = -C_1e^{-2x} - C_2e^{-2x} - C_2xe^{-2x} = z(x)$$

Ответ: $y(x) = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x}$

$z(x) = -C_1e^{-2x} - C_2e^{-2x} - C_2xe^{-2x}$

№ 3084

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}+2y+z=\sin x \\ \dfrac{dz}{dx}-4y-2z=\cos x \end{cases}$$

x-аргумент

Дифференц. 1ое: $y''_{xx}+2y'+z'=\cos x$ (*)

$\longrightarrow z'=4y+2z+\cos x$

И подставляем в (*)

$$y''+2y'+(4y+2z+\cos x)=\cos x$$

Из 1ого: $z=\sin x-y'-2y$

$$y''+2y'+4y+2(\sin x-y'-2y)+\cancel{\cos x}=\cancel{\cos x}$$

$$y''=-2\sin x$$

$$y'=-2\int\sin x\,dx=2\cos x+C_1$$

$$y=2\int\cos x\,dx+C_1x+C_2=\underline{2\sin x+C_1x+C_2=y}$$

$$z=\sin x-y'-2y=\sin x-2\cos x-C_1-4\sin x-2C_1x-2C_2=$$
$$=\underline{-C_1-2C_1x-2C_2-3\sin x-2\cos x=z}$$

№ 3087

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2}{z} \\ \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{1}{2}y \end{cases}$$

Дифференц. 2ое $z''=\frac{1}{2}y'$ (x-аргумент)

Из 1ого: $y'=\dfrac{y^2}{z}$

$$z''=\frac{1}{2}\cdot\frac{y^2}{z}$$

Из 2ого: $y=2z'$

$$z''=\frac{1}{2z}(2z')^2;\quad \boxed{z''z=2(z')^2}$$

явно x – нет

пусть $z'=p(z)$ $\quad z''=\dfrac{\partial p}{\partial z}\cdot\underbrace{\dfrac{\partial z}{\partial x}}_{z'=p}=p\dfrac{dp}{dz}$

$$p\frac{dp}{dz}\cdot z=2p^2\quad :p\neq 0.$$

$$\frac{dp}{dz}\cdot z=2p\qquad \frac{dp}{p}=2\frac{dz}{z}\qquad \ln|p|=2\ln|z|+C_1\ln e$$

$$\underline{p=C_2z^2},\ \text{где } C_2=\pm e^{C_1}$$

$$p=z'\longrightarrow z'=C_2z^2\qquad \frac{dz}{dx}=C_2z^2\qquad \frac{dz}{z^2}=C_2\,dx$$

$$-\frac{1}{z}=C_2x-C_3\qquad \boxed{z=\frac{1}{C_3-C_2x}}$$

$$y=2z'=2\frac{(-1)(-C_2)}{(C_3-C_2x)^2}=\boxed{\frac{2C_2}{(C_3-C_2x)^2}=y}$$

Ответ

№3088

а) $\dfrac{dx}{x^3+3xy^2}=\dfrac{dy}{2y^3}=\dfrac{dz}{2y^2z}$

Система задана в симметричной форме.

(1) $\dfrac{dy}{2y^3}=\dfrac{dz}{2y^2z}$; $\dfrac{dy}{y}=\dfrac{dz}{z}$

$\ln|y|=\ln|z|+c_1\ln e$

$\boxed{y=c_2z}$, где $c_2=\pm e^{c_1}$

(2) $\dfrac{dx}{x^3+3xy^2}=\dfrac{dy}{2y^3}\longrightarrow 2y^3dx=(x^3+3xy^2)dy$

$u=\dfrac{y}{x}\qquad y=u\cdot x$

$y'=u'x+u$

$2y^3=(x^3+3xy^2)y'$

$2u^3\cdot x^3=(x^3+3x\,u^2\cdot x^2)(u'x+u)$

$2u^3=(1+3u^2)(u'x+u)$

$2u^3=u'x+3u^2u'x+u+3u^3$

$-u^3-u=x(1+3u^2)u'$; $-(u^3+u)=x(1+3u^2)\dfrac{du}{dx}$

$\dfrac{(1+3u^2)du}{-(u^3+u)}=\dfrac{dx}{x}\qquad -\int\dfrac{(3u^2+1)du}{u(u^2+1)}=\int\dfrac{dx}{x}$ (*)

$\mathcal{I}:\int\dfrac{(3u^2+1)}{u(u^2+1)}du=3\int\dfrac{u^2+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}-\frac{2}{3}}{u(u^2+1)}du=3\int\dfrac{du}{u}-2\int\dfrac{du}{u(u^2+1)}=$

$=3\ln|u|-2\left[\int\dfrac{du}{u}+\int\dfrac{-u\,du}{u^2+1}\right]$ (=)

$\dfrac{1}{u(u^2+1)}=\dfrac{A}{u}+\dfrac{Bu+C}{u^2+1}=\dfrac{Au^2+A+Bu^2+uC}{u(u^2+1)}$

$\begin{cases}A+B=0\\A=1\\C=0\end{cases}\qquad B=-1,\quad A=1,\quad C=0$

$-\int\dfrac{(3u^2+1)\,du}{u^3+u}=-\int\dfrac{d(u^3+u)}{u^3+u}$

(=) $\ln|u|+\cancel{2}\dfrac{1}{\cancel{2}}\ln|u^2+1|-c_3\ln e$

В (*) : $\ln|x|=-\ln u-\ln|u^2+1|-\ln e^{c_3}$

$|x|=\left(|u|(u^2+1)\cdot e^{c_3}\right)^{-1}$; $x=\dfrac{c_4}{u(u^2+1)}$; $c_4=\pm\dfrac{1}{e^{c_3}}$

$u^3+u=\dfrac{c_4}{x}$

$\dfrac{y^3}{x^3}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{c_4}{x}$

$\dfrac{y^3+yx^2}{x^2}=c_4\qquad \dfrac{y(y^2+x^2)}{x^2}=c_4$

Ответ: $y=c_2z$; $\dfrac{y(y^2+x^2)}{x^2}=c_4$

№3090

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} + 2y + 4z = e^x \\ \frac{d^2z}{dx^2} - y - 3z = -x \end{cases}$$

Дифференц. 1^ое ур-ние:

$y''' + 2y' + 4z' = e^x$

$y^{IV} + 2y'' + 4z'' = e^x$

Из 2^ого: $z'' = y + 3z - x$

$y^{IV} + 2y'' + 4(y + 3z - x) = e^x$

$y^{IV} + 2y'' + 4y + 12z = 4x + e^x$

Из 1^ого: $\boxed{z = \frac{1}{4}e^x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}y''}$ (*)

$y^{IV} + 2y'' + 4y + 12\left(\frac{1}{4}e^x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}y''\right) = 4x + e^x$

$y^{IV} - y'' - 2y = 4x - 2e^x$

$\lambda^4 - \lambda^2 - 2 = 0 \qquad \lambda^2 = t$

$t^2 - t - 2 = 0 \qquad t_{12} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \qquad \left[\begin{array}{l} t_1 = 2 \\ t_2 = -1 \end{array}\right.$

$\lambda^2 = 2 \to \lambda_1 = \sqrt{2}, \lambda_2 = -\sqrt{2}.$

$\lambda^2 = -1 \to \lambda_{34} = \pm i$

$y_{общ.одн} = C_1 e^{\sqrt{2}x} + C_2 e^{-\sqrt{2}x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$

$y_{част} = Ax + B + De^x$

$y_{ч_1} = Ax + B$

а) $y^{IV} - y'' - 2y = 4x \quad \left(\begin{array}{l}\alpha = 0 \\ \beta = 0\end{array}\right)$

Находим A и B, подставив в ур-ние а)

$y'_{ч_1} = A; \quad y''_{ч_1} = y'''_{ч_1} = y^{IV}_{ч_1} = 0$

В а) ур-ние подставим.

$0 - 0 - 2(Ax + B) = 4x$

$-Ax - B = 2x$

$x^1: -A = 2 \qquad A = -2$

$x^0: B = 0 \qquad \boxed{y_{ч_1} = -2x}$

б) $y^{IV} - y'' - 2y = -2e^x \quad \begin{array}{l}\alpha = 1 \\ \beta = 0\end{array}$

$y_{ч_2} = De^x$

Найдем D, подставив $y_{ч_2}$ в (б)

$y'_{ч_2} = De^x = y''_{ч_2} = y'''_{ч_2} = y^{IV}_{ч_2}$

$\cancel{De^x} - \cancel{De^x} - 2De^x = -2e^x$

$D = 1$

$\boxed{y_{ч_2} = e^x}$

$y = C_1 e^{\sqrt{2}x} + C_2 e^{-\sqrt{2}x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x + e^x - 2x,$

$y_{чн} = y_{ч_1} + y_{ч_2}$

Далее полученное $y_{он}$ подставим в (*) и получим $z(x)$.

Ответ: $y(x) = \ldots$

$z(x) = \ldots$