

Семинар 2^я Обзор типовых задач
экзамена по курсу ИиДУ (1)

Комплект 1 Неопределенный
интеграл.

Вопросы для подготовки к экзамену
по курсу «Интегралы и дифференциальные уравнения»
для всех специальностей ИУ (кроме ИУ9), РЛ, БМТ
(в квадратных скобках указаны номера лекций по конспекту проф. Иванкова П.Л.
электронный ресурс <http://mathmod.bmstu.ru/Docs/Eduwork/idu/idu.html>)

1. Сформулировать определение первообразной. Сформулировать свойства первообразной и неопределённого интеграла. [Л. 1,2.]
2. Разложение правильной рациональной дроби на простейшие. Интегрирование простейших дробей. [Л. 3.]
3. Сформулировать свойства определенного интеграла. Доказать теорему о сохранении определенным интегралом знака подынтегральной функции. [Л. 5-6.]
4. Сформулировать свойства определенного интеграла. Доказать теорему об оценке определенного интеграла. [Л. 5-6.]
5. Сформулировать свойства определенного интеграла. Доказать теорему об оценке модуля определенного интеграла. [Л. 5-6.]
6. Сформулировать свойства определенного интеграла. Доказать теорему о среднем для определенного интеграла. [Л. 5-6.]
7. Сформулировать определение интеграла с переменным верхним пределом. Доказать теорему о производной от интеграла по его верхнему пределу. [Л. 7.]
8. Сформулировать свойства определенного интеграла. Вывести формулу Ньютона-Лейбница. [Л. 5-7.]
9. Сформулировать и доказать теорему об интегрировании подстановкой для определённого интеграла. [Л. 7.]
10. Сформулировать и доказать теорему об интегрировании по частям для определённого интеграла. [Л. 7.]
11. Сформулировать свойства определенного интеграла. Интегрирование периодических функций, интегрирование четных и нечетных функций на отрезке, симметричном относительно начала координат. [Л. 7.]
12. Сформулировать определение несобственного интеграла 1-го рода. Сформулировать и доказать признак сходимости по неравенству для несобственных интегралов 1-го рода. [Л. 8-10.]
13. Сформулировать определение несобственного интеграла 1-го рода. Сформулировать и доказать предельный признак сравнения для несобственных интегралов 1-го рода. [Л. 8-10.]
14. Сформулировать определение несобственного интеграла 1-го рода. Сформулировать и доказать признак абсолютной сходимости для несобственных интегралов 1-го рода. [Л. 8-10.]
15. Сформулировать определение несобственного интеграла 2-го рода и признаки сходимости таких интегралов. [Л. 8-10.]
16. Фигура ограничена кривой $y = f(x) \geq 0$, прямыми $x = a$, $x = b$ и $y = 0$ ($a < b$). Вывести формулу для вычисления с помощью определенного интеграла площади этой фигуры. [Л. 11.]
17. Фигура ограничена лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и кривой $r = f(\varphi)$. Здесь r и φ — полярные координаты точки, $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$, где r и φ — полярные координаты точки. Вывести формулу для вычисления с помощью определенного интеграла площади этой фигуры. [Л. 11.]
18. Тело образовано вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x) \geq 0$, прямыми $x = a$, $x = b$ и $y = 0$ ($a < b$). Вывести формулу для вычисления с помощью определенного интеграла объема тела вращения. [Л. 12-13.]
19. Кривая задана в декартовых координатах уравнением $y = f(x)$, где x и y — декартовы координаты точки, $a \leq x \leq b$. Вывести формулу для вычисления длины дуги этой кривой. [Л. 12-13.]
20. Кривая задана в полярных координатах уравнением $r = f(\varphi) \geq 0$, где r и φ — полярные координаты точки, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$. Вывести формулу для вычисления длины дуги этой кривой. [Л. 12-13.]

21. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Интегрирование линейных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка методом Бернулли (метод " $u \cdot v$ ") и методом Лагранжа (вариации произвольной постоянной). [Л. 15.]

22. Сформулировать теорему Коши о существовании и единственности решения дифференциального уравнения n -го порядка. Интегрирование дифференциальных уравнений n -го порядка, допускающих понижение порядка. [Л. 17.]

23. Сформулировать теорему Коши о существовании и единственности решения линейного дифференциального уравнения n -го порядка. Доказать свойства частных решений линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка. [Л. 18–19.]

24. Сформулировать определения линейно зависимой и линейно независимой систем функций. Сформулировать и доказать теорему о вронскиане линейно зависимых функций. [Л. 18–19.]

25. Сформулировать определения линейно зависимой и линейно независимой систем функций. Сформулировать и доказать теорему о вронскиане системы линейно независимых частных решений линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка. [Л. 18–19.]

26. Сформулировать и доказать теорему о существовании фундаментальной системы решений линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка. [Л. 18–19.]

27. Сформулировать и доказать теорему о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка. [Л. 18–19.]

28. Вывести формулу Остроградского-Лиувилля для линейного дифференциального уравнения 2-го порядка. [Л. 18–19.]

29. Вывести формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка при одном известном частном решении. [Л. 18–19.]

30. Сформулировать и доказать теорему о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения n -го порядка. [Л. 20–21.]

31. Вывести формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в случае кратных корней характеристического уравнения. [Л. 20–21.]

32. Вывести формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в случае комплексных корней характеристического уравнения. [Л. 20–21.]

33. Частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида (являющейся квазимногочленом). Сформулировать и доказать теорему о наложении частных решений. [Л. 20–21.]

34. Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных для нахождения решения линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка и вывод системы соотношений для варьируемых переменных. [Л. 20–21.]

35. Сформулировать определение дифференциального уравнения n -го порядка, разрешенного относительно старшей производной, и сформулировать задачу Коши для такого уравнения. Описать метод сведения этого уравнения к нормальной системе дифференциальных уравнений. [Л. 22.]

36. Сформулировать задачу Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений и теорему Коши о существовании и единственности решения этой задачи. Описать метод сведения нормальной системы к одному дифференциальному уравнению высшего порядка. [Л. 22.]

37. Сформулировать определение первого интеграла нормальной системы дифференциальных уравнений. Описать методы нахождения первых интегралов и их применение для решения системы дифференциальных уравнений. [Л. 22.]

При ответе на теоретические вопросы билета формулировки теорем должны сопровождаться определениями используемых в них понятий. Знание остальных теорем, определений и понятий из программы курса может потребоваться при ответе на дополнительные вопросы экзаменатора.

**Задачи для подготовки к экзамену
по курсу «Интегралы и дифференциальные уравнения»
для всех специальностей ИУ (кроме ИУ9), РЛ, БМТ**

На экзамене студенту выдаётся две задачи, каждая на одну из следующих тем: «Неопределённый интеграл», «Приложения определённого интеграла», «Несобственные интегралы 1 и 2 рода», «Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка», «Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью в виде квазиполинома», «Линейные неоднородные дифференциальные уравнения». При подготовке к экзамену рекомендуется прорешать следующие задачи.

1. Проинтегрировать

$$\begin{array}{llll}
 1.1. \int \frac{\sqrt[4]{5 + \ln x}}{x} dx & 1.2. \int \frac{x^2 dx}{x^6 - 1} & 1.3. \int x^2 \cos 2x dx & 1.4. \int e^{2x} \cos 3x dx \\
 1.5. \int \ln x dx & 1.6. \int \frac{4x + 1}{\sqrt{2 + 4x - x^2}} dx & 1.7. \int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2 - 2x - 1}} & 1.8. \int \operatorname{tg}^3 x dx \\
 1.9. \int \frac{dx}{4\sin^2 x + 3\cos^2 x} & 1.10. \int (\sqrt{\cos x} + \sin x)^2 dx & 1.11. \int \frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x-1}} dx & \\
 1.12. \int \frac{dx}{5 - 2\sin x + 5\cos x} & 1.13. \int \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)} & 1.14. \int \frac{x^3 + x + 1}{x(x^2 + 1)} dx &
 \end{array}$$

2. Приложения определённого интеграла

2.1. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = \sqrt{x+4}$, $y = -\sqrt{x} + 2$ и осью Ox . Сделать чертёж.

2.2. Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$. Сделать чертёж.

2.3. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho = 2(1 + \cos \varphi)$ и лучами $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Сделать чертёж.

2.4. Найти объём тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = z^2 - 1$, $x^2 + y^2 = (z - 3)^2 - 1$. Сделать чертёж.

2.5. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = e^{-2x} - 1$, $y = e^{-x} + 1$ и $x = 0$. Сделать чертёж.

2.6. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{x^2}{2} + 2x + 2$ и $y = 2$. Сделать чертёж.

2.7. Найти объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной кривой $x = at^2$, $y = a \ln t$ ($a > 0$) и осями координат, вокруг оси Ox . Сделать чертёж.

2.8. Найти объём тела, образованного вращением кривой $r = a \sin^2 \phi$ вокруг полярной оси. Сделать чертёж.

2.9. Найти длину дуги кривой $y = x^2$ от точки $(-1, 1)$ до точки $(1, 1)$. Сделать чертёж.

2.10. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox кривой $x = 2 \cos t$, $y = 4 \sin t$. Сделать чертёж.

3. Исследовать сходимость интеграла

$$\begin{array}{lll}
 3.1. \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{1+x^2}}{x+3} dx; & 3.2. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^{4/3}} dx; & 3.3. \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{\sin x^3} dx.
 \end{array}$$

4. Решить уравнение

4.1. $xy'' + y' + x = 0$;

4.2. $1 + yy'' + (y')^2 = 0$ при начальных условиях $y = 1$, $y' = 1$, $x = 1$.

5. Указать вид общего решения

5.1. $y^{IV} + y'' = xe^{-x} + 2 - x + x \sin x - e^x \sin x$;

5.2. $y^V - 5y^{IV} + 4y''' = 2 + xe^{-2x} + xe^x - e^{-2x} \cos 3x$.

6. Решить уравнение

6.1. $y'' + y = \operatorname{tg} x \cdot \sec x$;

6.2. $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x}$.

Комментарий

Вычислить

интегралы.

(2)

$$(1) \int e^{\arctg 3x} \frac{dx}{1+9x^2}$$

$$(2) \int \frac{dx}{x \ln^2 \ln x}$$

$$(3) \int \frac{x dx}{x^4 + a^4}$$

$$(4) \int \frac{x^2 dx}{x^6 + 4}$$

$$(5) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^6 + a^2}}$$

$$(6) \int \frac{\ln x - 3}{x \sqrt{\ln x}} dx$$

$$(7) \int \frac{2^x dx}{\sqrt{1-4^x}}$$

$$(8) \int e^{2x^2 + \ln x} dx$$

$$(9) \int \sin \frac{1}{x} \frac{dx}{x^2}$$

$$(10) \int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}$$

$$(11) \int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}} dx$$

$$(12) \int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{2 + \cos^2 x}}$$

$$(13) \int x^2 \arcsin 2x dx$$

$$(14) \int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$(15) \int \ln(x + \sqrt{4+x^2}) dx$$

$$(16) \int \sqrt{x} \ln x dx$$

$$(17) \int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx$$

$$(18) \int \frac{\ln x + 2}{x \sqrt{1 - \ln x - \ln^2 x}} dx$$

$$(19) \int \frac{\cos x}{\sqrt{1-4 \sin x + \cos^2 x}} dx$$

$$(20) \int \frac{4x-11}{\sqrt{1+x-x^2}} dx$$

$$(21) \int \sqrt{\cos 2x} \cos x dx$$

$$(22) \int \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^3 - x} dx$$

$$(23) \int \frac{11x+16}{(x-1)(x+2)^2} dx$$

$$(24) \int \frac{dx}{x^4-1}$$

$$(25) \int \frac{(x-1)^2}{(x+1)^3(x-4)} dx$$

$$(26) \int \sqrt[3]{\cos^2 x} \sin^3 x dx$$

$$(27) \int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx$$

$$(28) \int \sin 5x \sin 2x dx$$

$$(29) \int \frac{dx}{8-4 \sin x + 7 \cos x}$$

$$(30) \int \frac{dx}{1-4 \sin x \cos x + 4 \cos^2 x}$$

$$(31) \int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x} dx$$

$$(32) \int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}$$

$$(33) \int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx$$

$$(34) \int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt{x}} dx$$

$$(35) \int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[4]{x^3} + 1}$$

$$(36) \int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}} dx$$

1. Найти интегралы, используя таблицу и основные свойства.

1. $\int \left(\frac{x^2}{3} + \frac{x^{15}}{4} + \frac{x}{12} \right) dx$	2. $\int (x+1)(x-\sqrt{x+1}) dx$	3. $\int \sqrt[8]{(8x)^{-7}} dx$
4. $\int \frac{dx}{x^2+7}$	5. $\int \left(\frac{3x^3-2x^2}{8x} \right) dx$	6. $\int \frac{dx}{x^2-10}$
7. $\int (7\sqrt[3]{x} + 9\sqrt{x} + \sqrt[4]{x^3}) dx$	8. $\int \frac{dx}{\sqrt{8-x^2}}$	9. $\int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 3x^5 \right) dx$
10. $\int \frac{4dx}{\sqrt{2-x}}$	11. $\int \left(\frac{x^4+6x}{2x} \right) dx$	12. $\int \frac{dx}{2x^2-6}$
13. $\int \left(\sqrt[3]{x^4} + \frac{9}{x^9} + 2 \right) dx$	14. $\int \left(\frac{x^{7/2} + x^{2/2}}{x^2} \right) dx$	15. $\int \left(\frac{x^5+2x^2-7}{x} \right) dx$
16. $\int \left(\frac{x^6+6x^{5/2}-7}{2x^3} \right) dx$	17. $\int \left(\frac{3+4x^2}{x} \right) dx$	18. $\int \left(\frac{17+4\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$
19. $\int (3-x^2)^2 dx$	20. $\int (\sqrt{x}+7^x) dx$	21. $\int \left(\frac{6\cos^2 x+3}{\cos^2 x} \right) dx$
22. $\int (2\sin x+3\cos x) dx$	23. $\int (5e^x+2^x) dx$	24. $\int \left(\frac{5}{1+x^2} + \frac{x^2}{4} \right) dx$
25. $\int \left(\frac{x^5+3x^2}{\sqrt{5x}} \right) dx$	26. $\int \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{7}{\sqrt[5]{x}} + 1 \right) dx$	27. $\int \left(\frac{1-x}{x} \right)^2 dx$
28. $\int \frac{(\sqrt{2x}-\sqrt[3]{3x})^2}{x} dx$	29. $\int \left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$	30. $\int \left(\frac{4-\sin^3 x}{\sin^2 x} \right) dx$

2. Найти интегралы, используя подведение под знак дифференциала и преобразование подынтегрального выражения.

1. $\int \frac{1-3x}{3+2x} dx$	2. $\int \frac{x^4+x^2+1}{x-1} dx$	3. $\int \frac{3-2x}{7+5x^2} dx$
4. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx$	5. $\int e^{-(x^2+1)} x dx$	6. $\int \cos \frac{x}{\sqrt{2}} dx$
7. $\int \frac{\sin 3x}{3+\cos 3x} dx$	8. $\int \frac{x}{2+3x} dx$	9. $\int \frac{x}{(x+1)^2} dx$
10. $\int \frac{3x+1}{\sqrt{5x^2+1}} dx$	11. $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} dx$	12. $\int x \cdot 7^{x^2} dx$
13. $\int \operatorname{tg} x dx$	14. $\int \frac{x^2+1}{x-1} dx$	15. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$
16. $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2-4}} dx$	17. $\int \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{2}}{4+x^2} dx$	18. $\int \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$
19. $\int \operatorname{ctg} x dx$	20. $\int \frac{x^2+5x+7}{x+3} dx$	21. $\int \frac{\sqrt{x}+\ln x}{x} dx$

22. $\int \frac{x}{x^2-5} dx$	23. $\int 4^{2-3x} dx$	24. $\int \frac{e^x}{e^x-1} dx$
25. $\int \cos \frac{x}{4} \cdot \sin \frac{x}{4} dx$	26. $\int \frac{2x-5}{3x^2-2} dx$	27. $\int 3 \cdot e^{-2x} dx$
28. $\int (e^{x/2} + e^{-x/2})^2 dx$	29. $\int \sin(2+3x) dx$	30. $\int \cos 6x \cdot \sin^2 6x dx$

3. Найти интегралы, используя метод интегрирования по частям.

1. $\int \ln 9x dx$	2. $\int x \cdot \cos x dx$	3. $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$
4. $\int x^2 2^{2x} dx$	5. $\int x \cdot \sin 7x dx$	6. $\int x \cdot e^{2x} dx$
7. $\int \arctg 5x dx$	8. $\int \frac{x}{e^x} dx$	9. $\int x^2 \cdot \ln x dx$
10. $\int (3x+5) \cdot \cos x dx$	11. $\int \sqrt{x} \cdot \ln x dx$	12. $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$
13. $\int \arcsin x dx$	14. $\int x \cdot 2^{-x} dx$	15. $\int (4-3x) \cdot e^{-2x} dx$
16. $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$	17. $\int (x^2+1) \cdot e^{-8x} dx$	18. $\int 6x \cdot \sin x dx$
19. $\int \ln^2 x dx$	20. $\int e^{\sqrt{x}} dx$	21. $\int x^2 \cdot \arcsin x dx$
22. $\int x \cdot \ln(x-1) dx$	23. $\int x \cdot \arctg x dx$	24. $\int (x^2-2x+3) \cdot \ln x dx$
25. $\int \ln(x^2+1) dx$	26. $\int (x^2+7x+1) \cdot \cos x dx$	27. $\int (2-4x) \cdot \sin 2x dx$
28. $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$	29. $\int (x+5) \cdot e^{3x} dx$	30. $\int (x^2-1) \cdot e^{9x} dx$

4. Найти интегралы от рациональных функций.

1. $\int \frac{dx}{(x+1)x}$	2. $\int \frac{x dx}{x^3-1}$	3. $\int \frac{dx}{x^2+x}$
4. $\int \frac{dx}{(x+7)(x+2)}$	5. $\int \frac{dx}{(x+1)^2 x}$	6. $\int \frac{dx}{x^3-x^2}$
7. $\int \frac{x dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$	8. $\int \frac{dx}{x^2-x+3}$	9. $\int \frac{4x^2-x+3}{x^2(x-1)} dx$
10. $\int \frac{x^2+4x+4}{x(x-1)^2} dx$	11. $\int \frac{3x^2+2x-1}{(x-1)^2(x+2)} dx$	12. $\int \frac{x^2-5x+9}{x^3-5x^2+6x} dx$
13. $\int \frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x} dx$	14. $\int \frac{x+2}{(x-3)(x-4)} dx$	15. $\int \frac{2x-7}{x^2+8} dx$
16. $\int \frac{5x^2+1}{x^3-5x^2+4x} dx$	17. $\int \frac{7x-15}{x^3-2x^2+5x} dx$	18. $\int \frac{2x^2-1}{x^3-x^2-6x} dx$
19. $\int \frac{x^2-x+4}{(x+1)(x-2)(x-3)} dx$	20. $\int \frac{x+4}{x^3+x^2-6x} dx$	21. $\int \frac{3}{(x+1)(x-5)(x+3)} dx$
22. $\int \frac{x^2+1}{x^4+3x^2} dx$	23. $\int \frac{x^2+x+5}{x(x-2)(x+3)} dx$	24. $\int \frac{1}{(x+5)(x+6)} dx$

(5)

1. $\int_0^1 \arctg x dx$	2. $\int_0^2 x e^{-x} dx$	3. $\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{8}} x^2 \cos 2x dx$
4. $\int_0^e x \ln x dx$	5. $\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx$	6. $\int_0^{\pi} x \cos x dx$
7. $\int_0^3 \frac{x+5}{e^x} dx$	8. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin^2 x} dx$	9. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (4x-2) \cos x dx$
10. $\int_0^{\sqrt{x}} x \arctg x dx$	11. $\int_1^{e^3} \ln x dx$	12. $\int_0^{\pi} x \sin 7x dx$
13. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$	14. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (3x+5) \cos x dx$	15. $\int_0^e \frac{\ln x}{x^2} dx$
16. $\int_0^{\pi} (2x-4) \sin x dx$	17. $\int_1^2 \ln(x^2) dx$	18. $\int_0^{\ln 2} x e^x dx$
19. $\int_0^1 (1-x)^2 e^x dx$	20. $\int_1^2 x^3 \ln x dx$	21. $\int_0^{\ln 3} (5+x) e^{3x} dx$
22. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} x^2 \cos x dx$	23. $\int_1^4 x^2 \ln(6x) dx$	24. $\int_0^{\ln 2} (2x-3) e^{-x} dx$
25. $\int_0^{0.5} \arccos x dx$	26. $\int_0^1 x^2 3^{x+1} dx$	27. $\int_0^{\ln 4} (x+2) e^{4x} dx$
28. $\int_0^{\ln 2} x^3 e^{-3x} dx$	29. $\int_1^2 (x-1) 2^x dx$	30. $\int_0^{0.5} \arcsin x dx$

⑥

Комплект 2 Приложение определено
ного интеграла

- 1). Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = e^{2x}$, $y = e^x + 2$, $x = 0$. Сделайте чертеж.
- 2). Найти объем тела, образованного вращением кардиоиды $\rho = 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}$ вокруг полярной оси. Сделайте чертеж.
- 3). Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $x = 4 \cos t$, $y = 2 \sin t$, $y = 1$ и содержащей точку $(0, 2)$. Сделайте чертеж.
- 4). Вычислить длину дуги $y = \frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}$ между точками пересечения с осью Ox . Сделайте чертеж.
- 5). Вычислить площадь поверхности, образованной вращением части кривой $\rho = 2a \sin \varphi$, отсекаемой лучами $\varphi = \frac{\pi}{4}$ и $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ вокруг полярной оси. Сделайте чертеж.
- 6). Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy (оси Ox) фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$ и $y = \sqrt{x}$. Сделайте чертеж.

Задача 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $\begin{cases} x = 4 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}, y = 1$, содержащей точку $A(0, 2)$.

Задача 2. Фигура, ограниченная линиями: $y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x, y = \sqrt{3}$, вращается вокруг оси OX . Вычислить объем тела вращения.

Задача 3. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением лемнискаты $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ вокруг полярной оси.

Задача 4. Исследовать на сходимость: $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^6 + 3} \operatorname{arctg}(1 + x^2)}$.

Задача 5. Исследовать на сходимость: $\int_0^1 \frac{2 + \sin x}{(x - 1)^2} dx$.

Задача 1. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $\rho = \sqrt{3} \sin \varphi, \rho = 1 + \cos \varphi$ и расположенной внутри каждой из них.

Задача 2. Фигура, ограниченная линиями: $y = e^{-2x} - 1, y = e^{-x} + 1, x = 0$, вращается вокруг оси OX . Найти объем тела вращения.

Задача 3. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OY дуги кривой $x^2 = 4 + y$, отсекаемой прямой $y = 2$.

Задача 4. Исследовать на сходимость: $\int_1^{+\infty} (1 - \cos \frac{2}{\sqrt{x}}) dx$.

Задача 5. Исследовать на сходимость: $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x - 2)^2(x^2 + 4x + 3)} \cdot \ln(3 - x)}$.

Задача 1. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой: $\rho = a \cos 3\varphi$.

Задача 2. Фигура, ограниченная кривой: $y = 2 \sin x$ и ветвью тангенсоиды $y = \operatorname{tg} x$, проходящей через начало координат, вращается вокруг оси OX . Вычислить объем тела вращения.

Задача 3. Вычислить длину дуги кривой $y = \frac{\sqrt{x}}{3}(x - 3)$ между точками, ординаты которых равны нулю.

Задача 4. Исследовать на сходимость: $\int_1^{+\infty} (1 - \cos \frac{3}{\sqrt{x}}) dx$.

Задача 5. Исследовать на сходимость: $\int_0^1 \frac{(5x + 2)}{\sqrt[3]{(x^2 - 1)(x^3 - 1)}} dx$.

8

Комплекст 3 Исследование на существование несобственных интегралов

1. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^3 \sqrt{\ln x}}$

12. $\int_0^1 \frac{\ln(x+1) dx}{x \sqrt{x + \sin^2(x^2)}}$

2. Найти все значения α , для которых интеграл сходится

$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^{\alpha} x}$

13. $\int_0^1 \frac{\sqrt{1 - \cos 2x} dx}{\sqrt[3]{x^3 + 7x^2}}$

3. $\int_1^{\infty} \frac{\arcsin \frac{1}{x} dx}{\sqrt{x-1}}$

14. $\int_0^1 \frac{\sin x dx}{x^2 + x^3 \cdot \sin x}$

4. $\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x^2) dx}{x^2 \sqrt{x}}$

15. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x + x^2}}$

5. $\int_1^{\infty} \frac{2x + \sin x dx}{\sqrt{x}}$

16. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x + x^2}}$

6. $\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x) dx}{x \sqrt{x}}$

17. $\int_1^3 \frac{\operatorname{arctg} x dx}{x(x^3-1)}$

7. $\int_1^{\infty} \frac{(e^{\frac{1}{x}} - 1) dx}{\sqrt[3]{x + \cos \frac{1}{x}}}$

18. $\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x dx}{x^2 + \sin x}$

8. $\int_1^{\infty} \frac{\ln(x+1) - \ln x dx}{\sqrt[3]{x + \operatorname{arctg} \frac{x}{2}}}$

19. $\int_0^{\infty} \frac{3^{1-x} dx}{\sin \sqrt{1-2}}$

9. $\int_1^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{x} dx}{\sqrt{x + \operatorname{tg} \frac{1}{x}}}$

20. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\ln x}$

10. $\int_1^{\infty} \frac{x + \sin(x^2 - 2x) dx}{x^3 + \ln x}$

21. $\int_0^1 \frac{dx}{1 - \cos x}$

11. $\int_1^{\infty} \frac{\sin x dx}{x^3 + \cos x}$

22. $\int_0^2 \frac{\sin x dx}{\sqrt{4-x^2}}$

9

Комплексы 4. Решение ОДУ 2-го порядка
гоницирующие нелинейные
уравнения

1. $\sqrt{y+1}(yy'' - (y')^2) = yy' \sqrt{yy'}$, $y(0) = 1$
 $y'(0) = 2$
2. $xy'' = 4\sqrt{xy' + x^2} + y'$, $y(1) = 1$
 $y'(1) = 0$
3. $y''(y^2 + 2) = 2y(y' + 1)y'$, $y(0) = 0$ $y'(0) = 1$
4. $(xy' - x^2)y'' = (2y' - 3x) \cdot y'$
5. $y''(e^y + 1) = (y')^2 e^y$
6. $xy'y'' - (y')^2 = x^4$
7. $2(y' - y'') = (y')^3 e^{-x}$
8. $3yy'y'' = (y')^2 - 1$
9. $y'' = \sqrt{1 - \left(\frac{y'}{x}\right)^2} \cdot \arcsin \frac{y'}{x} + \frac{y'}{x}$
10. $y^3 y'' + (yy')^2 + y' = 0$, $y(0) = -1$; $y'(0) =$
11. $3y^3 y'' e^{y'} + 2y' \cdot e^{\frac{1}{3y^2}} = 0$, $y(0) = 1$; $y'(0) =$
12. $xy'' = \sqrt{x^2 + (y')^2} + y'$, $y(1) = 1$; $y'(1) = e$

Комплект 5 Д.У. высшего порядка
линейные с постоянными
коэффициентами и правой
частью специального вида, допуска-
ющей подбор частного решения

1. $y^{IV} - 16y = 1 - (x^2 + 1)e^{-2x} + e^{2x} \sin 2x + x \cos 2x - 5x^3$

Указать вид общего решения Д.У.

2. $y^{IV} + 3y''' + 3y'' + y' = x^2 + x e^{-x} \sin x + 2x^3 e^{-x} - \cos x + 1$

3. $y^{IV} + 64y' = -4 + x^2 e^{2x} \sin 2\sqrt{3}x + \cos 2\sqrt{3}x - x e^{-4x} + 5x^3$

4. $y^{IV} - 27y' = 1 + e^{\frac{3\sqrt{3}}{2}x} \sin \frac{3}{2}x - x^2 - e^{\frac{3}{2}x} \cos \frac{3\sqrt{3}}{2}x + x e^{\frac{3}{2}x}$

5. $y^{IV} + 2y''' + 2y'' + 2y' + y = 1 - \sin x + x^2 \cos x - x^3 + 3x e^{-x} + e^{-x} \cos x$

6. $y^{IV} - y''' - 3y'' + y' + 2y = e^x \cos 2x + (x^3 - 1)e^{-x} + 4x e^{2x} + \sin x - x \cos x$

7. Корнями характеристического уравнения для Д.У. с постоянными коэффициентами являются $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_{3,4} = 2 \pm 3i$ и правая часть Д.У.

$f(x) = x^2 + e^{2x} \cos 3x + x \sin 3x$.

Указать вид общего решения Д.У. (не определяя значений частных интегралов, не определяя значений коэффициентов).

Комплект 6. Д.У. высшего порядка
с правой частью специального
и неспециального вида.

Найти частное решение д.у.

1. $2y'' - 3y' + 4y = 7e^{4x} + 4x - 13$, $y(0) = 2$
 $y'(0) = 7$

2. $y'' - 7y' + 6y = 6e^{2x} + \sin x$, $y(0) = 0$
 $y'(0) = 1$

Найти общее решение д.у. (подбор
указ.).

3. $y'' - 5y' + 4y = -3e^{2x} + 4x - 8$

4. $y'' - 2y' + 5y = 2e^x \cos 2x + x^2$

Найти общее решение д.у. (правая
часть не специального
вида)

5. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}$

6. $y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln x$

Найти общее решение д.у. если
известно одно частное решение
соответствующего однородного

7. $x^2 y'' - x y' - 3y = 5x^4$, $y_1 = \frac{1}{x}$

8. $(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2 e^x$, $y_1 = x$

9. $y'' + y' \cot x - y \operatorname{cosec}^2 x = 2 \sin x$, $y_1 = \operatorname{cosec} x$