1

Дифференциальные уравнения 1-го порядка. Основные понятия. Интегрирование уравнений с разделяющимися переменными и однородных уравнений

(1)

Опр. Обыкновенным дифференц. ур-нием наз. ур-ние вида $\boxed{F(x, y, y', \dots y^{(n)}) = 0}$

max порядок производной, входящей в диф. ур-ние наз. порядком уравнения.

Опр. ДУ 1-ого порядка наз. ур-ние вида
$\boxed{F(x, y, y') = 0}$
x-аргумент, y-неизвестная ф-ция
Чаще рассматривается $y' = f(x y)$

Иногда ур-ние 1-ого порядка записывается
$P(x y)\,dx + Q(x y)\,dy = 0$

Ф-ция $y = \varphi(x)$ наз. частным решением ур-ния $F(x y y') = 0$ если она обращает его в тождество

Решение, заданное неявно $\Phi(x y) = 0$ наз. интегралом диф. ур-ния.

Геометрич. истолкование ДУ
$y = \varphi(x)$ - решение ДУ $F(x y y') = 0$
График $y = \varphi(x)$ наз. интегральной кривой
$F(x y y') = 0$ устанавливает связь между координатами точки $(x y)$ и угловым коэффициентом касательной y' к интегральн. кривой в этой же точке.
Геометрически $y' = f(x y)$ равносильно заданию в областиD поля направлений, а интегрирование этого ур-ия равносильно проведению таких линий, которые в каждой (т) своей касающая направление поля, заданного в данной точке.

Задача Коши: состоит в том, чтобы найти решение, которое при заданном значении аргумента $x = x_0$ принимает заданное значение $y = y_0$ т. е. удовлетворяет начальному условию.
Геометрически: среди всех интегральных кривых данного ДУ выделить ту, которая проходит через заданную точку $(x_0\ y_0)$. Решение задачи Коши наз. частным решением ДУ.

! $\boxed{y = \varphi(x, C)}$ наз. общим решением ДУ
C - произвольная константа
Ур-ние $\Phi(x y C) = 0$ - общий интеграл ДУ в области D.

Теорема (сущ-ние и единственность решения задачи Коши)
Если $f(x y)$ для ДУ $y' = f(x y)$ непрерывна в D и имеет в этой области непрерывную частную производную $\frac{\partial f}{\partial y}$, то через каждую

точку $(x_0\, y_0)$ области D проходит, и притом только одна, интегральная кривая

1) ДУ с разделяющимися переменными
$$P(x\,y)dx + Q(x\,y)dy = 0$$
после преобразования $f_1(x)\cdot f_2(y)\,dx + \varphi_1(x)\varphi_2(y)\,dy = 0$

При разделении переменных можно потерять решения вида $\varphi_1(x) = 0$ $f_2(y) = 0$
Эти ф-ции обязательно надо проверять на входимость их в общее решение !

2) ОДУ - однородные ДУ
$\boxed{y' = f(x, y)}$

$P(x\,y)\,dx + Q(x\,y)\,dy = 0$
$P(x\,y)$ и $Q(x\,y)$ однородные ф-ции одного порядка

Сводится к ур-нию с разделяющимися переменными заменой $\boxed{\frac{y}{x} = u(x)}$

Полезно знать:

1) Ответ в д.у. может быть получен в виде: или $y = \varphi(x, C_1 \dots C_n)$ или $x = g(y; C_1, C_2 \dots, C_n)$, или $\Psi(x, y\, C_1\, C_2 \dots C_n) = 0$ - общий интеграл д.у.

2) В ответе столько const C_i, каков порядок д.у (порядок старшей производной)

№ 9.2.

$xy' - y = xe^x$ $\qquad y = x\left(\int_0^x \frac{1}{x} e^x dx + c\right)$ - является решением уравнения?

$$y' = \left[x\left(\int_0^x \frac{1}{x} e^x dx + c\right)\right]' = \left(\int_0^x \frac{1}{x} e^x dx + c\right) + x \cdot \frac{1}{x} e^x$$

подставляем в уравнение выражения для y и y'

$$x\left(\int_0^x \frac{1}{x} e^x dx + c + x \cdot \frac{1}{x} e^x\right) - x\left(\int_0^x \frac{1}{x} e^x dx + c\right) = xe^x$$ - ч. т. д.

№ 9.4

$y(\ln|x^2-1| + c) = 1$ $\qquad y(0) = 1$ - начальное условие

т.е. $x = 0$ $y = 1$

$1(\ln|0-1| + c) = 1 \rightarrow c = -\ln|1| + 1 = 1$

кривая, удовлетворяющая начальному условию при $y(0) = 1$: $y(\ln|x^2-1| + 1) = 1$

№ 9.9 $\qquad$ Составить дифференц. уравнения семейств кривых

$y = x^2 + 2ax$

$$\begin{cases} y' = 2x + 2a \\ y = x^2 + 2ax \end{cases} \rightarrow a = \frac{y' - 2x}{2}$$

$y = x^2 + 2x\,\frac{y' - 2x}{2}$; $\quad y = x^2 + xy' - 2x^2$

$\boxed{x^2 + y = xy'}$

3

№ 9.26 $\qquad$ Уравнения с разделяющимися переменными.

$(x+1)y' + xy = 0$ $\qquad y' = \frac{dy}{dx}$

$(x+1)\frac{dy}{dx} + xy = 0$; $\qquad \frac{dy}{y} = -\frac{x\,dx}{x+1}$ $\qquad$ Делим на $y(x+1)$

Интегрируем

$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{x\,dx}{x+1}$, $\qquad \ln|y| = -\int \frac{(x+1)\,dx}{x+1} - \int \frac{-1\,dx}{x+1}$

$\ln|y| = -x + \ln|x+1| + C_1$ $\qquad C_1 \neq 0$

$\ln|y| = \ln e^{-x} + \ln|x+1| + \ln C_2$ $\qquad C_1 = \ln C_2$ $\qquad C_2 \neq 0$

$\ln|y| = \ln|C_2 e^{-x}(x+1)|$; потенцируем последнее выражение

$y = C_2 e^{-x}(x+1)$ $\qquad$ не явл. решением

при делении потеряли два решение : $y = 0$ $x = -1$

$y = 0 \rightarrow C_2 = 0$

Окончательно: $\boxed{y = Ce^{-x}(x+1)}$, C - принимает любые значения

$\ln|y| = \ln e^{-x} + \ln|x+1| + \ln e^{C_1}$

$xy\,dx + \sqrt{1-x^2}\,dy = 0$ № 9.31

Делим на $(\sqrt{1-x^2})\cdot y \Rightarrow \dfrac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{dy}{y} = 0$ (4)

$\int \dfrac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int \dfrac{dy}{y}$; $-\dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{1/2} = -\ln|y| + C_1$ $C_2 \neq 0$

$\sqrt{1-x^2} = \ln|y| - C_1$; $\sqrt{1-x^2} = \ln y + \ln C_2$

$\sqrt{1-x^2} = \ln\left|\dfrac{y}{e^{C_1}}\right|$ $C_2 y = e^{\sqrt{1-x^2}}$; $y = \dfrac{1}{C_2} e^{\sqrt{1-x^2}} = C_3 e^{\sqrt{1-x^2}}$

$\boxed{y = Ce^{\sqrt{1-x^2}}}$ ← C-любое

~~проверка~~!

При делении на $y\sqrt{1-x^2}$ потеряно решение $y=0$ $x=\pm 1$ (получается при $C_3=0$)

№ 9.33

$2e^x \operatorname{tg} y\,dx + (1+e^x)\sec^2 y\,dy = 0$

Делим на $\operatorname{tg} y\cdot(1+e^x)$

$\dfrac{2e^x\,dx}{1+e^x} = -\dfrac{\sec^2 y\,dy}{\operatorname{tg} y}$; Интегрируем $2\int \dfrac{e^x\,dx}{1+e^x} = -\int \dfrac{\sec^2 y\,dy}{\operatorname{tg} y}$

$2\ln|1+e^x| = -\int \dfrac{d\operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} y} = -\ln|\operatorname{tg} y| + C_1$ $C_1 = \ln C_2$

$\ln|(1+e^x)^2| = -\ln|\operatorname{tg} y| + \ln C_2$ $C_2 \neq 0$

$\ln|(1+e^x)^2\cdot \operatorname{tg} y| = \ln|C_2|$ $|C_2| = (1+e^x)^2\cdot\operatorname{tg} y$

при ~~проверка~~ делении на $\operatorname{tg} y\,(1+e^x)$ теряем решение

$\operatorname{tg} y = 0$ $y = \pi k$, $k = 0, 1\ldots \rightarrow C_2 = 0$ $1+e^x \neq 0$

Окончательно: $\boxed{C = (1+e^x)^2\cdot\operatorname{tg} y}$ C-любое

№ 9.35

$(1+x^2)dy + y(\sqrt{1+x^2})dx - xy\,dx = 0$

$(1+x^2)dy + y(\sqrt{1+x^2} - x)dx = 0$ проверка

Делим на $y(1+x^2)$ 1) $1+x^2 \neq 0$ 2) $y \neq 0 \rightarrow$ но $y=0$ решение

$\dfrac{dy}{y} + \dfrac{(\sqrt{1+x^2}-x)\,dx}{1+x^2} = 0$; $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{x-\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}\,dx$

Интегрируем:

$\int \dfrac{dy}{y} = \int \dfrac{x-\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}\,dx$; $\ln|y| = \int \dfrac{x\,dx}{1+x^2} - \int \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}\,dx$

$\ln|y| = \frac{1}{2}\ln|x^2+1| - \ln(x+\sqrt{x^2+1}) + C_1$

$\ln|y| = \frac{1}{2}\ln|x^2+1| - \ln(x+\sqrt{x^2+1}) + \ln|C_2|$

$y = \dfrac{C_2\sqrt{(x^2+1)}}{x+\sqrt{x^2+1}}$ $C_2 \neq 0$, если $C_2 = 0$, то $y = 0$ - реш

Ответ: $\boxed{y = C\dfrac{\sqrt{(x^2+1)}}{x+\sqrt{x^2+1}}}$ C-любое

№ 9.43

Найти частное решение

$(1+y^2)\,dx - xy\,dy = 0$ $y(1)=0$ – задача Коши

Делим на $(1+y^2)x$

$\dfrac{dx}{x} = \dfrac{y\,dy}{1+y^2}$; $\ln|x| = \frac{1}{2}\ln|y^2+1| + C_1$; $C = \ln C_2$

$\ln|x| = \ln|\sqrt{y^2+1}| + \ln|C_2| \to x = C_2'(\sqrt{y^2+1})$

При делении потеряли решение $x=0$; $1+y^2 \neq 0$

при $X=0$ $C_2'=0$

Общее решение: $\boxed{x = C\sqrt{y^2+1}}$ C-любое

$x^2 = C^2(y^2+1)$

$\left.\begin{matrix} x=1 \\ y=0 \end{matrix}\right\}$ нач. условие $1 = C\sqrt{0+1} \to C=1$

Частное решение ур-ния при $y(1)=0$

$\boxed{x^2 - y^2 = 1}$

{При решении частной задачи не надо проверять потерю решений}!

№ 9.45

$y'\,tg\,x = y$ $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ $y' = \dfrac{dy}{dx}$

$\dfrac{dy}{dx}\,tg\,x = y$

Делим на $y\cdot tg\,x$

$\dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{tg\,x}$; $\int\dfrac{dy}{y} = \int\dfrac{dx}{tg\,x}$

$\ln|y| = \int\dfrac{\cos x\,dx}{\sin x}$; $\ln|y| = \int\dfrac{d\sin x}{\sin x}$; $\ln|y| = \ln|\sin x| + C_1$

$C_1 = \ln C_2$

$\ln|y| = \ln|\sin x| + \ln|C_2|$; $y = C_2\sin x$

при делении на $y\,tg\,x$: $y=0$

$tg\,x = 0$ $x = \pi k,\ k=0,1\ldots$

при $y=0$ $C_2=0$ $\boxed{y = C\sin x}$ C-любое

Частное решение: $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \to 1 = y = C\sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow C=1$

Ответ: $\boxed{y = \sin x}$

{$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$}

№ 9.48

Однородные уравнения

$y' = (x-y)/(x+y)$ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x-y}{x+y}$

подстановка $\frac{y}{x} = u(x) \to y = ux$ $y' = xu' + u$

$xu' + u = \dfrac{x-ux}{x+ux}$; $xu' + u = \dfrac{1-u}{1+u}$ $u' = \dfrac{du}{dx}$

$(1+u)x\dfrac{du}{dx} + u(1+u) = 1-u$; $(1+u)x\dfrac{du}{dx} + (u^2+2u-1) = 0$

Делим на $x(u^2+2u-1) = x(u+1-\sqrt{2})(u+1+\sqrt{2})$

$\dfrac{1+u}{u^2+2u-1}du + \dfrac{dx}{x} = 0$; $\dfrac{dx}{x} = -\left(\dfrac{1+u}{u^2+2u-1}\right)du$

$\ln|x| = -\frac{1}{2}\int \frac{x+2u}{u^2+2u-1}du$; $\ln|x| = -\frac{1}{2}\ln|u^2+2u-1| + C_1$

$C_1 = -\ln C_2$

$\ln|x| = -\frac{1}{2}\ln|u^2+2u-1| - \ln C_2$ $\quad C_2 x = \frac{1}{\sqrt{u^2+2u-1}}$

$C^2 x^2 = \frac{1}{u^2+2u-1}$ $\quad u = \frac{y}{x}$

$C_2^2 x^2 = \frac{1}{\frac{y^2}{x^2}+2\frac{y}{x}-1}$; $C_2^2 \cancel{x^2} = \frac{\cancel{x^2}}{y^2+2xy-x^2}$

$y^2+2xy-x^2 = \frac{1}{C_2^2} \longrightarrow \boxed{x^2-2xy+y^2=C}$

при делении могли потерять решение $u^2+2u-1=0$
$u_{1,2} = -1\pm\sqrt{2}$ $\quad u=\frac{y}{x}$; т. е. $y = -x \pm x\sqrt{2}$. Это решение входит в найденное при $C=0$

№9.49

$(x^2+xy)y' = x\sqrt{x^2-y^2}+xy+y^2$ — однородное

Замена переменных $\frac{y}{x} = u(x)$ $\quad y = ux$
$y' = xu_x' + u$

$(x^2+ux^2)(xu'+u) = x\sqrt{x^2-u^2x^2}+ux^2+u^2x^2$

$x^3u' + ux^3u' + \cancel{x^2u} + \cancel{u^2x^2} = x^2\sqrt{1-u^2} + \cancel{ux^2} + \cancel{u^2x^2}$

$x^3(1+u)\frac{du}{dx} = x^2\sqrt{1-u^2}$; Делим на $\sqrt{1-u^2}\cdot x^3$

$\frac{(1+u)du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{x^2\cdot dx}{x^3}$; $\int\frac{(1+u)du}{\sqrt{1-u^2}} = \int\frac{dx}{x}$

$\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} + \int\frac{u\,du}{\sqrt{1-u^2}} = \int\frac{dx}{x}$;

$\arcsin u - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{1-u^2}}{1/2} = \ln|x| + C_1$

$\arcsin\frac{y}{x} - \frac{1}{x}\sqrt{x^2-y^2} - \ln|x| = C_1$

Всегда если только не решаем задачу Коши

проверка!

при делении на $\sqrt{1-u^2}\cdot x^3 \neq$ теряем решение
$u=\pm1$ $\quad x=0$ — не м. б. т. к. $u=\frac{y}{x}$

$u=\pm1 \rightarrow u=\frac{y}{x} \rightarrow y=\pm x$ — является решением исходного ур-ния

Окончательно: $\begin{cases} \arcsin\frac{y}{x} - \frac{1}{x}\sqrt{x^2-y^2} - \ln|x| = C \\ y = \pm x \end{cases}$

№9.54

$xy' = y + x\,\mathrm{tg}\frac{y}{x}$ — однородное д-у.

$\frac{y}{x} = u$ $\quad y = ux$ $\quad y' = xu' + u = x\frac{du}{dx} + u$

$x(xu'+u) = ux + x\,\mathrm{tg}\,u$; $\quad x^2u' + \cancel{xu} = \cancel{ux} + x\,\mathrm{tg}\,u$

$x^2\frac{du}{dx} = x\,\mathrm{tg}\,u$ $\quad \frac{du}{\mathrm{tg}\,u} = \frac{x\,dx}{x^2}$; $\frac{du}{\mathrm{tg}\,u} = \frac{dx}{x}$
делим на $(\mathrm{tg}\,u\cdot x^2)$

$\int\frac{du}{\mathrm{tg}\,u} = \int\frac{dx}{x}$; $\int\frac{\cos u}{\sin u}du = \ln|x| + C_1$

$\ln|\sin x| = \ln|x| + \ln|C|$ $\quad C\in\mathbb{R}$

$\sin u = x \cdot C_2$; $u = \arcsin x \cdot C_2$; $\frac{y}{x} = \arcsin x \cdot C_2$

$y = x \cdot \arcsin x\, C_2$

При делении на $x^2 \operatorname{tg} u$ теряем решение (проверка)

$\operatorname{tg} u = 0$ $u = \pi k$ $\frac{y}{x} = \pi k \to y = \pi k x$ — является решением (подстановка в урие)

Окончательно: $\begin{cases} y_{общ} = x \cdot \arcsin x \cdot C \\ y = \pi k x \end{cases}$ $k \neq 0$ (т.к. $\ln \frac{y}{x}$)

№ 9.57

$3x^4 y^2 dy = (4x^6 - y^6)dx$; $3x^4 y^2 \frac{dy}{dx} = 4x^6 - y^6$

$u = \frac{y}{x}$ $y = ux$ $y' = xu' + u$

$3x^4 \cdot u^2 x^2 (xu' + u) = 4x^6 - u^6 x^6$;

$3x^6 u^2 (xu' + u) = x^6 (4 - u^6)$ делим на x^6 $x \neq 0$

$3u^2 x u' + 3u^3 = 4 - u^6$; $u^6 + 3u^3 - 4 = -3u^2 x \frac{du}{dx}$

Делим на $(u^6 + 3u^3 - 4) \cdot x$

$-\frac{dx}{x} = \frac{3u^2 du}{u^6 + 3u^3 - 4}$; Интегрируем:

$-\int \frac{dx}{x} = \int \frac{3u^2 du}{u^6 + 3u^3 - 4}$; $-\ln|x| = \int \frac{du^3}{\left(u^3 + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}}$

$C_1 + \ln|x| = \int \frac{du^3}{\frac{25}{4} - \left(u^3 + \frac{3}{2}\right)^2}$;

$\ln|x| + \ln C_2 = \frac{1}{2 \cdot \frac{5}{2}} \ln \frac{u^3 + \frac{3}{2} + \frac{5}{2}}{u^3 + \frac{3}{2} - \frac{5}{2}}$ $\boxed{u = \frac{y}{x}}$

$5\ln|x| + 5\ln C_2 = \ln \frac{u^3 + 4}{u^3 - 1}$

$x^5 \cdot C_3 = \frac{u^3 + 4}{u^3 - 1}$; $\frac{\frac{y^3}{x^3} + 4}{\frac{y^3}{x^3} - 1} = x^5 C_3$

$C_3 = C_2^5$

$y^3 + 4x^3 = (y^3 - x^3)\, x^5 C_3$

При делении на $(u^6 + 3u^3 - 4) \cdot x$ теряем решение $u^6 + 3u^3 - 4 = 0$ $u_1^3 = 1$ $u_2^3 = -4$

$u_1^3 = 1$ $\frac{y}{x} = u \to y = x$; $u_2^3 = -4$ $\frac{y}{x} = u \to y = -\sqrt[3]{4}\, x$

не яв. решением урия яв. решени.

Окончательно: общее решение

$\begin{cases} y^3 + 4x^3 = (y^3 - x^3)\, x^5 \cdot C \\ y = -\sqrt[3]{4}\, x \end{cases}$

№ 9.64

$xy' = y \ln \frac{y}{x}$ $\quad y(1) = 1$ ← Задача Коши (начальные условия)

$\frac{y}{x} = u \quad y = xu \quad y' = xu' + u$

$x(xu' + u) = x \cdot u \cdot \ln u$

$x^2 u' + xu = xu \ln u; \quad x^2 u' = x(u \ln u - u)$

$xu' = u \ln u - u; \quad x \frac{du}{dx} = u \ln u - u$

Делим на $(u \ln u - u) \cdot x$; $x \neq 0$

$\frac{du}{u \ln u - u} = \frac{dx}{x}$

Интегрируем: $\int \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \int \frac{dx}{x}$

$\ln|\ln|u| - 1| = \ln|x| + C_1 \qquad C_1 = \ln|C_2|$

$\boxed{\ln|u| - 1 = x \cdot C_2} \qquad C_2 \neq 0$ не явл. решением

При делении теряем решение $u \ln u - u = 0$

$u(\ln u - 1) = 0 \quad u = 0 \quad u = \frac{y}{x} \to y = 0$

$\ln u - 1 = 0 \quad \ln u = 1 \quad u = e \to y = x e$ решение

Общее решение $\ln|\frac{y}{x}| - 1 = xC \to \boxed{y_o = x e^{1 + x \cdot C}}$

$y = x \cdot e$ (при $C = 0$) C-любое

Частное решение $y(1) = 1$ Ответ:

$\ln \frac{y}{x} - 1 = xC$

$\ln \frac{1}{1} - 1 = xC \to C = -1 \to \boxed{y_{час.} = x e^{1 - x}}$

$x = 1 \quad y = 1$

$\left|\ln \frac{y}{x} - 1\right| = e^{\ln|x| + C_1} \qquad \left|\ln \left|\frac{y}{x}\right| - 1\right| = e^{\ln|x| + C_1}$

$\left|\ln \frac{1}{1} - 1\right| = e^{\ln 1 + C_1}; \quad 1 = e^{C_1} \quad e^{C_1} = +1$

$C_1 = 0$

№ 9.66

$(y + \sqrt{x^2 + y^2})dx - x\,dy = 0 \qquad y(1) = 0$

$u = \frac{y}{x} \quad y = u \cdot x \quad y' = xu' + u$

$(u \cdot x + \sqrt{x^2 + u^2 \cdot x^2}) - x(xu' + u) = 0$

$\cancel{ux} + x\sqrt{1 + u^2} = x^2 u' + \cancel{xu}; \quad \sqrt{1 + u^2} = x \frac{du}{dx}$

Делим на $x\sqrt{1 + u^2}$ $\quad 1 + u^2 \neq 0$ - решений не теряем

$x = 0$ - не явл. решением

$\frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{dx}{x}$

Интегрируем: $\int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \int \frac{dx}{x}$

$\ln(u + \sqrt{u^2 + 1}) = \ln|x| + C_1; \quad \ln(u + \sqrt{u^2 + 1}) = \ln|x| + \ln C_2$

$u + \sqrt{u^2 + 1} = x C_2; \quad \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2} + 1} = x C_2$

$y + \sqrt{y^2 + x^2} = x^2 C_2; \quad \sqrt{y^2 + x^2} = x^2 C_2 - y$

$\cancel{y^2} + x^2 = x^4 C_2^2 - 2x^2 C_2 y + \cancel{y^2}$

Общее решение $y = \frac{x^4 C^2 - x^2}{2x^2 C} = \frac{1}{2C}(x^2 C^2 - 1)$

Частное решение $y(1) = 0$: $0 = \frac{1}{2C}(C^2 - 1) \to C = 1$

$y_{част} = \frac{1}{2}(x^2 \ldots$

Ответ