Интегрирование линейных дифференциальных уравнений и уравнений Бернулли.

1) Линейное ДУ $\boxed{y' + P(x)y = Q(x)}$ или $\boxed{y' = P(x)y + Q(x)}$

$P(x)$ $Q(x)$ — непрерывные ф-ции

Здесь x — аргумент

Приведение!

В частности уравнение $\boxed{y' + P(x)\cdot y = 0}$ наз. линейным однородным уравнением $(Q(x) = 0)$

Методы решения

а) метод вариации постоянных

решаем соответствующее однородное ур-ние, его решение $y_{одн} = C\, e^{-\int P(x)dx}$ (метод Лагранжа)

А решение неоднородного ур-ния будем искать в виде $\boxed{y = C(x)\, e^{-\int P(x)dx}}$

б) метод подстановки ("u на v") (метод Бернулли)

положим $y(x) = u(x)\cdot v(x)$ (это спец. запись метода вариации постоянных)

Замечание: в ряде случаев ДУ 1-го порядка является линейным не относительно y, а относительно x, т.е. можно записать

$$\frac{dx}{dy} + F(y)\cdot x = R(y) \to x' + F(y)x = R(y)$$ — здесь y — аргумент

метод решения этого уравнения тот же, но x и y меняются ролями: y — аргумент, а $x = x(y)$ — неизвестная ф-ция.

2) Уравнение Бернулли.

$\boxed{y' + P(x)y = Q(x)y^n}$ $n \neq 0$ $n \neq 1$ x — аргумент

$P(x)$ $Q(x)$ — непрерывные ф-ции от x.

1) Сводится к линейному подстановкой $z = y^{1-n}$ $z(x) = y^{1-n}$

2) Ур-ние так же можно решить методом подстановки $y = u(x)\cdot v(x)$ — лучше решать этим методом!

3) Метод Лагранжа

Решение ЛДУ 1-го порядка

$$y_{общ} = \underbrace{y_{оо}}_{\text{общее решение соответствующего однородного д.у.}} + \underbrace{y_{ч.н.}}_{\text{частное решение всего д.у.}}$$

Если $x' + F(y)x = R(y)x^m$ $(m \neq 0,\ m \neq 1)$, то y — аргумент

②

№2786 Линейное д.у.

$\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = x^3$ Два способа решения.

Ⅰ Метод Лагранжа

1) соответств. однородное $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = 0$

$\frac{dy}{y} = -\frac{2dx}{x}$ $\ln|y| = -2\ln|x| + c_1 \ln e$

$y = \frac{C_1}{x^2}$ $c = \pm e^{c_1}$

2) пусть $y_{он} = \frac{C(x)}{x^2}$

$y' = \frac{C'x^2 - C\,2x}{x^4}$

$\frac{C'x^2 - C\,2x}{x^4} + \frac{2C}{x^3} = x^3$ $\frac{C'}{x^2} = x^3$ $C'(x) = x^5$

$C(x) = \int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C_2$

$$\boxed{y = \frac{C(x)}{x^2} = \frac{x^4}{6} + \frac{C_2}{x^2}}$$

Ⅱ $y = u(x)v(x)$ метод „uv"

$u'v + uv' + \frac{2uv}{x} = x^3$

$v\left(u' + \frac{2u}{x}\right) + uv' = x^3$

$\frac{du}{dx} + \frac{2u}{x} = 0$ $\frac{du}{u} = -\frac{2dx}{x}$

$\ln|u| = -2\ln|x| + C_1$

$\ln|u| = \ln x^{-2} + \ln e^{C_1}$

$u = \frac{C_2}{x^2} \to u = \frac{1}{x^2}$

$\frac{1}{x^2}v' = x^3$; $\frac{dv}{dx} = x^5$

$v = \frac{x^6}{6} + C_3$

$y = \frac{1}{x^2}\left(\frac{x^6}{6} + C_3\right)$

№2787

$(1+y^2)dx = (\sqrt{1+y^2}\sin y - xy)dy$

$x'_y + \frac{y}{1+y^2}x = \frac{\sin y}{\sqrt{1+y^2}}$

Метод Лагранжа

1) Однородное

$x'_y + \frac{y \cdot x}{1+y^2} = 0$ $\frac{dx}{x} = -\frac{y\,dy}{1+y^2}$

$\ln|x| = -\frac{1}{2}\ln|1+y^2| + c_2 \ln e$

$x = \frac{C_1}{\sqrt{1+y^2}}$, где $c_1 = \pm e^{c_2}$

2) $x = \frac{C_1(y)}{\sqrt{1+y^2}}$ $x' = \frac{C_1'\sqrt{1+y^2} - C_1\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}}{1+y^2}$

$\frac{C_1'(1+y^2) - C_1 y}{(1+y^2)^{3/2}} + \frac{C_1 y}{(1+y^2)^{3/2}} = \frac{\sin y}{(1+y^2)^{\frac{1}{2}}}$

$\frac{C_1'}{(1+y^2)^{1/2}} = \frac{\sin y}{(1+y^2)^{\frac{1}{2}}}$ $C_1'(y) = \sin y$

$C_1(y) = \int \sin y\,dy = -\cos y + C_2$

$x = \frac{-\cos y + C_2}{\sqrt{1+y^2}} = -\frac{\cos y}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{C_2}{\sqrt{1+y^2}}$

$$\boxed{x\sqrt{1+y^2} + \cos y = C_2}$$

№2790 $\quad$ 1ый способ („UV") $\quad$ ③

$$y' - \frac{y}{1-x^2} - 1 - x = 0 \qquad \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases}$$

$$y' - \frac{1}{1-x^2}\,y = x+1$$

Пусть: $y = u(x)\,v(x)$ $\qquad y' = u'v + uv'$

$$u'v + uv' - \frac{1}{1-x^2}\,uv = x+1$$

$$v\left(u' - \frac{u}{1-x^2}\right) + uv' = x+1 \qquad (*)$$

$$\left.\begin{aligned} v\left(u' - \frac{u}{1-x^2}\right) &= 0 \\ uv' &= x+1 \end{aligned}\right\} (*)$$

Ищем $u(x)$ так, чтобы $u' - \frac{u}{1-x^2} = 0$

$$\frac{du}{dx} = \frac{u}{1-x^2} \qquad \frac{du}{u} = \frac{dx}{1-x^2}$$ Ищем частное $u(x)$

$$\ln u = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$ ← здесь без модулей! без const! (т.к. ищем какое-то одно частное $u(x)$)

$$u = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$u_{\text{част}} = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

подставляем в ур-ние (*) и находим $V(x)$ в общем виде!

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,v' = x+1 \qquad \frac{dv}{dx} = \sqrt{(x+1)(1-x)}$$

$$v = \int\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{x}{2} + C.$$

$$y_0 = u\cdot v = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\left(\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{x}{2} + C\right)$$

$$0 = 1\left(0 + \frac{1}{2}\arcsin 0 + C\right) \qquad C = 0$$

$$\boxed{y_{\text{част}} = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin\frac{x}{2}\right)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}$$

<u>метод вариации</u> (метод Лагранжа)

$$y' - \frac{y}{1-x^2} = 0 \qquad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{1-x^2} \qquad \ln|y| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c_1\ln e$$

$$y = C_2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$y_{\text{общ}} = C_2(x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$C_2'\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C_2\frac{1}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{\overbrace{\left[1-x-(1+x)(-1)\right]}^{1-x+1+x=2}}{(1-x)^2} - \frac{C_2}{(1-x^2)}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = x+1$$

$$C_2'\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \frac{C_2\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1+x}\,(1-x)^2} - \frac{C_2\sqrt{1+x}}{(1-x^2)\sqrt{1-x}} = x+1$$

$$C_2'\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \frac{C_2}{(1+x)^{\frac{1}{2}}(1-x)^{3/2}} - \frac{C_2}{(1+x)^{\frac{1}{2}}(1-x)^{3/2}} = x+1$$

$$C_2(x) = \int(x+1)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx = \int\sqrt{(1+x)(1-x)}\,dx = \int\sqrt{1-x^2}\,dx \; ----$$

и затем подставим $C_2(x)$ в $y_{\text{общее}}$ → ответ.

№2844 (4)

$y' + y\cos x = \sin x\cos x$ — линейное ДУ относительно y и y'

Метод Лагранжа

1) Однор. $y' + y\cos x = 0$ $\quad \frac{dy}{dx} = -y\cos x$

$\int\frac{dy}{y} = -\int\cos x\,dx \qquad \ln|y| = -\sin x + \ln C_1' \qquad C_1' \neq 0$

$\ln|y\,C_1'| = -\sin x \qquad y\,C_1 = e^{-\sin x} \qquad C_1 = \mp C_1'$

$y = \frac{1}{C_1}e^{-\sin x} = C_2 e^{-\sin x} \qquad C_2 = \frac{1}{C_1}$

2) неоднор. ур. ние

$y_{ч.н.} = C_2(x)e^{-\sin x} \qquad y' = C_2' e^{-\sin x} - C_2 e^{-\sin x}\cos x$

$C_2' e^{-\sin x} - \cancel{C_2\cos x\, e^{-\sin x}} + \cancel{C_2 e^{-\sin x}\cos x} = \sin x\cos x$

$C_2 = \int\frac{\sin x\cos x}{e^{-\sin x}}dx = \int e^{\sin x}\sin x\cos x\,dx =$

$= \int e^{\sin x}\sin x\,d\sin x = \int_{(\sin x = t)} e^t\,t\,dt = \left| \begin{matrix} t = u & du = dt \\ v = \int e^t dt = e^t \end{matrix} \right| =$

$= te^t - \int e^t dt = te^t - e^t + C_3 =$

$= \sin x\, e^{\sin x} - e^{\sin x} + C_3$

$y = C_2(x)\cdot e^{-\sin x} = (\sin x\, e^{\sin x} - e^{\sin x} + C_3)e^{-\sin x} =$

$= \sin x - 1 + C_3 e^{-\sin x} = y$

№2856

$y'_x(x + \sin y) = 1 \longrightarrow x + \sin y = \frac{1}{y'_x} \rightarrow \frac{dx}{dy} = x + \sin y$

$x'_y - x = -\sin y$ — линейное ДУ относительно x и x'

$x = u(y)\cdot v(y) \qquad x' = u'v + uv'$

$u'v + uv' - u\cdot v = -\sin y$

$\boxed{v(u' - u) + uv' = -\sin y}$ (*) $\longrightarrow \begin{cases} u' - u = 0 \\ uv' = -\sin y \end{cases}$

$u' - u = 0 \qquad \frac{du}{dy} = u \qquad \frac{du}{u} = dy$

$\ln u = y \qquad u_{ч} = e^y$

$u_{част} = e^y$

Подставим в (*)

$e^y v' = -\sin y \qquad \frac{dv}{dy} = -\frac{\sin y}{e^y}$

$v = -\int\frac{\sin y}{e^y}dy = -\int e^{-y}\sin y\,dy = \frac{1}{2}(\cos y\, e^{-y} + \sin y\, e^{-y}) + C$

по частям 2 раза

$x = u\cdot v = e^y\frac{1}{2}(\cos y\, e^{-y} + \sin y\, e^{-y}) + C\cdot e^y$

Ур-ние Бернулли

№2794

$$y\,dx + \left(x - \frac{1}{2}x^3 y\right)dy = 0$$

$$\boxed{x'_y + \frac{x}{y} = \frac{1}{2}x^3}$$ ← y аргумент

Способ (а) $x = u(y)\cdot v(y)$ $\quad x' = u'v + u\cdot v'$

$$u'v + uv' + \frac{uv}{y} = \frac{x^3}{2}$$

$$v\left(u' + \frac{u}{y}\right) + uv' = \frac{u^3v^3}{2} \longrightarrow \begin{cases} u' + \frac{u}{y} = 0 \\ uv' = \frac{u^3v^3}{2} \end{cases} (*)$$

Пусть $u' + \frac{u}{y} = 0$ $\quad \frac{du}{dy} = -\frac{u}{y}$ $\quad \frac{du}{u} = -\frac{dy}{y}$

$\ln u = -\ln y$; $\quad \ln u = \ln y^{-1}$

$u = \frac{1}{y}$

$u_{\text{част.}} = \frac{1}{y}$

подставим в $(*)$:

$$\frac{1}{y}v' = \frac{v^3}{2y^3} \qquad \frac{dv}{v^3} = \frac{dy}{y^2} \qquad v \neq 0 \longrightarrow x \neq 0$$

но $x = 0$ решение

$$-\frac{1}{2v^2} = -\frac{1}{y} + C_2$$

$$\frac{1}{2v^2} = \frac{1}{y} - C_2 \qquad v^2 = \frac{1}{2\left(\frac{1}{y} - C_2\right)} = \frac{y}{2(1 - C_2 y)}$$

$$v = \pm\sqrt{\frac{y}{2(1 - C_2 y)}}$$

$$x_{\text{общ.}} = u(y)v(y) = \frac{1}{y}\sqrt{\frac{y}{2(1 - C_2 y)}} \longrightarrow x^2 = \frac{y}{y^2(2 - 2C_2 y)}$$

$$x^2 = \frac{1}{y^2}\frac{y}{(2(1 - C_2 y))} = \frac{1}{2y - C_2 y^2}; \quad \boxed{x^2 = \frac{1}{2\left(y - \frac{C_2}{2}y^2\right)}}$$

общий интеграл

Способ (б)

Делим $x' + \frac{x}{y} = \frac{1}{2}x^3$ на x^3 $\quad dz = \frac{-2}{x^3}dx$

$$\frac{1}{x^3}x' + \frac{1}{yx^2} = \frac{1}{2}$$ обозначаем $z = \frac{1}{x^2} \to x^2 = \frac{1}{z}$

$$\cancel{\frac{1}{x^3}\frac{dx}{dy} + \frac{1}{yx^2} = \frac{1}{y}} \qquad \frac{dz}{dx} = -\frac{2}{x^3} \qquad -\frac{dz}{2} = \frac{dx}{x^3}$$

$$-\frac{dz}{2dy} + \frac{1}{y\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{2} \qquad \frac{dz}{dy} - \frac{2z}{y} = -1 \quad \text{ЛДУ}$$

$\frac{dx}{x^3} = -\frac{dz}{2}$

№2792

$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = -xy^2$ — ур-ние Бернулли дus(?)

способ (а)

$y = u(x)v(x)$ $y' = u'v + uv'$

$\boxed{\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{xy} = -x}$

$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = -xu^2v^2$

$v\left(u' + \frac{u}{x}\right) + uv' = -xu^2v^2$ $\longrightarrow \begin{cases} u' - \frac{u}{x} = 0 \\ uv' = -xu^2v^2 \end{cases}$ (*)

$u' + \frac{u}{x} = 0$ $\int \frac{du}{u} = -\int \frac{dx}{x}$ $\ln u = -\ln x$

$u = \frac{1}{x}$

Берём $u_{\text{част}} = \frac{1}{x}$

и подставляем в ур-ние (*)

$\frac{1}{x}v' = -x\frac{1}{x^2}v^2$ $\frac{dv}{v^2} = dx$ $-\frac{1}{v} = -x - C_2$

$v = \frac{1}{x+C_2}$

$y = u(x)v(x) = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x+C_2} = \frac{1}{x(x+C_2)}$ $\boxed{y(x^2+C_2x) = 1}$ общий интеграл

искусств. метод

способ (б)

$\frac{dy}{y^2dx} + \frac{1}{xy} = -x$ $\frac{1}{y} = z$ $\frac{dz}{dy} = -\frac{1}{y^2} \to dy = -y^2dz$

$y = \frac{1}{z}$

$-\frac{\cancel{y^2}dz}{\cancel{y^2}dx} + \frac{z}{x} = -x$ $dz = -\frac{1}{y^2}dy$, $dy = -y^2dz$

$\frac{dz}{dx} - \frac{z}{x} = x$ — линейное ур-ние

Однородное

$\frac{dz}{dx} - \frac{z}{x} = 0$ $\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}$

$\ln|z| = \ln|x| + \ln|C_1'|$ $C_1' \neq 0$

$z = C_1x$ $C_1 = \pm C_1'$

Пусть $z_{\text{одн}} = C_1(x)\cdot x$ $z' = C_1'x + C_1$

$C_1'x + \cancel{C_1} - \cancel{\frac{C_1x}{x}} = x$ $C_1(x) = \int dx = x + C_2$

$z = C_1(x)\cdot x = x^2 + C_2x$

$z = \frac{1}{y} \longrightarrow \boxed{y = \frac{1}{z} = \frac{1}{x^2+C_2x}}$

способ (в) — метод вариации

$\frac{dy}{y^2dx} + \frac{1}{xy} = -x$

Однородное: $\frac{dy}{y^2dx} + \frac{1}{xy} = 0$ $\frac{dy}{ydx} = -\frac{1}{x}$ " $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \to y = \frac{C_1}{x}$

пусть $y_{\text{одн}} = \frac{C_1(x)}{x} \longrightarrow \frac{1}{\frac{C_1^2}{x^2}}\cdot\frac{C_1'x - C_1}{x^2} + \frac{1}{x\cdot\frac{C_1}{x}} = -x$

$$-\frac{C_1' x - C_1}{C_1^2} + \frac{1}{C_1} = -x$$

$$\frac{C_1' x}{C_1^2} - \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_1} = -x \qquad \frac{dC_1}{C_1^2 dx} = -1; \quad \frac{dC_1}{C_1^2} = -dx$$

$$-\frac{1}{C_1(x)} = -x - C_2; \quad \frac{1}{C_1(x)} = x + C_2$$

$$C_1(x) = \frac{1}{x + C_2}$$

$$y_{общ} = \frac{C_1(x)}{x} = \frac{1}{x(x+C_2)}$$

№2793

$$2xy\frac{dy}{dx} - y^2 + x = 0$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{2x} = -\frac{1}{2y} \text{ — ур-ние Бернулли } m = -1$$

Умножаю на y: $y\frac{dy}{dx} - \frac{y^2}{2x} = -\frac{1}{2}$ Метод подстановки

Обозначим $z = y^2$ $\quad \frac{dz}{dy} = 2y \quad dy = \frac{dz}{2y}$

$$y\frac{dz}{2y\,dx} - \frac{z}{2x} = -\frac{1}{2} \longrightarrow (*)\ \frac{dz}{dx} - \frac{z}{x} = -\frac{1}{2} \text{ — линейное}$$

Однородное: $\frac{dz}{dx} - \frac{z}{x} = 0 \quad \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}$

$$\ln|z| = \ln|x| + C_1 \ln e$$

$$z = \pm e^{C_1} x \qquad z = C_2 x$$

$z_{общ} = C_2(x) \cdot x$ и подставляем в $(*)$

$$C_2' x + C_2 - C_2 = -\frac{1}{2} \qquad C_2' = -\frac{1}{2x} \qquad C_2 = -\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}$$

$$C_2 = -\frac{1}{2}\ln|x| + C_3$$

$$z = y^2 = \left(-\frac{1}{2}\ln|x| + C_3\right)x$$

Ответ: $y^2 = x\ln\frac{C}{x}$

№2795

$$3x\,dy = y(1 + x\sin x - 3y^3\sin x)\,dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + xy\sin x - 3y^4\sin x}{3x}$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1 + x\sin x}{3x}y = -\frac{\sin x}{x}y^4 \text{ — ур-ние Бернулли}$$

$$y = u(x)\,v(x) \ \ldots$$

$y' = \frac{y}{x+y^3}$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+y^3}$ $\qquad \boxed{\frac{dx}{dy} = \frac{x+y^3}{y}}$

№ 9.74

$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} + y^2$ — ур-ние линейно относит. $\frac{dx}{dy}$ и x

а) однородное ур-ние

$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y}$ Делим на $x \neq 0$

$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$

$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y}$ $\qquad \ln|x| = \ln|y| + \ln|C_1|$ $\quad C_1 \neq 0$

$x = y \cdot C_1$

При делении на x теряем решение $\boxed{x=0}$ при $C_1 = 0$

$x_{одн.} = y\,C$ $\qquad$ если $C \neq 0$, то $y = C$

осн. решения

б) неоднородное ур-ние

решение ищем в виде

$x_{неод.} = C(y) \cdot y$

$x' = C'(y) \cdot y + C(y)$

$C'(y) \cdot y + C(y) = \frac{C(y) \cdot \cancel{y}}{\cancel{y}} + y^2 \Rightarrow C'(y) = y$

$C(y) = \int y\,dy = \frac{y^2}{2} + C$

Решение имеет вид: $\begin{cases} x_{неод} = y\left(\frac{y^2}{2} + C\right) = Cy + \frac{1}{2}y^3 \\ y = 0 \end{cases}$

№ 9.75

$(1+y^2)\,dx = (\operatorname{arctg} y - x)\,dy$

$(1+y^2)\frac{dx}{dy} = \operatorname{arctg} y - x$ — линейное относительно $\frac{dx}{dy}$ и x

Однородное ур-ние

$(1+y^2)\frac{dx}{dy} = -x$ $\qquad$ Делим на $x(1+y^2)$

решения не теряем $1+y^2 \neq 0$

$\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{1+y^2}$

Интегрируем: $\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{dy}{1+y^2}$

$\ln|x| = -\operatorname{arctg} y + \ln C$

$\ln \frac{x}{C} = -\operatorname{arctg} y \rightarrow x_{одн.} = C\,e^{-\operatorname{arctg} y}$

Решаем неоднородное уравнение; его решение ищем в виде

$x_н = C(y) \cdot e^{-\operatorname{arctg} y}$

$x' = C'(y)\,e^{-\operatorname{arctg} y} - C(y)\,e^{-\operatorname{arctg} y}\frac{1}{1+y^2}$

и подставляем в исходное ур-ние

$(1+y^2)\left[C'(y)\,e^{-\operatorname{arctg} y} - C(y)\,e^{-\operatorname{arctg} y}\cdot\frac{1}{1+y^2}\right] = \operatorname{arctg} y - C(y)\,e^{-\operatorname{arctg} y}$

$$(1+y^2)c'(y)e^{-\operatorname{arctg} y} - \cancel{c(y)e^{-\operatorname{arctg} y}} = \operatorname{arctg} y - \cancel{c(y)e^{-\operatorname{arctg} x}}$$

$$c'(y) = \frac{\operatorname{arctg} y}{(1+y^2)e^{-\operatorname{arctg} y}} = \frac{\operatorname{arctg} y \cdot e^{\operatorname{arctg} y}}{(1+y^2)}$$

$$c(y) = \int \frac{\operatorname{arctg} y \cdot e^{\operatorname{arctg} y}}{(1+y^2)} dy = \int \operatorname{arctg} y \cdot e^{\operatorname{arctg} y}\, d(\operatorname{arctg} y) =$$

$$= \left|\operatorname{arctg} y = t\right| = \int t\, e^t dt = \left| \begin{array}{l} t = u \quad dt = du \\ e^t dt = dv \\ v = e^t \end{array} \right| = t \cdot e^t - \int e^t dt =$$

$$= t \cdot e^t - e^t + c = \operatorname{arctg} y \cdot e^{\operatorname{arctg} y} - e^{\operatorname{arctg} y} + c$$

$$x_{\text{неодн.}} = \left(\operatorname{arctg} y \cdot e^{\operatorname{arctg} y} - e^{\operatorname{arctg} y} + c\right) e^{-\operatorname{arctg} y} =$$

$$= \operatorname{arctg} y - 1 + c\, e^{-\operatorname{arctg} y} = x_{\text{неодн.}}$$

№ 9.83 Линейное д. у. <u>Найти частное решение</u>

$$y' + y \operatorname{tg} x = 1/\cos x \qquad y(0) = 0$$

а) Решаем соответствующее однородное уравнение

$y' + y\operatorname{tg} x = 0$; $\frac{dy}{dx} = -y \operatorname{tg} x$ Делим на y

$\frac{dy}{y} = -\operatorname{tg} x \cdot dx$ Интегрируем: $\int \frac{dy}{y} = -\int \operatorname{tg} x\, dx$

$\int \frac{dy}{y} = +\int \frac{d\cos x}{\cos x}$; $\ln|y| = \ln|\cos x| + \ln c_1$ $c_1 \neq 0$

при делении на y теряем решение $y = 0$

$y = c_1 \cdot \cos x$. при $y = 0$ $c_1 = 0$

Общее решение однородного уравнения $\boxed{y = C \cdot \cos x}$

C – любое

б) Решение неоднородного уравнения ищем в виде $y = C(x)\cos x$

$$y' = c'(x) \cdot \cos x - C(x)\sin x$$

$$c'(x)\cos x - \cancel{c(x)\sin x} + \cancel{c(x)\cos x \cdot \operatorname{tg} x} = \frac{1}{\cos x}$$

$$c'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad c(x) = \int \frac{dx}{\cos^2 x} \qquad c(x) = \operatorname{tg} x + c$$

$$y_{\text{неод.}} = (\operatorname{tg} x + c)\cos x$$

Частное решение: $y(0) = 0$ $\quad 0 = (0 + c) \cdot 1 \rightarrow c = 0$

$$y_{\text{частн.}} = \operatorname{tg} x \cdot \cos x = \sin x$$

$$\ln|y| = \ln|\cos x| + \ln e^{c} \longrightarrow y = \pm e^{c_1} \cos x = c_2 \cos x$$

№ 9.87

$dy = (y^2 e^x - y)\,dx \longleftrightarrow y' = y^2 e^x - y$

пусть $\underline{y = u(x)\cdot v(x)}$; $y' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\,v'(x)$

$u'\cdot v + uv' = u^2 v^2\cdot e^x - uv$

$u'v + u(v'+v) = u^2 v^2 e^x$ (*)

т.к. y есть произведение 2-х ф-ций, то одну выбираем произвольно:

!

Выберем $v(x)$ так, чтобы выражение в скобках $(v'+v)=0$. Для этого было бы достаточно, чтобы $v(x)$ было бы каким-либо частным решением ур-ния $v'+v=0$

$\frac{dv}{dx} + v = 0$ делим на v (теряя тем самым $y=0$)

$\frac{dv}{v} = -dx$, $\int\frac{dv}{v} = -\int dx$; $\ln v = -x + C_1$

при $C_1 = 0$ (например) получаем частное решение ур-ния $v'+v=0$ $v_ч = e^{-x}$

подставляем $v_ч = e^{-x}$ в (*)

$e^{-x}\frac{du}{dx} = u^2 e^{-2x}\cdot e^x \to \frac{du}{dx} = u^2$; $\int\frac{du}{u^2} = \int dx$

делим на u (теряем $y=0$) [illegible]

$-\frac{1}{u} = x + C_2 \to u = -\frac{1}{x+C_2} = \frac{1}{C_2' - x}$

$$\boxed{y_{общ.} = u\cdot v = \frac{e^{-x}}{C-x} \quad y=0}$$ C - любое

№ 9.89

$y' = y\,ctg\,x + \frac{y^3}{\sin x}$

пусть $y = u(x)\,v(x) \to y' = u'v + v'u$

$u'v + v'u = u\cdot v\cdot ctg\,x + \frac{u^3 v^3}{\sin x}$

Группируем $v(u' - u\,ctg\,x) + v'u = \frac{u^3 v^3}{\sin x}$ (*)

Выбираем $u(x)$ так, чтобы выражение $(u' - u\,ctg\,x) = 0$. Для этого достаточно чтобы $u(x)$ было каким-либо частным решением $(u' - u\,ctg\,x) = 0$

$\frac{du}{dx} - u\,ctg\,x = 0$; $\frac{du}{dx} = u\,ctg\,x$; делим на u (теряя тем самым $y=0$)

$\int\frac{du}{u} = \int ctg\,x\,dx$; $\ln|u| = \ln|\sin x| + C$

при $C = 0$ (например) $u_{част.} = \sin x$

подставляем $u = \sin x$ в (*)

$\frac{dv}{dx}\cdot\sin x = \frac{\sin^3 x\cdot v^3}{\sin x}$; $\frac{dv}{dx} = \sin x\, v^3$ [illegible]

Делим на v^3 (теряем $y=0$)

$\frac{dv}{v^3} = \sin x\,dx$ $\int\frac{dv}{v^3} = \int\sin x\,dx$; $-\frac{1}{2v^2} = -\cos x + C_1$

$\frac{1}{\ldots} = \cos x - C \to v = \frac{1}{\ldots}$ $y_{общ.} = \frac{\sin x}{\ldots}$