Вариант 0(2)

(1)

1] $(y^2+2y+x^2)y'+2x=0$

Надо дать сначала классификацию ур-ния. Для этого надо „построить" для одного из 4^x рассматриваемых видов д у

$y'=\frac{dy}{dx}$ — это символ!

$$(y^2+2y+x^2)\frac{dy}{dx}+2x=0$$

$$(y^2+2y+x^2)dy+2x\,dx=0$$

$$y^2+2y+x^2+\frac{2x\,dx}{dy}=0$$

$$2x\frac{dx}{dy}+y^2+2y+x^2=0 \quad : 2x\neq0$$

$$\frac{dx}{dy}+\frac{y^2}{2x}+\frac{y}{x}+\frac{x}{2}=0$$

Уравнение выстраивается относительно x и x':

$$\frac{dx}{dy}+\underbrace{\frac{x}{2}}_{P(y)}=-\frac{y^2}{2x}-\underbrace{\frac{y}{x}}_{Q(y)}$$

здесь $m=-1$

(*) $\frac{dx}{dy}+\frac{1}{2}x=-\left(\frac{y^2}{2}+y\right)\frac{1}{x}$ — ур-ние Бернулли

$\boxed{x'+P(y)x=Q(y)x^m}$

$m\neq0,\ m\neq1$

здесь x-ф-ция!

y-аргумент

Пусть $x=u(y)\cdot v(y)$

y-аргумент!

$x'=u'v+uv'$

здесь $P(y)=\frac{1}{2}$

В (*) подставим:

$$u'v+uv'+\frac{1}{2}uv=-\left(\frac{y^2}{2}+y\right)\frac{1}{uv}$$

$$u'v+u\left(v'+\frac{v}{2}\right)=-\left(\frac{y^2}{2}+y\right)\frac{1}{uv}$$

Пусть $v'+\frac{v}{2}=0$ (это д.у. относительно v и v')

$$(**)\begin{cases} v'+\frac{v}{2}=0 & а) \\ u'v=-\left(\frac{y^2}{2}+y\right)\frac{1}{uv} & б) \end{cases}$$

а) $v'+\frac{v}{2}=0$ $\quad \frac{dv}{dy}=-\frac{v}{2}$; $\quad \frac{dv}{v}=-\frac{dy}{2}$.

$$\int\frac{dv}{v}=-\frac{1}{2}\int dy \rightarrow \ln v=-\frac{1}{2}y$$

(без const и модуля, т.к. ищем частное решение для v)

$$v=e^{-\frac{1}{2}y}$$

При этом должна выполнится система (**)

б) $u'e^{-\frac{1}{2}y}=-\left(\frac{y^2}{2}+y\right)\frac{1}{ue^{-\frac{1}{2}y}}$ $\quad :e^{-\frac{1}{2}y}\neq 0$

$$\frac{du}{dy}=-\left(\frac{y^2+2y}{2}\right)\frac{1}{ue^{-y}}$$

$$u\,du=-\frac{y^2+2y}{2e^{-y}}$$

$$\int u\,du=-\frac{1}{2}\int(y^2+2y)e^{y}dy$$

$$\int u\,du=-\frac{1}{2}\int y^2e^{y}dy-\int ye^{y}dy$$

(8)

(в) $\int y^2 e^y dy = \left| \begin{array}{l} u = y^2 \quad du = 2y\,dy \\ dv = e^y dy \to v = \int e^y dy = e^y \end{array} \right| =$ ③

здесь u и v из формулы интегрирования по частям.

$= y^2 e^y - \int e^y \cdot 2y\,dy = y^2 e^y - 2\int y e^y dy$

$\int u\,du = -\frac{1}{2}\left(y^2 e^y - 2\int y e^y dy\right) - \int y e^y dy$

$\int u\,du = -\frac{1}{2} y^2 e^y + \cancel{\int y e^y dy} - \cancel{\int y e^y dy}$

$\frac{u^2}{2} = -\frac{1}{2} y^2 e^y + \frac{c}{2}$ — удобно, но можно и просто c

$u^2 = c - y^2 e^y$

$x = u(y)\,v(y)$

Чтобы не выражать u, т.к. u^2, то $u = \pm\sqrt{c - y^2 e^y}$, ответ запишем $x^2 = u^2(y)\,v^2(y)$

$x^2 = (c - y^2 e^y)\,e^{-y}$

$x^2 = c e^{-y} - y^2$ — это общий интеграл

Вначале делили на $2x \neq 0$

А если $x = 0$? Для проверки подставим в исходное уравнение!

$x=0$

$$\begin{cases} (y^2+2y+x^2)\,y'+2x=0 \\ (y^2+2y+0)\,y'+0=0 \\ (y^2+2y)\,y' \not\equiv 0 \end{cases} \rightarrow x=0$$ не является решением исходного д. у. (не обращает его в верное тождество)

Ответ: $\underline{x^2=Ce^{-y}-y^2}$

3] $\underbrace{(1+x)\,y}_{P(x,y)=p_1(x)\,p_2(y)}dx+\underbrace{(1-y)\,x}_{Q(x,y)=q_1(x)\cdot q_2(y)}dy=0;\quad y(1)=e \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=e \end{cases}$

Ур-ние с разделяющимися переменными.

Разделяем переменные.

Делим $x\neq 0;\ y\neq 0$

$$\frac{(1-y)\cancel{x}\,dy}{\cancel{x}y}+\frac{(1+x)\cancel{y}\,dx}{x\cancel{y}}=0$$

$\left(\frac{1}{y}-1\right)dy+\left(\frac{1}{x}+1\right)dx=0$ — ур-ние с разделенными переменными.

Интегрируем:

$$\int\left(\frac{1}{y}-1\right)dy+\int\left(\frac{1}{x}+1\right)dx=0$$

$$\int\frac{dy}{y}-\int dy+\int\frac{dx}{x}+\int dx=0$$

$\underline{\ln|y|-y+\ln|x|+x=C}$ — общий интеграл д. у.

Задача Коши: нач. условия $\begin{cases} x=1 \\ y=e \end{cases}$

подставим в общий интеграл:

$\underbrace{\ln e}_{1} - e + \underbrace{\ln 1}_{0} + 1 = C \rightarrow C = 2 - e$ 5

подставляем в общий интеграл:

$\ln|y| - y + \ln|x| + x = 2 - e$

$\ln|xy| - y + x = 2 - e$ – частный интеграл (ответ)

Здесь проверку $x \neq 0$, $y \neq 0$ не проводим, т. к. решаем задачу Коши (т. е. ищем частное решение)

Если надо было бы провести проверку на потерю частных решений $x = 0$, $y = 0$, то $x = 0$ подставили в начальное ур-ние, а затем и $y = 0$ подставили бы в начальное ур-ние. Если они обратили бы ур-ние верное тождество ($\equiv$) то их дописали бы в ответ вида: $\ln|xy| - y + x = C$, $x = 0$, $y = 0$ (если надо найти общее решение или общий интеграл)