Семинар 14

ИУ-РЛ-БМТ , ИиДУ, модуль 2

Задачи для подготовки к контрольной работе

«Дифференциальные уравнения 1-го порядка»

Образцы билетов контрольной работы

Вариант 0. ИУ-РЛ-БМТ, , ИиДУ, КР2 «Дифференциальные уравнения 1-го порядка»

Классифицировать каждое из уравнений и найти его общий интеграл:

1. $\dfrac{dx}{x(y-1)} + \dfrac{dy}{y(x+2)} = 0;$ *(3 балла)*

2. $(y^4 + 2x)y' = y.$ *(3 балла)*

Классифицировать каждое из уравнений и решить задачу Коши:

3. $2y' \operatorname{ctg} x - 4y = -y^2 \sin 2x, \quad y(0) = 1;$ *(3 балла)*

4. $(3x^2 - y^2)\, dy = 2xy\, dx, \quad y(2) = 1.$ *(3 балла)*

Вариант 0. ИУ-РЛ-БМТ, ИиДУ, КР2 «Дифференциальные уравнения 1-го порядка»

Классифицировать каждое из уравнений и найти его общий интеграл:

1. $(y^2 + 2y + x^2)y' + 2x = 0;$ *(3 балла)*

2. $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}.$ *(3 балла)*

Классифицировать каждое из уравнений и решить задачу Коши:

3. $(1+x)y\, dx + (1-y)x\, dy = 0, \quad y(1) = e;$ *(3 балла)*

4. $y' + y = e^{\;x}, \quad y(0) = 2.$ *(3 балла)*

В КР № 2 „ДУ $1^{ого}$ порядка"

<u>4 вида</u> д.у. $1^{ого}$ порядка

1) с разделяющимися переменными
2) однородные д.у.
3) линейное д.у
4) ур-ние Бернулли.

В каждом варианте по одному виду, всего 4 задачи

Оценка: 3 балла за каждую задачу

Общая оценка 7 баллов - min
12 баллов - max.

Семинар 14 Подготовка к КР №2 „ДУ 1ого порядка" (1)

Вариант 0

Классифицировать ур-ние и найти его общий интеграл или общее решение

1] $\frac{dx}{x(y-1)}+\frac{dy}{y(x+2)}=0$ $\quad x\neq 0 \quad y\neq 1 \quad y\neq 0 \quad x\neq -2$

$\frac{dy}{y(x+2)}=-\frac{dx}{x(y-1)}$ ← ур-ние с разделяющимися переменными

Домножаем на $(y-1)$ и $(x+2)$

$\frac{y-1}{y}dy+\frac{x+2}{x}dx=0$

$\int\frac{y-1}{y}dy+\int\frac{x+2}{x}dx=0$

$\int\left(1-\frac{1}{y}\right)dy+\int\left(1+\frac{2}{x}\right)dx=0$

$y-\ln|y|+x+2\ln|x|=0$ ← общий интеграл д.у.

2] $(y^4+2x)y'=y$

Надо „построить" уравнение

делить на (y^4+2x) не удобно

делим на $y\neq 0$

$\frac{(y^4+2x)}{y}\frac{dy}{dx}=1$; $\quad \frac{dx}{dy}=y^3+\frac{2}{y}x$ →

$x'-\frac{2}{y}x=y^3$ — линейное относительно x и x'

$x'+P(y)x=Q(y)$

Метод „uv": пусть $x=u(y)v(y)$ ②

y-аргумент

$$x'-\frac{2}{y}x=y^3$$

$$(u'v+uv')-\frac{2}{y}uv=y^3$$

$$u'v+uv'-\frac{2}{y}uv=y^3$$

$$u'v+u\underbrace{\left(v'-\frac{2v}{y}\right)}=y^3 \longrightarrow \begin{cases} v'-\frac{2v}{y}=0 & (a)\\ u'v=y^3 & (б)\end{cases}$$

д.у. относительно v и v'

пусть $v'-\frac{2v}{y}=0 \to$ и найдем какое-нибудь одно решение для v

а) $v'-\frac{2v}{y}=0 \to \frac{dv}{dy}=\frac{2v}{y} \to \frac{dv}{v}=\frac{2dy}{y} \to$

$\int\frac{dv}{v}=2\int\frac{dy}{y} \longrightarrow \ln v=2\ln y$

(без модулей без const т.к. ищем какое-нибудь частное решение v)

$\ln v=\ln y^2 \longrightarrow v_{част}=y^2$

б) $u'v=y^3$

$\frac{du}{dy}y^2=y^3 \to \frac{du}{dy}=y \to du=ydy \to$

$\to \int du=\int y\,dy \to u=\frac{y^2}{2}+C$

$x=u(y)v(y) \longrightarrow x=\left(\frac{y^2}{2}+C\right)y^2$

Делили на $y\neq 0$

А если $y=0$, поставим в исходное ур-ние $(y^4+2x)y'=y$

$(0+2x)0=0 \quad 0\equiv 0 \to$

$y=0$ - решение

Ответ: $x=\left(\frac{y^2}{2}+C\right)y^2;\ y=0$

3] Решить задачу Коши

$$2y'\operatorname{ctg}x - 4y = -y^2\sin 2x;\quad y(0)=1 \leftrightarrow \begin{cases}x=0\\ y=1\end{cases}$$

„Освобождаем" y', делим ур-ние на $2\operatorname{ctg}x \ne 0$.

$$y' - \frac{4y}{2\operatorname{ctg}x} = -\frac{y^2\sin 2x}{2\operatorname{ctg}x};$$

$$y' - \frac{2}{\operatorname{ctg}x}y = -\frac{\cancel{2}\sin x\cdot\cancel{\cos x}}{\frac{\cancel{2}\cos x}{\sin x}}y^2;$$

$$\boxed{y' - \frac{2}{\operatorname{ctg}x}\cdot y = -\sin^2 x\cdot y^2}$$ – ур-ние Бернулли относительно y и y'

$(y' + R(x)y = Q(x)y^m,\ m\ne 0;\ m\ne 1)$

Метод „uv": пусть $\underline{y = u(x)v(x)}$

$$y' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

$$\underbrace{u'v+uv'}_{y'} - \frac{2}{\operatorname{ctg}x}uv = -\sin^2 x\, u^2v^2$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{2v}{\operatorname{ctg}x}\right) = -\sin^2 x\cdot u^2v^2 \Rightarrow$$

пусть $v' - \frac{2v}{\operatorname{ctg}x} = 0$ – диф. ур-ние относительно v и v'

$$\begin{cases} v' - \dfrac{2v}{\operatorname{ctg}x} = 0 & (а)\\ u'v = -\sin^2 x\cdot u^2v^2 & (б)\end{cases}$$

а) $v' - \frac{2v}{\operatorname{ctg}x} = 0;\ \frac{dv}{dx} = \frac{2v}{\operatorname{ctg}x} \to \frac{dv}{v} = \frac{2dx}{\operatorname{ctg}x} \to$

$$\int\frac{dv}{v} = 2\int\frac{dx}{\operatorname{ctg}x} \to \int\frac{dv}{v} = 2\int\frac{\sin x\,dx}{\cos x} \to$$

$$\int\frac{dv}{v} = -2\int\frac{d\cos x}{\cos x}\qquad \ln v = -2\ln(\cos x)$$

(без модуля, без const! ищем $\underline{частное}$ решение v)

$\ln V = \ln(\cos x)^{-2} \rightarrow V = \frac{1}{\cos^2 x}$

подставим V в б):

$u'\frac{1}{\cos^2 x} = -\sin^2 x \cdot u^2 \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^2$

$\frac{du}{dx} = -u^2 \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$; $\frac{du}{u^2} = -\frac{\sin^2 x\, dx}{\cos^2 x} \rightarrow$

$\int\frac{du}{u^2} = -\int\frac{\sin^2 x\, dx}{\cos^2 x}$;

$-\frac{1}{u} = -\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx$;

$-\frac{1}{u} = -\int\frac{dx}{\cos^2 x} + \int dx$;

$-\frac{1}{u} = -tg\, x + x + C$ Здесь $C = const$ обязательна!

$\frac{1}{u} = tg\, x - x - C$;

$u = \frac{1}{(tg\, x - x - C)}$

Собираем ответ: $y = u(x)V(x)$

$y = \frac{1}{(tg\, x - x - C)} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$ – общее решение

Задача Коши: начальные условия (Н.У)

$y(0) = 1 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$

подставим $x = 0$, $y = 1$ в общее решение y

$1 = \frac{1}{(\underbrace{tg\,0}_{\rightarrow 0} - 0 - C)\cos^2 0}$;

$1 = \frac{1}{-C \cdot 1} \rightarrow C = -1$ и подставим в y общее!

$y_{част} = \frac{1}{(tg\, x - x + 1)\cos^2 x}$ ← ответ

Внимание! При решении задачи Коши не надо проверять на потерю решения ф-ции, на которые мы делим по ходу решения задачи.

5

4) $(3x^2-y^2)dy = 2xy\,dx; \quad y(2)=1$

Однородное ур-ние

Ур-ние $Q(x,y)dx + P(x,y)dy = 0$ называется однородным д.у. 1-ого порядка, если ф-ции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ являются однородными одного порядка, т.е.

$$P(kx,ky) = k^s P(x,y) \quad и$$

$$Q(kx,ky) = k^s Q(x,y); \quad k \neq 0$$

$$P(x,y) = 3x^2 - y^2; \quad P(kx,ky) = 3(kx)^2 - (ky)^2 =$$

$$= 3k^2x^2 - k^2y^2 = k^2\underbrace{(3x^2-y^2)}_{P(x,y)} = k^2 P(x,y)$$

$$Q = 2xy; \quad Q(kx;ky) = 2(kx)(ky) = k^2 2xy =$$

$$= k^2 \cdot Q(x,y)$$

$$x^2\left(3 - \frac{y^2}{x^2}\right)\frac{dy}{dx} = 2xy \qquad : x^2 \neq 0$$

$$\left(3 - \frac{y^2}{x^2}\right) y' = \frac{2y}{x}$$

Пусть $u(x) = \frac{y}{x} \to y = u(x)\cdot x$

$(x \neq 0)$ $\quad y' = u'(x)\cdot x + u(x)\cdot 1$

$$(3-u^2)\underbrace{(u'x+u)}_{y'} = 2u$$

$$(3-u^2)xu' + (3-u^2)u = 2u$$

$$(3-u^2)x\,u' + 3u - u^3 = 2u$$ ⑥

$$(3-u^2)x\,\frac{du}{dx} = u^3 - u$$ – ур-ние с разделяющимися переменными

делим на $(u^3-u)\neq 0;\ x\neq 0$

$$\frac{(3-u^2)}{u^3-u}\,du = \frac{dx}{x}; \rightarrow \int\frac{(3-u^2)\,du}{u(u^2-1)} = \int\frac{dx}{x}$$

$$\frac{3-u^2}{u(u^2-1)} = \frac{3-u^2}{u(u-1)(u+1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u-1} + \frac{C}{u+1} =$$

$$= \frac{A(u-1)(u+1) + Bu(u+1) + Cu(u-1)}{u(u-1)(u+1)}$$

$$3-u^2 = A(u-1)(u+1) + Bu(u+1) + Cu(u-1)$$

$$\left.\begin{aligned} u=0;&\quad 3=-A\\ u=1;&\quad 2=2B\\ u=-1;&\quad 2=2C \end{aligned}\right\}\quad A=-3\quad B=1\quad C=1$$

$$\int\frac{-3}{u}\,du + \int\frac{du}{u-1} + \int\frac{du}{u+1} = \int\frac{dx}{x}$$

$$-3\ln|u| + \ln|u-1| + \ln|u+1| = \ln|x| + \ln|C| \quad C_1$$

Здесь удобно за const брать $\ln|C|$

$$\ln\left|\frac{u^2-1}{u^3}\right| = \ln|Cx|$$

$$\left|\frac{u^2-1}{u^3}\right| = |Cx| \rightarrow \frac{u^2-1}{u^3} = \pm Cx \rightarrow$$

$$\frac{u^2-1}{u^3} = \tilde{C}x, \text{ где } \tilde{C} = \pm C$$

но $u = \frac{y}{x} \rightarrow \dfrac{\frac{y^2}{x^2}-1}{\frac{y^3}{x^3}} = \tilde{C}x \rightarrow$

$$\left(\frac{y^2}{x^2}-1\right)x^3 = \tilde{C}xy^2 \rightarrow xy^2 - x^3 = \tilde{C}xy^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow y^2 - x^2 = \tilde{C}y^2$$ —— общий интеграл

Задача Коши: $y(2)=1 \to \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ (7)

подставим в общий интеграл

$1^2-2^2=\tilde{C}\cdot 1^2 \longrightarrow \tilde{C}=-3;$

И подставим в общий интеграл

$y^2-x^2=-3y^2$ — частный интеграл

$\boxed{4y^2-x^2=0}$ (можно оставить ответ в таком виде, хотя легко выразить y)

ответ:

Дифференциальные уравнения.

1. Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.

(семинар 12)

1. $x - yy' = 1$	2. $(1+y^2)dx = xdy$	3. $(1+y)dx - (1-x)dy = 0$
4. $\sqrt{1+y^2}\,dx = xydy$	5. $xy + \sqrt{1-x^2}\,y' = 0$	6. $y' \cdot \ln y = y$
7. $(1+y^2)xdx + (1+x^2)dy = 0$	8. $y\sin xdx + \cos x \ln ydy = 0$	9. $x(y^2+1) + (x^2y - y)y' = 0$
10. $x\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0$	11. $x + yy' = 0$	12. $e^y(1+x^2)dy - 2x(1+e^y)dx = 0$
13. $(x^2-1)dy - 2xydx = 0$	14. $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2}\,dy = 0$	15. $(1+y^2)dx - xydy = 0$
16. $y\ln ydx + xdy = 0$	17. $tgx \cdot \sin^2 y + \cos x \cdot tgy \cdot y' = 0$	18. $y' = 2^{x+y}$
19. $x(y+1)dx - (x^2+1)ydy = 0$	20. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1+y^2}{(1+x^2)xy}$	21. $e^{y-2x}dy = 4xdx$
22. $(1+y^2)dx - xy(1+x^2)dy = 0$	23. $y'\sin x - y\cos x = 0$	24. $(y+xy)dx + (x-xy)dy = 0$
25. $y'\cos^2 x = \dfrac{y}{\ln y}$	26. $(1+y^2)dx + 2xydy = 0$	27. $(\sqrt{xy} + \sqrt{x})y' - y = 0$
28. $2^{x+y} + 3^{x-2y} \cdot y' = 0$	29. $(1+x)^3 dy - (y-2)^2 dx = 0$	30. $ydx + \sin^2 xdy = 0$

2. Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка,

(семинар 13)

1. $x \cdot y' + 2y = x^2$	2. $y' - \dfrac{y}{x+4} = (x+4)^3$	3. $y' + 2xy = 2x \cdot e^{-x^2}$
4. $y' - \dfrac{2y}{x+1} = (x+1)^{0,5}$	5. $y' + y \cdot tgx = \sec x$	6. $(x^2-1) \cdot y' + (x+1)y = x-1$
7. $y' + 2xy = 2x^3 \cdot y^3$	8. $y' - \dfrac{1-2x}{x^2}y = 1$	9. $y' + y = e^{-x} \cdot \cos x$
10. $y' + 2y = (x^2+1)y^{-2}$	11. $y' + \dfrac{y}{x} = x^2y^2$	12. $e^x \cdot y' + e^x \cdot y = y$
13. $y' - y \cdot ctgx = \sin x$	14. $2x \cdot y' - y = 3x^2$	15. $y' - \dfrac{y}{x+2} = x^2 + 4x + 5$
16. $(4-x^2) \cdot y' + xy = 16$	17. $(x+1) \cdot y' + 4xy = 3$	18. $y' + y \cdot \cos x = \sin x \cdot \cos x$
19. $(1-x^2) \cdot y' + xy = 1$	20. $(x^4+x) \cdot y' + (2x^3-1)y = \dfrac{x^3-2}{x}$	21. $y' - 2xy = 1 - 2x^2$
22. $y' - y \cdot tgx \cdot \sec x = 1$	23. $xy' - \dfrac{y}{x+1} = x$	24. $x \cdot y' + y - e^x = 0$
25. $y' - y = 2e^x \cdot y^3$	26. $(x^2-x) \cdot y' - (x+1)y + 4 = 0$	27. $x \cdot y' + y = x^2 + 3x + 2$
28. $(x^2-x) \cdot y' + y = 2x^3 - x^2$	29. $y' + x^2y = x^2$	30. $y' - \dfrac{2y}{x+1} = e^x(1+x)^2$