1 Дифференциальные уравнения высших порядков. Основные понятия.
Интегрирование уравнений, допускающих понижение порядка.

(1) Опр ДУ n-ого порядка наз. уравнение вида $\boxed{F(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}) = 0}$ или $y^{(n)} = f(x, y, y', y'' \ldots y^{(n-1)})$

x - аргумент, y - неизвестная ф-ция

Общим решением наз. ф-ция $y = f(x, C_1, C_2 \ldots C_n)$
C_i - произвольные постоянные
Решение в неявном виде $\Phi(x, y, C_1 \ldots C_n) = 0$ наз. общим интегралом ДУ

Задача Коши для ДУ n-ого порядка состоит в том, чтобы найти решение данного ДУ, которое при заданном значении аргумента $x = x_0$ принимает заданные значения $y_0, y_0', y_0'' \ldots y_0^{(n-1)}$ т. е. удовлетворяет начальным условиям:
$y|_{x=x_0} = y_0,\ y'|_{x=x_0} = y_0' \ldots,\ y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}$

Геометрически задача Коши формулируется след. образом: среди всех интегральных кривых данного ДУ выделить ту, которая проходит через заданную точку (x_0, y_0) и для которой при $x = x_0$ имеют место равенства
$y'(x_0) = y_0'$ $y''(x_0) = y_0'' \ldots$ $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$
Решение задачи Коши наз. частным решением уравнения.

Виды ДУ n-ого порядка, допускающие понижение порядка:

а) $y^{(n)} = f(x)$
Общее решение ДУ может быть получено путем n последовательных интегрирований

б) $F[x, y^{(n-1)}, y^{(n)}] = 0$
ДУ не содержит явным образом y и ее производных до (n-1) порядка
Метод: замена $\boxed{y^{(n-1)} = P(x)}$

в) $F(y, y' \ldots y^{(n)}) = 0$
x явно не содержится
метод: замена $\boxed{y' = P(y)}$ $y = y(x)$ $y'' = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}$ P_y' $P = y'$

г) $F(x, y, y' \ldots y^{(n)}) = 0$ - однородное относительно функции и ее производных
Метод: подстановка $\boxed{y' = y \cdot z(x)}$
$F(x, ky, ky' \ldots ky^{(n)}) = k^n F(x, y, y', \ldots y^{(n)})$

(2)

№2921 нет x явно

$$y' = p(y) = p(y(x))$$
$$y'' = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot p = p'_y \cdot p$$
$$y' = p(y)$$

$$yy'' - y'(1+y') = 0$$

$y' = p(y)$ $\quad y'' = p\frac{dp}{dy}$

$$yp\frac{dp}{dy} - p(y)(1+p(y)) = 0$$

Делим на $p(y) \neq 0$ → проверка: $p(y) = 0 \to y = const$
$y = C_1$ — решение (подставили в исходное)

$$y\frac{dp}{dy} - (1+p) = 0 \;:\; 1+p \neq 0, \; y \neq 0$$

$$\frac{dp}{1+p} = \frac{dy}{y}$$ с разделяющимися

$1+p \neq 0$, $y \neq 0$ → проверка: $p = -1 \to y' = -1 \to$
$y = -x$ — решение

$y = 0$ — решение
(т.к. выше $y = C_1$ — решение, $y = 0$ при $C_1 = 0$ входит в $y = C_1$)

$$\int\frac{dp}{1+p} = \int\frac{dy}{y}$$

$$\ln|1+p| = \ln|y| + C_2\cdot\ln e$$

$$|1+p| = e^{C_2}|y|$$

$C_3 = \pm e^{C_2}$

$1+p = C_3\cdot y$, $C_3 \neq 0$

$p = y'$

$1 + y' = C_3 y$; $\quad 1 + \frac{dy}{dx} = C_3 y$ $\quad \frac{dy}{dx} = C_3 y - 1 \;:\; C_3 y - 1 \neq 0$

$y \neq \frac{1}{C_3}$
$y \neq const$

$$\int\frac{dy}{C_3 y - 1} = \int dx$$

$$\frac{1}{C_3}\ln|C_3 y - 1| = x + C_4$$

Ответ: $\ln|C_3 y - 1| = C_3 x + C_3 C_4$,
$y = -x$,
$y = const$.

Необязательно. Можно преобразовать:
$|C_3 y - 1| = e^{C_3 x + C_3 C_4}$
$|C_3 y - 1| = e^{C_3 C_4}\cdot e^{C_3 x}$
$C_3 y - 1 = C_5 e^{C_3 x}$
$C_3 y = C_5 e^{C_3 x} + 1$
$$\boxed{y = \frac{C_5}{C_3}e^{C_3 x} + \frac{1}{C_3}}$$

№2924 нет y явно

$$xy'' = y'\ln\frac{y'}{x} \qquad x \neq 0 \text{ — ОДЗ!}$$

$y' = p(x)$ $\quad y'' = p' = \frac{dp}{dx}$

$$xp' = p\ln\frac{p}{x}$$

$$p' = \frac{p}{x}\ln\frac{p}{x} \text{ — однородное}$$

$u(x) = \frac{p}{x} \to p = ux \quad p' = u'x + u \quad (x \neq 0)$

$$u'x + u = u\ln u$$

$\frac{du}{dx}x = u(\ln u - 1)$: Делим на $x\cdot u(\ln u - 1) \neq 0$

подставить

проверка 1) $x \neq 0$.
2) $u = 0 \to p = 0 \to y = const$ не решение т.к. $\ln 0$!
3) $\ln u - 1 = 0 \to u = e \to p = ex \to y' = ex$
$y = e\frac{x^2}{2} + C$

$$\int\frac{du}{u(\ln u - 1)} = \int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|\ln u - 1| = \ln|x| + C_1\cdot\ln e$$

$|\ln u - 1| = e^{C_1}\cdot|x|$; $\quad (\ln u - 1) = C_2 x$, где $C_2 = \pm e^{C_1}$

$\ln u - 1 = C_2 x$; $\ln u - \ln e = C_2 x$

$\ln \frac{u}{e} = C_2 x$ $\quad \frac{u}{e} = e^{C_2 x}$ $\quad u = e^{C_2 x + 1}$

$u(x) = \frac{p}{x} \to \frac{p}{x} = e^{C_2 x + 1}$ $\quad p = x e^{C_2 x + 1}$ $\quad$ но $p = y'$!

$p = \frac{dy}{dx} = x e^{C_2 x + 1}$ $\quad \int dy = \int x e^{C_2 x + 1} dx$

$$y = e \int x e^{C_2 x} dx = \left| \begin{matrix} x = u & du = dx \\ v = \int e^{C_2 x} dx = \frac{1}{C_2} e^{C_2 x} \end{matrix} \right| = e \left[\frac{x}{C_2} e^{C_2 x} - \frac{1}{C_2} \int e^{C_2 x} dx \right] =$$

$$= \frac{x}{C_2} e^{C_2 x + 1} - \frac{e}{C_2^2} e^{C_2 x} + C_3; \quad \boxed{y = e^{C_2 x + 1} \left(\frac{x}{C_2} - \frac{1}{C_2^2} \right) + C_3}$$

проверка: для $y = e \frac{x^2}{2} + C$ — решение?

подставим в ур-ие: $y'' = e$ $\quad y' = ex$

$x \cdot e = ex \ln \frac{ex}{x} \to$ явл. решением (проверяли и выше)

Ответ: $y = e^{C_2 x + 1} \left(\frac{x}{C_2} - \frac{1}{C_2^2} \right) + C_3$,

$y = e \cdot \frac{x^2}{2} + C$

№2926 (нет y явно, x явно есть)

Необязательная задача

ДУ 3его порядка, явно содержит x и допускает понижение порядка.

$x y''' + y'' = 1 + x$

$y'' = p(x)$ $\quad y''' = p'$

$x p' + p = 1 + x$

$p' + \frac{1}{x} p = \frac{1+x}{x}$ — линейное относительно p' и p

$p = u(x) v(x)$ $\quad p' = u'v + uv'$

$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = \frac{1+x}{x}$

$\left(u' + \frac{u}{x} \right) v + uv' = \frac{1+x}{x}$ (*)

Делим на $u \neq 0$

если $u = 0 \to p = 0$. $y'' = p(x)$

$y'' = 0$ $\quad y' = C_1$ $\quad y = C_1 x + C_2$

не решение

$u' + \frac{u}{x} = 0$ $\quad \frac{du}{dx} = -\frac{u}{x}$

$\frac{du}{u} = -\frac{dx}{x}$; $\ln u = -\ln x$

$u = \frac{1}{x} \longrightarrow u_{част} = \frac{1}{x}$

подставим $u = \frac{1}{x}$ в (*):

$0 + \frac{1}{x} v' = \frac{1+x}{x}$; $\frac{dv}{dx} = 1 + x$; $dv = (1+x) dx$, $v = \int (1+x) dx \to$

$v = x + \frac{x^2}{2} + C_3$

$p = u \cdot v = \frac{1}{x} \left(\frac{x^2}{2} + x + C_3 \right) = \frac{x}{2} + 1 + \frac{C_3}{x}$

$p = y'$; $\quad y' = \int \left(\frac{x}{2} + 1 + \frac{C_3}{x} \right) dx = \frac{x^2}{4} + x + C_3 \ln|x| + C_4$

$y = \int \left(\frac{x^2}{4} + x + C_3 \ln|x| + C_4 \right) dx = \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} + C_3 x \ln|x| - C_3 x + C_4 x + C_5$

Ответ: $y = \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} + C_3 x \ln|x| + C_6 x + C_5$, где $C_6 = C_4 - C_3$

(4)

№2935

$yy'' + y'^2 - y'^3 \ln y = 0$ ОДЗ $y \neq 0$. $y > 0$

$\frac{dy}{dx} = \boxed{y' = p(y)}$ $y'' = p\frac{dy}{dy}$

$yp\frac{dp}{dy} + p^2 - p^3 \ln y = 0.$ Делим на $p \neq 0$ $p = 0$ $y' = 0$ $y = const > 0$ (решение)

$y\frac{dp}{dy} + p - p^2 \ln y = 0 \quad : y \neq 0$

$\boxed{\frac{dp}{dy} + \frac{p}{y} = \frac{\ln y}{y} p^2}$ (ур-ние Бернулли)

$p = U(y)V(y)$ $p' = U'V + UV'$

$U'V + UV' + \frac{UV}{y} = \frac{\ln y}{y} U^2 V^2$

$\left(U'V + \frac{UV}{y}\right) + UV' = \frac{\ln y}{y} U^2 V^2$

$(*)\ V\left(U' + \frac{U}{y}\right) + UV' = \frac{\ln y}{y} U^2 V^2$

$U' + \frac{U}{y} = 0 \quad \frac{dU}{dy} = -\frac{U}{y}$ Делим на $U \neq 0$ $U = 0$ $p = 0$ $y' = 0$ $y = const$ (решение)

$\frac{dU}{U} = -\frac{dy}{y}; \quad \ln U = -\ln y;$

$\ln U = \ln y^{-1} \to U = \frac{1}{y} \longrightarrow U_{част.} = \frac{1}{y}$

подставим $U_{част.}$ в $(*)$

$0 + \frac{1}{\cancel{y}} V' = \frac{\ln y}{\cancel{y}} \cdot \frac{V^2}{y^2} \longrightarrow \frac{dV}{dy} = \frac{\ln y}{y^2} V^2 \longrightarrow \frac{dV}{V^2} = \frac{\ln y}{y^2} dy$

$\int \frac{dV}{V^2} = \int \frac{\ln y}{y^2} dy$ удобно

$-\frac{1}{V} = \left(-\frac{\ln y}{y} - \frac{1}{y}\right) - C_3; \quad \frac{1}{V} = \frac{\ln y + 1 + C_3 y}{y}$

$V = \frac{y}{\ln y + 1 + C_3 y}$

$p = U(y)V(y) = \frac{1}{\cancel{y}} \cdot \frac{\cancel{y}}{\ln y + 1 + C_3 y} = \frac{1}{\ln y + 1 + C_3 y}$

$p = y' \longrightarrow y' = \frac{1}{\ln y + 1 + C_3 y}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln y + 1 + C_3 y} \longrightarrow\ !$

$\longrightarrow \int(\ln y + 1 + C_3 y)\,dy = \int dx$

$x = y\ln y - y + y + C_3\frac{y^2}{2} + C_4$

$\int \ln y\, dy = \left| \begin{matrix} \ln y = u \\ du = \frac{dy}{y} \\ v = y \end{matrix} \right| = y\ln y - \int y\frac{dy}{y} = y\ln y - y$

Ответ: $x = y\ln y + \frac{C_3}{2}y^2 + C_4$,

$y = const > 0$

№2943 (5)

$y^2+y'^2-2yy''=0$ Н.у. $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ y'=1 \end{cases}$ Явно x не присутствует но $y(x)$ — !

$\boxed{y'=p(y)}$; $y''=p\frac{dp}{dy}$

$y^2+p^2-2yp\frac{dp}{dy}=0$ Делим на $2py\neq0$

$\boxed{\frac{dp}{dy}-\frac{p}{2y}=\frac{y}{2p}}$ — ур-ние Бернулли

$p=u(y)v(y)$

$u'v+uv'-\frac{uv}{2y}=\frac{y}{2uv}$

$v\left(u'-\frac{u}{2y}\right)+uv'=\frac{y}{2uv}$ (*) Делим на $u\neq0$

$u'-\frac{u}{2y}=0$ $\frac{du}{dy}=\frac{u}{2y}$ $\frac{du}{u}=\frac{dy}{2y}$; $\ln u=\frac{1}{2}\ln y$

$u=y^{1/2}$

$u=\sqrt{y}$, и в (*)

$u_{\text{час.}}=\sqrt{y}$

$\sqrt{y}\,v'=\frac{y}{2\sqrt{y}v}$; $v'=\frac{1}{2v}$ $\frac{dv}{dy}=\frac{1}{2v}$; $2vdv=dy$

$v^2=y+C_3$ $v=\pm\sqrt{y+C_3}$

$p=u\cdot v=\sqrt{y}\left(\pm\sqrt{y+C_3}\right)=\pm\sqrt{y(y+C_3)}\longrightarrow$ Н.у. $1=+\sqrt{1(1+C_3)}$

т.к. $p=y'=1>0$, то $p=+\sqrt{y(y+C_3)}$ $1=1+C_3$ $\underline{C_3=0}$

$p=y$

$p=y'=y\longrightarrow\frac{dy}{dx}=y$ $\frac{dy}{y}=dx$ $y\neq0$

$\ln|y|=x+C_4$ $|y|=e^{x+C_4}=e^{C_4}e^{x}\to y=\tilde{C}_4e^{x}$

Н.у. $1=e^0\cdot\tilde{C}$ $\tilde{C}_4=1$

Ответ: $\boxed{y_{\text{част}}=e^x}$

№2945

$2y' + (y'^2 - 6x)y'' = 0$ $\begin{cases} y' = 2 \\ y = 0 \\ x = 2 \end{cases}$ Явно x присутствует в уравнении

$\boxed{y' = p(x)}$ $y'' = p'$

$2p + (p^2 - 6x)p' = 0$

$2p = (6x - p^2)\frac{dp}{dx}$

$\frac{dx}{dp} = \frac{6x - p^2}{2p}$

(*) $\boxed{\frac{dx}{dp} - \frac{3}{p}x = -\frac{p}{2}}$ — линейное относ. x и x'_p, p — аргумент

Соответствующее однородное:

$\frac{dx}{dp} - \frac{3}{p}x = 0$ $\frac{3dp}{p} = \frac{dx}{x}$ $\ln|x| = \ln|p|^3 + \ln|C_1| \to$

$\to |x| = |C_1 p^3| \to$ $x = p^3 C_2$, где $C_2 = \pm C_1$

Линейное пусть $x = C_2(p)p^3$ $\frac{dx}{dp} = C_2' p^3 + C_2 3p^2$ и в (*)

$C_2' p^3 + \cancel{3C_2 p^2} - \cancel{\frac{3}{p}C_2 p^3} = -\frac{p}{2}$

$C_2' = -\frac{1}{2p^2}$ $C_2(p) = -\int \frac{1}{2p^2}dp = \frac{1}{2p} + C_3$

тогда $x = C_2(p)p^3 = \left(\frac{1}{2p} + C_3\right)p^3 = \frac{p^2}{2} + C_3 p^3 = x$

Н. у. $\begin{cases} y' = 2 = p \\ x = 2 \end{cases}$ $\frac{2^2}{2} + C_3 2^3 = 2$

$\cancel{2} + C_3 \cdot 8 = \cancel{2}$ $C_3 = 0$

$x = \frac{p^2}{2} \to p = \pm\sqrt{2x}$ но н. усл. $y' = p = 2 > 0$

тогда $p = \sqrt{2x}$

$y' = p = \sqrt{2x}$ $\frac{dy}{dx} = \sqrt{2x} \to dy = \sqrt{2x}\,dx \to$

$\to y = \int\sqrt{2x}\,dx = \sqrt{2}\frac{x^{3/2}}{3/2} + C_4 = \frac{2\sqrt{2}}{3}x^{3/2} + C_4$

Н. усл. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$ $0 = \frac{2\sqrt{2}}{3}2\sqrt{2} + C_4$ $C_4 = -\frac{8}{3}$

Ответ: $y_{част} = \frac{2\sqrt{2}}{3}x^{3/2} - \frac{8}{3}$