Семинар 16.

Интегрирование линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. (1)

(1) Ур-ние вида
$$\boxed{a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0}$$
наз. линейным однородным ДУ с постоянными коэффициентами $a_0, a_1, \ldots a_n$

Алгебраическое ур-ние $a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$ (2)
наз. характеристическим ур-ием ДУ

Частное решения ДУ (1) зависит от вида корней характер. ур-ния:

а) λ простой веществ. корень
частное решение (1) $\longrightarrow e^{\lambda x}$

б) λ — веществ. корень кратности k
частное решения ДУ: $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \ldots, x^{(k-1)}e^{\lambda x}$ — k решений

(*) в) $\lambda = \alpha \pm \beta i$ - простые комплексные сопряженные корни,
частное решение ДУ: $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$

г) $\lambda = \alpha \pm \beta i$ - комплексное сопряженные корни кратности k
частное решение ДУ (k пар):
$e^{\lambda x}\cos\beta x,\ xe^{\lambda x}\cos\beta x, \ldots, x^{k-1}e^{\lambda x}\cos\beta x$
$e^{\lambda x}\sin\beta x,\ xe^{\lambda x}\sin\beta x, \ldots, x^{k-1}e^{\lambda x}\sin\beta x$

Т.о. общее решение ур-ния (1) записывается
$$\boxed{y_{oo} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n}$$, где
$y_1, \ldots y_n$ — n частных решений ДУ (1)

Определителем Вронского (вронскианом) системы ф-ций $y_1(x) \ldots y_n(x)$ наз. определитель
$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & & y_n'(x) \\ & & & \\ y_1^{n-1}(x) & y_2^{n-1}(x) & & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Если система ф-ций $y_1(x) \ldots y_n(x)$ л/з на интервале (a, b), то ее $W(x) \equiv 0$ тождественно всюду на (a, b)
Если хотя бы в одной т. из (a, b) $W(x) \neq 0$, то система ф-ций $y_1(x) \ldots y_n(x)$ л/н

Всякая система из n л/н решений $y_1(x) \ldots y_n(x)$ наз. фундаментальной системой решений этого уравнения
$W(x) \neq 0$ фундаментальной системой решений ДУ на (a, b), где эти решения определены.
Если известна ФСР ДУ, то общее решение ДУ имеет вид $\boxed{y_{oo} = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x)}$

(*) Для $z = \alpha \pm i\beta$: $y_1 = e^{(\alpha + \beta i)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$
$y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$

$\tilde{y}_1 = \frac{y_1 + y_2}{2}$ $\quad \tilde{y}_2 = \frac{y_1 - y_2}{2i}$

(1) $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$ - линейное однородное линейное ур-ние n-ого порядка.

2

Теорема: если ф-ции $y_1 \ldots y_n$ являются л/н. решениями ур-ния (1), то

$$\boxed{y_{oo} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n}$$

C_i - произвольные постоянные.

Л/н $y_1 \ldots y_n$ образуют ФСР ур-ния (1).

Опр. ф-ции $y_1 \ldots y_n$ наз. л./н., если никакая из них линейно не выражается через остальные.

Если $y_1 \ldots y_n$ л/з, то найдутся $C_1 \ldots C_n$ - const, не все равные 0 такие, что для всех x отрезка $[a, b]$ выполняется тождество: $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x) \equiv 0$, $C_i \neq 0$

Опр. Если $y_1(x) \ldots y_n(x)$ - ф-ции от x, то определитель $W(y_1 \ldots y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \vdots & & & \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & \ldots & y_n^{n-1} \end{vmatrix}$ наз. определителем Вронского.

Теорема. Если $y_1 \ldots y_n$ л/з. на $[a, b]$, то $W(y_1 \ldots y_n)$ на $[a, b]$ тождественно $= 0$.

Теорема. Если $W(y_1 \ldots y_n)$, составленный для решений (1), $\neq 0$ при $x = x_0 \in [a, b]$, то он не обращается в 0 ни при каком значении x на этом отрезке.

Частный пример

ур-ние однородное линейное 2-ого порядка

(2) $ay'' + by' + cy = 0$ $a \neq 0$
a, b, c - действительные числа.

$y_{oo} = C_1 y_1 + C_2 y_2$

Будем искать частные решения y_1 и y_2 в виде $y = e^{kx}$ $k = const$

$y' = ke^{kx}$ $y'' = k^2 e^{kx}$

подставляем в ур-ние:

$e^{kx}(ak^2 + bk + c) = 0.$

$e^{kx} \neq 0 \to ak^2 + bk + c = 0$ (*)

Если k будет удовлетворять этому ур-нию (*), то e^{kx} будет решением (2)

(*) наз. характеристическим ур-нием (2)

Схема решения ур-ия (1).

1) Составляем характеристическое ур-ие
$a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + \ldots + a_1 k + a_0 = 0.$

2) находим его корни

3) по характеру корней записываем частные л/н решения. Этих решений будет столько, какова степень характер. ур-ния. (т.е. каков порядок ДУ.)

а). k - простой действительный корень
$y_{част.} = e^{\alpha x}$

б). k действительный корень кратности r
Частные решения: $e^{kx}, xe^{kx}, \ldots x^{r-1}e^{kx}$

в) $k = \alpha \pm \beta i$ - пара комплексных корней
Частные решения: $e^{\alpha x}\cos\beta x$; $e^{\alpha x}\sin\beta x$
Чтобы избавиться от i делаем следующее:

$k_{1} = \alpha \pm i\beta \rightarrow y_{r_1} = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$

$y_{r_2} = e^{(\alpha - \beta i)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$

$\tilde{y}_{r_1} = \frac{y_{r_1} + y_{r_2}}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x$

$\tilde{y}_{r_2} = \frac{y_{r_1} - y_{r_2}}{2i} = e^{\alpha x}\sin\beta x$

г) $k = \alpha \pm \beta i$ кратности s
Частные решения:

пара

$$\underbrace{\begin{matrix} e^{\alpha x}\cos\beta x, & xe^{\alpha x}\cos\beta x & \ldots, & x^{s-1}e^{\alpha x}\cos\beta x \\ e^{\alpha x}\sin\beta x, & xe^{\alpha x}\sin\beta x & \ldots, & x^{s-1}e^{\alpha x}\sin\beta x \end{matrix}}_{s\ пар}$$

№ 9.286 Исследовать на л/з. (4)

$x,\ \ln x$ $\begin{vmatrix} x & \ln x \\ 1 & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = x\frac{1}{x} - \ln x = 1 - \ln x \overset{const}{\neq} 0 \rightarrow$ л/н. ф-ции

При $x = e$ $1 - \ln x = 0$

№ 9.291

$\sin x\ \ \cos x\ \ \sin 2x$

$$\begin{vmatrix} \sin x & \cos x & \sin 2x \\ \cos x & -\sin x & 2\cos 2x \\ -\sin x & -\cos x & -4\sin 2x \end{vmatrix} = 4\sin^2 x \sin 2x - \cos^2 x \sin 2x - \cancel{2\sin x \cos x \cos 2x} - \sin^2 x \sin 2x + \cancel{2\cos x \sin x \cos 2x} + 4\cos^2 x \sin 2x$$

$$= 3\sin^2 x \sin 2x + 3\cos^2 x \sin 2x = 3\sin 2x(\sin^2 x + \cos^2 x) = 3\sin 2x \neq 0$$

$\neq const$ л/н

№ 9.293

$e^x;\ e^{x+1}$ $\begin{vmatrix} e^x & e^{x+1} \\ e^x & e^{x+1} \end{vmatrix} = e^x e^{x+1} - e^x e^{x+1} = 0$ л/з.

или $\frac{e^x}{e^{x+1}} = \frac{1}{e} = const \rightarrow$ л.з., т.е. $e^x = \frac{1}{e} e^{x+1}$

№ 9.294

$x\ 0\ e^x$ $\begin{vmatrix} x & 0 & e^x \\ 1 & 0 & e^x \\ 0 & 0 & e^x \end{vmatrix} = 0$ л/з.

№ 9.298 Составить д. уравнение

x^3, x^4 – фунд. система д.у. $x \neq 0$

общее решение: $y = C_1 x^3 + C_2 x^4 \rightarrow y;\ x^3;\ x^4$ – л/зав. как ф-ция и их $W(x) = 0$

$$\begin{vmatrix} y & x^3 & x^4 \\ y' & 3x^2 & 4x^3 \\ y'' & 6x & 12x^2 \end{vmatrix} = 0;\quad y\cdot 36x^4 + 6x^5 y' + y'' 4x^6 - y''\cdot 3x^6 - 24x^4 y - y'\cdot 12x^5 = x^6 y'' - 6x^5 y' + 12x^4 y = 0$$

$$y'' - \frac{6}{x}y' + \frac{12}{x^2}y = 0$$

$$x^2 y'' - 6xy' + 12y = 0$$

№ 9.301

Фундам. система решений $2x,\ x-2,\ e^x+1$

Общее решение $y = C_1 2x + C_2(x-2) + C_3(e^x+1)$

$$\begin{vmatrix} y & 2x & x-2 & e^x+1 \\ y' & 2 & 1 & e^x \\ y'' & 0 & 0 & e^x \\ y''' & 0 & 0 & e^x \end{vmatrix} = 0 \quad (-1)^{1+4} y''' \begin{vmatrix} 2x & x-2 & e^x+1 \\ 2 & 1 & e^x \\ 0 & 0 & e^x \end{vmatrix} + (-1)^{4+4} e^x \begin{vmatrix} y & 2x & x-2 \\ y' & 2 & 1 \\ y'' & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -y'''(2xe^x - 2e^x(x-2)) + e^x(2xy'' - 2(x-2)y'') = -y'''\cdot 4e^x + 4y''e^x = 0$$

$4e^x(y''' - y'') = 0$ $e^x \neq 0$ $\boxed{y''' - y'' = 0}$

Решение ДУ вместе с частными решениями образует л/з систему $\Rightarrow W(x) = 0$

(6) Составить д.у. и написать общее решение, если корни характеристич. уравнения $\lambda_1 = 3$ $\lambda_2 = -2$

1ый способ.

$y_{общ.} = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x} \to y, e^{3x}, e^{-2x}$ л/зав.

$$\begin{vmatrix} y & e^{3x} & e^{-2x} \\ y' & 3e^{3x} & -2e^{-2x} \\ y'' & 9e^{3x} & 4e^{-2x} \end{vmatrix} = 0 \quad e^{3x} e^{-2x} \begin{vmatrix} y & 1 & 1 \\ y' & 3 & -2 \\ y'' & 9 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$e^{3x} e^{-2x} \neq 0$

$$12y + 9y' - 2y'' - 3y'' - 4y' + 18y = 0$$

$$\boxed{y'' - y' - 6y = 0}$$

2ой способ

λ_1, λ_2 – корни $\to$

$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0$

$(\lambda - 3)(\lambda + 2) = 0$

$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$

характер. ур

$y'' - y' - 6y = 0$

№ 9.317 Составить д.у., если $\lambda_{1,2} = 3 \pm 2i$ – корни характеристич. уравнения

1ый способ

$y_{общ.} = C_1 e^{3x} \cos 2x + C_2 e^{3x} \sin 2x = e^{3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$

$$\begin{vmatrix} y & e^{3x}\cos 2x & e^{3x}\sin 2x \\ y' & 3e^{3x}\cos 2x - 2e^{3x}\sin 2x & 3e^{3x}\sin 2x + 2e^{3x}\cos 2x \\ y'' & 9e^{3x}\cos 2x - 6e^{3x}\sin 2x - 6e^{3x}\sin 2x - 4e^{3x}\cos 2x & 9e^{3x}\sin 2x + 6e^{3x}\cos 2x + 6e^{3x}\cos 2x - 4e^{3x}\sin 2x \end{vmatrix} = 0; \quad e^{3x} e^{3x} \begin{vmatrix} y & \cos 2x & \sin 2x \\ y' & 3\cos 2x - 2\sin 2x & 3\sin 2x + 2\cos 2x \\ y'' & 5\cos 2x - 12\sin 2x & 5\sin 2x + 12\cos 2x \end{vmatrix} = 0$$

$e^{6x} \neq 0$

$$y[(3\cos 2x - 2\sin 2x)(5\sin 2x + 12\cos 2x) - (5\cos 2x - 12\sin 2x)(3\sin 2x + 2\cos 2x)] -$$
$$- y'[\cos 2x(5\sin 2x + 12\cos 2x) - \sin 2x(5\cos 2x - 12\sin 2x)] +$$
$$+ y''[\cos 2x(3\sin 2x + 2\cos 2x) - \sin 2x(3\cos 2x - 2\sin 2x)] = 0$$

$$y[\cancel{15\cos 2x \sin 2x} - 10\sin^2 2x + 36\cos^2 2x \underbrace{- \cancel{15\cos 2x \sin 2x}}_{-24\sin 2x\cos 2x} + 36\sin^2 2x -$$
$$- 10\cos^2 2x + \cancel{24\sin 2x \cos 2x}] - y'[\cancel{5\sin 2x\cos 2x} + 12\cos^2 2x - \cancel{5\sin 2x\cos 2x}$$
$$+ 12\sin^2 2x] + y''[\cancel{3\cos 2x \sin 2x} + 2\cos^2 2x - \cancel{3\sin 2x \cos 2x} + 2\sin^2 2x] = 0$$

$$2y'' - y' \cdot 12 + 26y = 0 \qquad \boxed{y'' - 6y' + 13y = 0}$$

2ой сп.

$[\lambda - (3+2i)][\lambda - (3-2i)] = 0 \to (\lambda - 3 - 2i)(\lambda - 3 + 2i) = 0$

$(\lambda - 3)^2 - 4i^2 = 0; \ \lambda^2 - 6\lambda + 9 + 4 = 0 \to y'' - 6y' + 1$

№ 9.319 Корни характеристич. ур-ния

$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 4$

$y_{общ.} = C_1 + C_2 e^{4x} + C_3 x e^{4x}$

Решение у ДУ вместе с частными решениями образуют л/з систему их $W(x) \equiv 0$

$$\begin{vmatrix} y & 1 & e^{4x} & xe^{4x} \\ y' & 0 & 4e^{4x} & e^{4x} + 4xe^{4x} \\ y'' & 0 & 16e^{4x} & 4e^{4x} + 4e^{4x} + 16xe^{4x} \\ y''' & 0 & 64e^{4x} & 16e^{4x} + 16e^{4x} + 16e^{4x} + 64xe^{4x} \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} y' & 0 & 4e^{4x} & e^{4x}+4xe^{4x} \\ y'' & 0 & 16e^{4x} & 8e^{4x}+16xe^{4x} \\ y''' & 0 & 64e^{4x} & 48e^{4x}+64xe^{4x} \end{vmatrix} = 0; \quad e^{8x}\begin{vmatrix} y' & 0 & 4 & 1+4x \\ y'' & 0 & 16 & 8+16x \\ y''' & 0 & 64 & 48+64x \end{vmatrix} = 0$$

$$(-1)^{1+2}\cdot 1\begin{vmatrix} y' & 4 & 1+4x \\ y'' & 16 & 8+16x \\ y''' & 64 & 48+64x \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}\cdot 0\begin{vmatrix} y & 1 & x \\ y'' & 16 & 8+16x \\ y''' & 64 & 48+64x \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}\cdot 0\begin{vmatrix} y & 1 & x \\ y' & 4 & 1+4x \\ y''' & 64 & 48+64x \end{vmatrix} + (-1)^{4+2}\cdot 0\begin{vmatrix} y & 1 & x \\ y' & 4 & 1+4x \\ y'' & 16 & 8+16x \end{vmatrix}$$

$$-4\begin{vmatrix} y' & 1 & 1+4x \\ y'' & 4 & 8+16x \\ y''' & 16 & 48+64x \end{vmatrix} = 0; \quad -4\left[y'\cdot 4(48+64x) + 16y''(1+4x) + y'''(8+16x) - 4y'''(1+4x) - 16y'(8+16x) - y''(48+64x)\right] = 0$$

$$192y' + \cancel{256xy'} + 16y'' + \cancel{64xy''} + 8y''' + \cancel{16xy'''} - 4y''' - \cancel{16xy'''} - 128y' - \cancel{256xy'} - 48y'' - \cancel{64xy''} = 0$$

$$4y''' - 32y'' + 64y' = 0 \qquad \boxed{y''' - 8y'' + 16y' = 0}$$

<u>2-ой способ</u> $(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)=0$

$(\lambda-0)(\lambda-4)(\lambda-4)=0 \quad \lambda(\lambda^2-8\lambda+16)=0$

$\lambda^3-8\lambda^2+16\lambda=0 \to y'''-8y''+16y'=0$

№ 9.321 <u>Найти общие решения</u>

$y''-2y'-2y=0$

характеристическое уравнение $\lambda^2-2\lambda-2=0$

$\lambda_{12} = 1 \pm\sqrt{1+2} = 1\pm\sqrt{3}$

$\underline{y_{общ.одн.} = C_1 e^{(1+\sqrt{3})x} + C_2 e^{(1-\sqrt{3})x}}$

№ 9.323

$y''-6y'+9y=0$

характеристическое уравнение $\lambda^2-6\lambda+9=0$

$(\lambda-3)^2=0 \qquad \lambda_{12}=3$

$\underline{y_{о.одн.} = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}}$

№ 9.325

$4y''-8y'+5y=0$

$4\lambda^2-8\lambda+5=0$

$\lambda_{12} = \dfrac{8\pm\sqrt{64-80}}{8} = \dfrac{8\pm 4i}{8} = 1\pm\dfrac{1}{2}i$

$\lambda_1 = 1+\frac{1}{2}i \qquad \lambda_2 = 1-\frac{1}{2}i$

$y_{о.о.} = C_1 \underbrace{e^x\cos\frac{x}{2}}_{y_1} + C_2 \underbrace{e^x\sin\frac{x}{2}}_{y_2}$

$\lambda_1 = 1+\frac{1}{2}i \qquad \lambda_2 = 1-\frac{1}{2}i$

$y_1 = e^{1x}\cos\frac{1}{2}x \qquad y_2 = e^{1\cdot x}\sin\frac{1}{2}x$

№9.327

$$y''' - 5y'' + 17y' - 13y = 0$$

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 17\lambda - 13 = 0$$

$\lambda_1 = 1$ (подбор)

$$\begin{array}{r|l} \lambda^3 - 5\lambda^2 + 17\lambda - 13 & \lambda - 1 \\ \lambda^3 - \lambda^2 & \lambda^2 - 4\lambda + 13 \\ -4\lambda^2 + 17\lambda & \\ -4\lambda^2 + 4\lambda & \\ 13\lambda - 13 & \\ 13\lambda - 13 & \\ 0 & \end{array}$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$$

$$\lambda_{23} = 2 \pm \sqrt{4-13} = 2 \pm 3i$$

$\lambda_1 = 1 \to y_1 = e^x$

$\lambda_{23} = 2 \pm 3i \to y_2 = e^{2x}\cos$, $y_3 = e^{2x}\sin$

$$y_{oo} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}\cos 3x + C_3 e^{2x}\sin 3x$$

№9.329

$$y^{IV} + 2y''' + y'' = 0$$

$$\lambda^4 + 2\lambda^3 + \lambda^2 = 0 \qquad \lambda^2(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda^2(\lambda+1)^2$$

$\lambda_{12} = 0 \to y_1 = e^{0x} = 1$, $y_2 = xe^{0x} = x$

$\lambda_{34} = -1 \to y_3 = e^{-1\cdot x}$, $y_4 = xe^{-x}$

$$y_{oo} = C_1 e^{0x} + C_2 x e^{0x} + C_3 e^{-x} + C_4 x e^{-x} =$$
$$= C_1 + C_2 x + (C_3 + C_4 x)e^{-x}$$

№9.331

$$y^{IV} + 2y'' + y = 0$$

Пара $(\pm i)$ имеет кратность 2.

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0 \qquad \lambda^2 = \mu \qquad \mu^2 + 2\mu + 1 = 0$$

$$(\mu+1)^2 = 0 \qquad \mu_{12} = -1$$

$\lambda_{12} = \pm i \to y_1 = e^{0x}\cos 1x = \cos x$, $y_2 = e^{0x}\sin 1x = \sin x$

$\lambda_{34} = \pm i \to y_3 = x e^{0x}\cos x = x\cdot\cos x$, $y_4 = xe^{0x}\sin x = x\sin$

$$y_{общ} = C_1\cos x + C_2 x\cos x + C_3\sin x + C_4 x\sin x$$

$$\boxed{i^2 = -1}$$

№9.333

$$y^{V} + 8y''' + 16y' = 0$$

$$\lambda^5 + 8\lambda^3 + 16\lambda = 0 \qquad \lambda(\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16) = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \to y_1 = e^{0x} = 1$$

$$\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = 0$$

$$(\lambda^2 + 4)^2 = 0 \qquad \lambda_{23} = \pm 2i \qquad \lambda_{45} = \pm 2i$$

$$y_{общ} = C_1 1 + \underbrace{C_2\cos 2x + C_3\sin 2x}_{\lambda_{2,3} = \pm 2i} + \underbrace{C_4 x\cos 2x + C_5 x\sin 2x}_{\lambda_{4,5} = \pm 2i}$$

№9.335

$$y^{VI} - 2y^{V} + 3y^{IV} - 4y''' + 3y'' - 2y' + y = 0$$

Характ. ур-ие: $\lambda^6 - 2\lambda^5 + 3\lambda^4 - 4\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

8

$$(\lambda^6+3\lambda^2+3\lambda^4+1)-(2\lambda^5+4\lambda^3+2\lambda)=0$$

$$(\lambda^2+1)^3-2\lambda(\lambda^4+2\lambda^2+1)=0$$

$$(\lambda^2+1)^3-2\lambda(\lambda^2+1)^2=0 \qquad (\lambda^2+1)^2[(\lambda^2+1)-2\lambda]=0$$

$\lambda^2+1=0$ $\lambda^2=-1$ $\lambda^2=i^2$ $\lambda=\pm i$

$\lambda_{12}=\pm i$ $\lambda_{34}=\pm i$ $\lambda_{5,6}=1$

$\lambda_{12}=\pm i$ кратности 2, т.е. $\lambda_{34}=\pm i$

$$(\lambda^2+1)^2(\lambda-1)^2=0 \qquad \lambda_{56}=1$$

$$y_{общ}=\underbrace{C_1\cos x+C_2\sin x}_{\lambda_{12}=\pm i}+\underbrace{C_3x\cos x+C_4x\sin x}_{\lambda_{3,4}=\pm i}+\underbrace{C_5e^x+C_6xe^x}_{\lambda_{5,6}}$$

№ 9.338 Найти частные решения:

$y''-2y'+y=0$ $y(2)=1$ $y'(2)=-2$

$\lambda^2-2\lambda+1=0$ $\lambda_{12}=1$

$(\lambda-1)^2=0$

$$y_{общ}=C_1e^x+C_2xe^x$$

$$y'_{общ}=C_1e^x+C_2e^x+C_2xe^x$$

При начальных условиях

$$\begin{cases}1=C_1e^2+C_2\cdot 2e^2\\ -2=C_1e^2+C_2e^2+2C_2e^2\end{cases} \qquad \begin{cases}C_1e^2+2C_2e^2=1\\ C_1e^2+3C_2e^2=-2\end{cases}$$

вычитаем из 1-ого ур-ия второе

$$-C_2e^2=3 \rightarrow C_2=-\frac{3}{e^2}$$

$$C_1e^2+2C_2e^2=1 \qquad C_1e^2+2\left(-\frac{3}{e^2}\right)e^2=1 \qquad C_1e^2=7 \quad C_1=\frac{7}{e^2}$$

$$y_{част}=\frac{7}{e^2}e^x-\frac{3}{e^2}xe^x=(7-3x)e^{x-2}$$

№ 9.340 Найти интегральную кривую

$$3y''-2y'-8y=0$$
$$3\lambda^2-2\lambda-8=0 \qquad \lambda_{12}=\frac{2\pm\sqrt{4-4\cdot3(-8)}}{6}=\frac{2\pm10}{6}$$
$$\lambda_1=2 \quad \lambda_2=-\frac{4}{3}$$
$$y_{oo}=C_1e^{2x}+C_2e^{-4/3x}$$

9

№ 9.337

Найти частное решение

$$y''-5y'+4y=0 \qquad y(0)=y'(0)=1$$

Решение: $\lambda^2-5\lambda+4=0 \quad \lambda_{12}=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}-4}=\frac{5}{2}\pm\frac{3}{2}$

$$\lambda_1=4 \quad \lambda_2=1$$
$$y_{oo}=C_1e^{4x}+C_2e^{x} \qquad y'_{oo}=4C_1e^{4x}+C_2e^{x}$$

Используем начальные условия

$$\begin{cases}1=C_1+C_2\\1=4C_1+C_2\end{cases}$$

Вычтем 2-ое из 1-ого

$$0=-3C_1 \rightarrow C_1=0$$
$$C_2=1-C_1=1$$
$$y_{част.\,одн.}=e^{x}$$

№ 9.339 Найти частное решение

$$y'''-y'=0 \qquad y(0)=3 \quad y'(0)=-1 \quad y''(0)=1$$

Решение: $\lambda^3-\lambda=0 \qquad \lambda(\lambda^2-1)=0$

$$\lambda_1=0 \quad \lambda_2=1 \quad \lambda_3=-1$$
$$y_{oo}=C_1e^{0\cdot x}+C_2e^{x}+C_3e^{-x}$$

Найдем частное решение, использ. нач. условия

$$y'_{oo}=C_2e^{x}-C_3e^{-x}$$
$$y''_{oo}=C_2e^{x}+C_3e^{-x}$$

$$\begin{cases}3=C_1+C_2+C_3\\-1=C_2-C_3\\1=C_2+C_3\end{cases}$$

Складываем 2^ое и 3^е ур-ия

$$0=2C_2 \rightarrow C_2=0$$
$$C_3=1-C_2=1 \quad C_3=1$$
$$C_1=3-C_2-C_3=2$$
$$y_{ч.\,одн.}=2+e^{-x}$$

№ 9.336

$$y^{VI}+2y^{V}+y^{IV}=0$$
$$\lambda^6+2\lambda^5+\lambda^4=0 \qquad \lambda^4(\lambda^2+2\lambda+1)=0$$
$$\lambda_{1234}=0 \qquad \lambda_{5,6}=-1 \rightarrow y_5=e^{-x},\ y_6=xe^{-x}$$
$$\lambda_{1234}=0 \rightarrow y_1=e^{0x}=1,\ y_2=xe^{0x}=x,\ y_3=x^2e^{0x}=x^2,\ y_4=x^3e^{0x}=x^3$$
$$y_{oo}=C_1e^{0x}+C_2xe^{0\cdot x}+C_3x^2e^{0\cdot x}+C_4x^3e^{0x}+C_5e^{-x}+$$
$$+C_6xe^{-x}=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4x^3+e^{-x}(C_5+C_6x)$$

№2968 Исследовать на л/зависимость

а) $\{x \quad x+1\}$

$$\begin{vmatrix} x & x+1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = x - x - 1 = -1 \neq 0 \quad \text{— л/н. } x, (x+1)$$

б) $\{0 \quad 1 \quad x\}$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{— л/з}$$

е) $\{e^x \quad e^{2x} \quad e^{3x}\}$

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = e^x \cdot e^{2x} \cdot e^{3x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = e^{6x}(18+4+3-2-12-9) = e^{6x}(25-23) = 2e^{6x} \neq 0$$

л/н.

з) $\{\sin^2 x \quad \cos^2 x \quad 1\}$

$$\begin{vmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & 1 \\ 2\sin x\cos x & -2\cos x\sin x & 0 \\ 2\cos^2 x - 2\sin^2 x & 2\sin^2 x - 2\cos^2 x & 0 \end{vmatrix} = \left[2\sin x\cos x\,(2\sin^2 x - 2\cos^2 x) + 2\sin x\cos x\,(2\cos^2 x - 2\sin^2 x)\right] = 0$$

л/з.

№2969 Составить ОДУ по ФСР

а) $y_1 = \sin x \quad y_2 = \cos x \qquad y_{oo} = C_1 \sin x + C_2 \cos x$

$\{y \quad \sin x \quad \cos x\}$ — д.б. л/з. т.е. $W(x) = 0$

$$W(x) = \begin{vmatrix} y & \sin x & \cos x \\ y' & \cos x & -\sin x \\ y'' & -\sin x & -\cos x \end{vmatrix} = 0$$

$\boxed{\begin{array}{l} \text{Здесь } 2^{ой} \text{ способ лучше:} \\ y_1 = \sin x \quad y_2 = \cos x \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 1 \cdot i \\ (\lambda - i)(\lambda + i) = 0;\ \lambda^2 - i^2 = 0 \quad \lambda^2 + 1 = 0 \\ y'' + y = 0 \end{array}}$

$$y(-\sin^2 x - \cos^2 x) - y'(-\sin x\cos x + \cos x\sin x) + y''(-\sin^2 x - \cos^2 x) = 0$$

$y'' + y = 0$

б) $y_1 = x \qquad y_2 = x^2$

$\{y \quad x \quad x^2\}$ — л/з

$$\begin{vmatrix} y & x & x^2 \\ y' & 1 & 2x \\ y'' & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad y \cdot 2 - y' \cdot 2x + y''(2x^2 - x^2) = 0$$

$\boxed{x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0}$

г) $y_1 = e^x \qquad y_2 = e^x \sin x \qquad y_3 = e^x \cos x$

$$\begin{vmatrix} y & e^x & e^x \sin x & e^x \cos x \\ y' & e^x & e^x \sin x + e^x \cos x & e^x(\cos x - \sin x) \\ y'' & e^x & & \\ y''' & e^x & & \end{vmatrix} = 0 \ \ldots$$

№2976

$y'' - 5y' + 6y = 0$

$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \quad \lambda_1 = 2 \quad \lambda_1 = 3 \quad y_{oo} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$

№2978

$y'' - y' = 0$

$\lambda^2 - \lambda = 0 \qquad y_{oo} = C_1 + C_2 e^x$

$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 1$

№2980

$y'' - 2y' + 2y = 0$

$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \qquad y_{oo} = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x$

$\lambda_{12} = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm i$

№2982

$y'' + 2y' + y = 0$

$k^2 + 2k + 1 = 0 \qquad y_{oo} = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$

$(k+1)^2 = 0$

$k_{12} = -1$

№2988

$y'' + 3y' + 2y = 0 \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ y' = -1 \end{cases}$

$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \qquad y_o = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}$

$\lambda_{12} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$

Начальное условие

$\lambda_1 = -2 \quad \lambda_2 = -1$

$y_1 = e^{-2x} \quad y_2 = e^{-x} \qquad \begin{cases} y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} \\ y' = -2C_1 e^{-2x} - C_2 e^{-x} \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 = C_1 + C_2 \\ -1 = -2C_1 - C_2 \end{cases}$

Сложим уравнение $\to$ $C_1 = 0$ $\quad \underline{C_1 = 0}$

$\underline{C_2 = 1}$

$\underline{y_{час} = e^{-x}}$

№3045

$y''' - 13y'' + 12y' = 0$

$\lambda^3 - 13\lambda^2 + 12\lambda = 0 \qquad y_{oo} = C_1 + C_2 e^{12x} + C_3 e^x$

$\lambda_1 = 0 \quad \lambda^2 - 13\lambda + 12 = 0$

$\lambda_1 = 12 \quad \lambda_2 = 1$

№3047

$y''' + y = 0 \qquad y_{oo} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_3 e^{\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x$

$\lambda^3 + 1 = 0$

$(\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda + 1) = 0 \qquad D = 1 - 4 = -3 = 3i^2$

$\lambda_1 = -1; \quad k^2 - k + 1 = 0 \qquad \lambda_{2,3} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$

№3049

$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$

$(\lambda - 1)^3 = 0$

$\lambda_{123} = 1 \to y_1 = e^{1x} = e^x,\ y_2 = xe^x,\ y_3 = x^2 e^x$

$y_{oo} = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x$

№3051

$y^{IV} + 8y'' + 16y = 0$

$k^4 + 8k^2 + 16 = 0$

$(t^2 + 4)^2 = 0 \quad k^2 = t$

$t_{12} = -4 \quad k_{12} = \pm 2i \quad k_{34} = \pm 2i$

$y_{oo} = C_1 \cos 2x + C_2 x \cos 2x + C_3 \sin 2x + C_3 x \sin 2x$

№3055

$y^{IV} - 6y'' + 9y = 0$

$\lambda^4 - 6\lambda^2 + 9 = 0$

$t = \lambda^2$

$t^2 - 6t + 9 = 0$

$t_{12} = +3 \to t_1 = 3,\ t_2 = 3$

$t = \lambda^2 \quad \lambda^2 = +3 \quad \lambda_{12} = \pm\sqrt{3}$

$\lambda_{34} = \pm\sqrt{3}$

$y_{oo} = C_1 e^{\sqrt{3}x} + C_2 x e^{\sqrt{3}x} + C_3 e^{-\sqrt{3}x} + C_4 x e^{-\sqrt{3}x}$

№3057

$y^{IV} + 2y''' + y'' = 0$

$\lambda^4 + 2\lambda^3 + \lambda^2 = 0$

$\lambda^2(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = 0$

$\lambda_{12} = 0 \quad \lambda_{34} = -1 \to y_3 = e^{-x},\ y_4 = xe^{-x}$

$y_1 = e^{0x} = 1 \quad y_2 = xe^{0x} = x$

$y_{oo} = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + C_4 x e^{-x}$

(линейная комбинация частных решений, образующих ФСР