# Семинар №17 (1)

## "Интегрирование линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и правой частью, допускающей подбор частного решения неоднородного уравнения."

Задание №3 и №4 ДЗ №2 ДУ

Уравнения вида

$$\boxed{a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)}$$

наз. неоднородными линейными ДУ $n$-го порядка с постоянными коэффициентами $a_0 \dots a_n$

Общее решение этого уравнения

$$\boxed{y_{он}(x) = y_{оо}(x) + y_{чн}(x)}$$

Если правая часть линейного неоднородного уравнения есть сумма нескольких ф-ций

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_k(x) = \sum f_i(x)$$

и $y_{част.\,i}(x)$ $(i = \overline{1, k})$ есть некоторое частное решение ур-ний $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f_i(x)$

то $y_{част.\,н.} = \sum_{i=1}^{k} y_{част.\,i}(x)$ — является некоторым частным решением неоднородного ДУ.

Метод решения:
метод подбора частного решения по ф-ции $f(x)$ в случае, если она может быть представлена в виде

$$f(x) = \boxed{e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x]}$$ (квазиполином)

или состоящих из суммы такого вида ф-ций (метод неопределенных коэффициентов)

Если: а) $f(x) = (d_0 x^m + \dots + d_m) e^{\lambda x}$ или

б) $f(x) = ((b_0 x^m + \dots b_m)\cos\beta x + (d_0 x^s + \dots d_s)\sin\beta x) e^{\alpha x}$

и корни характеристического ур. ЛОДУ $\lambda$ не совпадают с $z = \alpha \pm \beta i$, то

$y_{част.}(x) = (D_0 x^m + \dots + D_m) e^{\lambda x}$ — для (а)

$y_{част.}(x) = ((B_0 x^s + \dots + B_s)\cos\beta x + (D_0 x^s + \dots + D_s)\sin\beta x) e^{\alpha x}$ для (б)

$D_i, B_i$ — неопределенные коэффициенты, $S = \max(m, n)$

Если $z = \alpha \pm \beta i$ совпадают с корнями $\lambda$ ЛОДУ кратности $l$, то выражения для $y_{част.\,неод.}$ домножаются на $x^l$.

Теорема (*) Если правая часть ЛДУ с const коэффициентами м.б. представлена $e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x]$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены

и а) $z=\alpha+i\beta$ **не совпадает** с корнем характер. ур-ния, то сущ-ет $y_{чн}=e^{\alpha x}[M_s(x)\cos\beta x+N_s(x)\sin\beta x]$

где $M_s(x)$, $N_s(x)$ – многочлены степени $S=\max(n, m)$

б) Если же $z=\alpha+i\beta$ **совпадает** с корнем характеристического уравнения кратности $k$, то $y_{чн}=e^{\alpha x}[M_s(x)\cos\beta x+N_s(x)\sin\beta x]\cdot x^k$, где $S=\max(m, n)$

Схема решения ЛНДУ с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида, который позволяет подбор частного решения ЛНДУ

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

1) Решаем соответствующее однородное ДУ, записав его характеристическое ур-ие
$a_n\lambda^n + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$
Находим корни $\lambda_i$ и каждому ставим в соответствие частное решение $y_i$ однородного ДУ.
$y_{оо} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$

2) по правой части $f(x)$ подбираем $y_{част. неодн.}$, руководствуясь теоремой (*)
Если $f(x)=\sum_{i=1}^{p} f_i(x)$, то $y_{чн}=\sum_{i=1}^{p}(y_{част.н.})_i$

3) Записываем ответ
$y_{он} = y_{оо} + y_{ч_1} + y_{ч_2} + \ldots + y_{ч_p}$

(3) Указать вид общего решения д.у.

№2994

а) $y''-4y=x^2e^{2x}$

1) $y''-4y=0$

$\lambda^2-4=0 \to \lambda^2=4 \to \lambda_{1,2}=\pm 2$ $\to y_1=e^{2x}$, $\to y_2=e^{-2x}$

$y_{oo}=C_1y_1+C_2y_2=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}$

2) подбор $y_{чн}$ по $f(x)=x^2e^{2x}$ (спец. вид.

$f(x)=\boxed{x^2}e^{2x} \leftrightarrow \alpha=2,\ \beta=0 \leftrightarrow z=\alpha\pm i\beta=2$

нет тригонометрии

$y_{чн}=\left(\boxed{Ax^2+Bx+D}\right)\cdot e^{2x}\cdot x^{1}$

кратность корня характеристич. ур-ния, с которым (этим корнем) совпадает $z=2\pm 0i=2$.

т.о. $y_{чн}=(Ax^2+Bx+D)e^{2x}\cdot x$

$y_{он}=y_{оо}+y_{чн}=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+(Ax^2+Bx+D)xe^{2x}$

Внимание! Когда в задании написано „указать" $y_{он}$, то неопределенные коэффициенты $A, B, D$ не определяем!

Если в задании „найти" $y_{он}$, то определяем $A, B, D$..., подставляя $y_{чн}$ в само д.у.

Вывод: $y_{чн}$ формируется следующим образом: неопределенные коэффициенты появляются в $y_{чн}$ на месте многочленов в $f(x)$, а ф-ции $e^{\alpha x}$; $\cos\beta x$; $\sin\beta x$ переписываются в $y_{чн}$, еслиони есть в $f(x)$ - правой части спец. вида

Важно помнить, что $\cos\beta x$ и $\sin\beta x$ всегда в $y_{ч.н.}$ следуют вместе. Т.е. если в $f(x)$ только $\cos\beta x$ (или $\sin\beta x$), то в $y_{ч.н.}$ нужно записать и $\cos\beta x$ и $\sin\beta x$ с коэффициентами, которые диктует $f(x)$.

$$\boxed{i^2=-1}$$

б) $y''+9y=\cos 3x$

1) $y''+9y=0 \to \lambda^2+9=0 \to \lambda^2=-9 \to$
$\to \lambda^2=9i^2 \to \lambda_{1,2}=\pm 3i = 0 \pm 3i$

$y_1=e^{0x}\cos 3x=\cos 3x$

$y_2=e^{0x}\sin 3x=\sin 3x$

$y_{oo}=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$

2) $f(x)=\cos 3x \to \alpha=0$ (нет $e^{\alpha x}$)
$\beta=3$ (есть тригонометрия $\cos 3x$) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=0\pm 3i$

$\pm$ учитывает пару $\cos\beta x$ и $\sin\beta x$

$f(x)=\boxed{1}\cos 3x$

$y_{ч.н.}=(\boxed{A}\cos 3x+\boxed{B}\sin 3x)x^1$

1 — кратность пары корней характер. ур-ия, с которой совпадает $z=\pm 3i$ из $f(x)$
пара

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + (A\cos 3x + B\sin 3x)x$$

в) $y'' + 2y' + 2y = e^x \sin x$

1) $y'' + 2y' + 2y = 0 \to \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$

$$D = 4 - 8 = -4 = 4i^2$$

$$\lambda_{12} = \frac{-2 \pm \sqrt{4i^2}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$$

$$\lambda_{12} = -1 \pm 1i \to y_1 = e^{(-1)x} \cos \boxed{1} x = e^{-x} \cos x$$

$$y_2 = e^{(-1)x} \sin \boxed{1} x = e^{-x} \sin x$$

$$y_{оо} = C_1 e^{-x} \cos x + C_2 e^{-x} \sin x$$

2) $f(x) = e^x \sin x$

$$f(x) = e^{1\cdot x} \cdot \sin 1 \cdot x \Leftrightarrow \alpha = 1;\ \beta = 1 \Leftrightarrow$$

$$z = 1 \pm 1i = 1 \pm i$$

$f(x) = \boxed{1} \cdot e^x \sin x$ вместе $z = 1 \pm i$

$y_{чн} = \boxed{A} \cdot e^x \sin x + B e^x \cos x$

переходит в $y_{чн}$ из $f(x)$

$z$ не совпадает с $\lambda$ характер. ур-ния $\to$ $y_{чн}$ ни на что не домножаем

$$y_{он} = C_1 e^{-x} \cos x + C_2 e^{-x} \sin x + A e^x \sin x + B e^x \cos x$$

или можно в ответе кратко

$y_{он} = y_{оо} + y_{чн}$.

г) $y'' - 4y' + 4y = \sin 2x + e^{2x}$

1) $y'' - 4y' + 4y = 0 \to \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ $(\lambda - 2)^2 = 0$

$\lambda_1 = 2$ $\lambda_2 = 2$

(действительный корень кратности 2)

$\lambda_{12} = 2 \to y_1 = e^{\lambda x} = e^{2x}$

$y_2 = xe^{\lambda x} = xe^{2x}$

$y_{oo} = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$

2) $f(x) = \underbrace{\sin 2x}_{f_1(x)} + \underbrace{e^{2x}}_{f_2(x)}$

$f_1(x) = \boxed{1} \cdot \sin 2x \to \alpha_1 = 0$ (нет $e^{\alpha x}$)

$\beta_1 = 2$ (тригонометрия)

$z_1 = \alpha_1 \pm \beta_1 i = 0 \pm 2i = \pm 2i$

$y_{r_1} = \boxed{A} \sin 2x + \boxed{B} \cos 2x$ ($\sin 2x$ в паре с $\cos 2x$).

$z_1$ не совпадает с $\lambda_i$ характерист. уравнения

$f_2(x) = \boxed{1} \cdot e^{2x} \leftrightarrow \alpha_2 = 2$ (есть $e^{2x}$)

$\beta_2 = 0$ (нет тригонометрии, или $\cos 0x$ и $\sin 0 \cdot x$)

$z_2 = \alpha_2 \pm \beta_2 i = 2$

$y_{r_2} = \boxed{D} e^{2x} \cdot x^2$ — кратность $\lambda_{12} = 2$, с которым совпадает $z_2$

Ответ $y_{он} = y_{oo} + y_{r_1} + y_{r_2}$

д) $y''-5y'+6y=(x^2+1)e^x-xe^{2x}$

1) $y''-5y'+6y=0 \to \lambda^2-5\lambda+6=0$

$\lambda_1=2$ $\quad$ $\lambda_2=3$

$y_1=e^{2x}$ $\quad$ $y_2=e^{3x}$

$y_{oo}=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$

2) $f(x)=\underbrace{(x^2+1)e^x}_{f_1}-\underbrace{xe^{2x}}_{f_2(x)}$

$f_1(x)=\boxed{(x^2+1)}e^x \leftrightarrow \alpha_1=1 \quad \beta_1=0 \to z_1=1\pm 0i=1$

$y_{r_1}=\boxed{(A_1x^2+B_1x+D_1)}e^x$ $\quad$ $z_1$ - не совпадает с $\lambda_i$

описывает коэффициент $f_1(x)$ $(x^2+1)$ как многочлен $2^{ой}$ степени.

$f_2(x)=\boxed{-x}e^{2x} \leftrightarrow \alpha_2=2; \ \beta_2=0 \to z_2=2\pm 0i$

$z_2=2$

$y_r=\left(\boxed{A_2x+B_2}\right)\cdot e^{2x}\cdot x^1$ $\quad$ (совпадает с $\lambda_1$ кратности $k=1$)

Ответ: $y_{он}=y_{oo}+y_{r_1}+y_{r_2}$

е) $y''-2y'+5y=\underbrace{\boxed{x}e^x\cos 2x}_{f_1(x)}\underbrace{-\boxed{x^2}e^x\sin 2x}_{f_2(x)}$

* 1).

$\alpha_1=1 \quad \beta_1=2$ $\qquad$ $\alpha_2=1; \ \beta_2=2$

$z_1=1\pm 2i$ $\qquad$ $z_2=1\pm 2i$

2) Здесь $f_1(x)$ и $f_2(x)$ можно объединить и рассматривать $f(x)$, но в виде коэффициентов взять многочлен $2^{ой}$ степени,

(ориентируемая на старшую степень многочлена, стоящего в виде коэффициента при $e^x \sin 2x$ или $e^x \cos 2x$)

$f(x) = \boxed{x} e^x \cos 2x \boxed{-x^2} e^x \sin 2x$

$z = 1 \pm 2i$ ... совпадает с корнями $\lambda_{12}$ (парой)

$z = \lambda_{12}$ кратность пары 1

$y_{чн} = x \left( \boxed{Ax^2 + Bx + D} e^x \cos 2x + \boxed{Fx^2 + Kx + N} e^x \sin 2x \right)$

($e^x$, $\cos 2x$ и $\sin 2x$ переходят из $f(x)$ в структуру $y_{чн}$)

(*) 1) $y'' - 2y' + 5y = 0$

$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \quad D = 4 - 20 = -16 = 16i^2$

$\lambda_{12} = \frac{2 \pm \sqrt{16i^2}}{2} = 1 \pm 2i$ пара

$y_1 = e^{1x} \cos 2x \qquad y_2 = e^{1x} \sin 2x$

$y_{оо} = C_1 e^x \cos 2x + C_2 e^x \sin 2x$

Ответ: $y_{он} = C_1 e^x \cos 2x + C_2 e^x \sin 2x + \left( (Ax^2 + Bx + D) e^x \cos 2x + (Fx^2 + Kx + N) e^x \sin 2x \right) x$

Замечание: $C_1$ и $C_2$ — const ДУ, совсем не то, что неопредел. коэффициенты $A, B, D \ldots$.

! $C_1$ и $C_2$ определяются при решении задачи Коши.

## №2994 Указать вид решения

а) $y'' - 4y = x^2 e^{2x}$

$\lambda^2 - 4 = 0 \quad \lambda_{12} = \pm 2 \quad y_1 = e^{2x} \quad y_2 = e^{-2x}$

$y_{он} = \underbrace{C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}}_{y_{оо}} + (Ax^2 + Bx + C)e^{2x} \cdot x$

б) $y'' + 9y = \cos 2x$

$\lambda^2 + 9 = 0 \quad \lambda_{12} = \pm 3i \quad y_1 = \cos 3x \quad y_2 = \sin 3x$

$y_{он} = \underbrace{C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x}_{y_{оо}} + A\cos 2x + B \sin 2x$

в) $y'' - 4y' + 4y = \sin 2x + e^{2x}$

$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \quad \lambda_{12} = 2$

$y_{он} = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + A \sin 2x + B \cos 2x + Cx^2 e^{2x}$

г) $y'' + 2y' + 2y = e^x \sin x$

$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$

$\lambda_{12} = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm i$

$y_{он} = C_1 e^{-x} \cos x + C_2 e^{-x} \sin x + A e^x \cos x + B e^x \sin x$

д) $y'' - 5y' + 6y = (x^2+1)e^x + x e^{2x}$ $\quad z=1 \quad z=2$

$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \quad \lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = 3$

$y_{он} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + (Ax^2 + Bx + C)e^x + (Dx + E)e^{2x} \cdot x$

е) $y'' - 2y' + 5y = x e^x \cos 2x - x^2 e^x \sin 2x$ $\quad z_1 = 1+2i \quad z_2 = 1-2i$

$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$

$\lambda_{12} = 1 \pm \sqrt{1-5} = 1 \pm 2i$

$y_{он} = C_1 e^x \cos 2x + C_2 e^x \sin 2x + x(A_1 x^2 + B_1 x + C_1)e^x \cos 2x +$
$+ x(A_2 x^2 + B_2 x + C_2)e^x \sin 2x$

## №3000 Найти общее решение

$y'' + y = \cos x$

т.к. $z = \pm i$ совпадает с парой $\lambda = \pm i$, кратность пары 1

1) $\lambda^2 + 1 = 0 \quad \lambda_{12} = \pm i \quad y_{оо} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

2) $y_ч = (A \cos x + B \sin x) x = Ax \cos x + Bx \sin x$

$f(x) = \boxed{1} \cos x \Leftrightarrow \alpha = 0,\ \beta = 1 \Leftrightarrow z = 0 \pm 1i = \pm i$

подставим $y_ч$ в ур-ние, найдя $y_ч'$ и $y_ч''$

$y' = A\cos x - Ax\sin x + B\sin x + Bx\cos x$

$y'' = -A\sin x - A\sin x - Ax\cos x + B\cos x + B\cos x - Bx\sin x$ 10

подставляем в уравнение:

$-2A\sin x \cancel{-Ax\cos x} + 2B\cos x \cancel{-Bx\sin x} \cancel{+Ax\cos x} \cancel{+Bx\sin x} = \cos x$

$\cos x: \quad 2B = 1 \qquad B = \frac{1}{2}$

$x\cos x: \quad -A + A = 0$

$\sin x: \quad -2A = 0 \to A = 0$

$y_ч = \frac{1}{2}x\sin x$

$y_{он} = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{2}x\sin x$ — общее решение д.у.

№ 3002

$y'' + y' - 6y = xe^{2x}$

1) $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$
$\lambda_1 = -3 \quad \lambda_2 = 2 \longrightarrow y_{оо} = C_1e^{2x} + C_2e^{-3x}$

2). $y_ч = (Ax+B)e^{2x}\cdot x = Ax^2e^{2x} + Bxe^{2x}$

$y' = 2Axe^{2x} + 2Ax^2e^{2x} + Be^{2x} + 2Bxe^{2x}$

$y'' = 2Ae^{2x} + 4Axe^{2x} + 4Axe^{2x} + 4Ax^2e^{2x} + 2Be^{2x} + 2Be^{2x} + 4Bxe^{2x}$

и подставляем в уравнение ....

$y_{общ} = C_1e^{2x} + C_2e^{-3x} + x\left(\frac{x}{10} - \frac{1}{25}\right)e^{2x}$

№ 3006

$y'' + 4y = \sin x \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ y' = 1 \end{cases} \longleftrightarrow y(0) = 1 \quad y'(0) = 1$

1) $\lambda^2 + 4 = 0 \quad \lambda_{12} = \pm 2i \qquad y_{оо} = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$

2) $y_ч = A\cos x + B\sin x$
$y' = -A\sin x + B\cos x \qquad y'' = -A\cos x - B\sin x$

$-A\cos x - B\sin x + 4A\cos x + 4B\sin x = \sin x$

$\cos x: \quad 3A = 0 \qquad A = 0$

$\sin x: \quad 3B = 1 \qquad B = \frac{1}{3}$

$y_{он} = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{1}{3}\sin x \longrightarrow \overbrace{1 = C_1\cdot 1 + 0 + 0}^{y}$

$y' = -2C_1\sin 2x + 2C_2\cos 2x + \frac{1}{3}\cos x \longrightarrow \underbrace{1 = 0 + 2C_2 + \frac{1}{3}}_{y'}$

$C_1 = 1 \quad C_2 = \frac{1}{3}$

$\boxed{y_{час} = \underset{C_1}{\cos 2x} + \underset{C_2}{\frac{1}{3}}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin x}$

№3019 Найти частное решение $\lambda_1 = 0 \to y_1 = e^{0x} = 1$

$y'' - 2y' = e^{2x} + x^2 - 1$ $\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{8} \quad y' = 1. \end{cases}$

$\lambda^2 - 2\lambda = 0 \quad \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 2.$ $\underline{y_{oo} = C_1 \cdot 1 + C_2 e^{2x} = C_1 + C_2 e^{2x}}$

$$y'' - 2y' = e^{2x} + x^2 - 1.$$

$y'' - 2y' = e^{2x} \quad z_1 = 2$

$y_{r_1} = Ae^{2x} \cdot x$

$y_1' = Ae^{2x} + 2Axe^{2x}$

$y_1'' = 2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} + 4Axe^{2x}$

$4Ae^{2x} + \cancel{4Axe^{2x}} - 2Ae^{2x} - \cancel{4Axe^{2x}} = e^{2x}$

$2A = 1 \quad A = \frac{1}{2}.$

$y_{r_1} = \frac{1}{2} x e^{2x}$

$y'' - 2y' = x^2 - 1 \quad z_2 = 0$

$y_{r_2} = (Bx^2 + Cx + D)x$

$y_{r_2}' = 3Bx^2 + 2Cx + D$

$y_{r_2}'' = 6Bx + 2C$

$6Bx + 2C - 6Bx^2 - 4Cx - 2D = x^2 - 1$

$x^2: \quad -6B = 1. \qquad B = -\frac{1}{6}$

$x: \quad 6B - 4C = 0$

$x^0: \quad 2C - 2D = -1.$

$C = \frac{3}{2}B = \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{4}$

$D = \frac{1}{2}(2C + 1) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{4}$

$y_{r_2} = \left(-\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\right)x$

$$y_r = y_{r_1} + y_{r_2} = \frac{1}{2}xe^{2x} - \left(\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\right)x$$

$\underline{y_{oн} = C_1 + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{6}x^3 - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{4}.}$

$y_{oн}' = 2C_2 e^{2x} + \frac{1}{2}e^{2x} + xe^{2x} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$

$-1 - \frac{3}{4}$

$2C_2 = -\frac{7}{4}$

$\begin{cases} \frac{1}{8} = C_1 + C_2 & \longrightarrow C_1 = \frac{1}{8} - C_2 \\ 1 = 2C_2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} & \longrightarrow C_2 = \frac{1}{8} \end{cases}$

$C_1 = 0$

Ответ:

$y_{\text{част. д.у.}} = \frac{1}{8}e^{2x} + \underbrace{\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{6}x^3 - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{4}}_{y_{rн.}}$

$C_2, \; C_1 = 0$