Семинар 18. (задача N5 Д3N2) (1)

Интегрирование линейных неоднородных уравнений методом вариации произвольных постоянных

При интегрировании ЛНУ используются методы: а) метод подбора (метод неопределённых коэффициентов), если $f(x)$ м.б. представлена $e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x]$

б) метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа)

Сущность этого метода заключается в том, что для соответствующего однородного уравнения $a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$ общее решение $y_{oo} = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x)$

Будем искать $y_{общ} = C_1(x) y_1(x) + \dots + C_n(x) y_n(x)$

и потребуем $\boxed{\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu^{(k)} \frac{dC_\nu(x)}{dx} = 0}$ $k = 0,\dots,n-2$.

Иными словами

$$(*)\begin{cases} y_1 \frac{dC_1}{dx} + y_2 \frac{dC_2}{dx} + \dots + y_n \frac{dC_n}{dx} = 0 \\ y_1' \frac{dC_1}{dx} + y_2' \frac{dC_2}{dx} + \dots + y_n' \frac{dC_n}{dx} = 0 \\ \vdots \\ y_1^{n-1} \frac{dC_1}{dx} + y_2^{n-1} \frac{dC_2}{dx} + \dots + y_n^{n-1} \frac{dC_n}{dx} = f(x) \end{cases}$$

Определитель этой системы — вронскиан $W(x)$, $W(x) \neq 0$ поэтому $(*)$ имеет решение единственное относительно $\frac{dC_\nu}{dx}$

Линейные однородные уравнения с непостоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{n-1} + \dots + a_1(x) y' + a_0(x) y = 0 \qquad (a_n(x) = 1)$$

Если известно какое-либо частное решение $y_1(x)$ этого ур-ния, то подстановка $\boxed{y_{общ}(x) = y_1(x) z(x)}$ и $z'(x) = u(x)$ приводит ур-ние к линейному ДУ относительно $z'(x)$ и $z''(x)$ и далее полагая $z'(x) = u(x)$ получаем ЛОДУ относительно $u(x)$

$[y'' + p_1(x) y' + p_2(x) y = 0]$

Если известно одно из частных решений ЛОДУ 2-го порядка $y_1(x)$ то по формуле Остроградского-Лиувилля

$$\boxed{y_2(x) = y_1(x) \cdot \int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int p_1(x)dx} dx}$$

y_1, y_2 — л/н, $W(x) \neq 0$ — их вронскиан

$\{y'' + p_1(x) y' + p_2(x) y = 0\}$ — ЛОДУ 2-го порядка

тогда преобразовав $W'(x) + p_1(x) W(x) = 0$ Доказательство:

Линейные неоднородные уравнения с переменными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = f(x)$$

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн}$$

Если известно $y_{оо}$, то используем метод Лагранжа.

! Замечание: ЛНДУ должно быть приведенным, т.е. $a_n(x) = 1$

$$x^2(1-\ln x)\,y'' + xy' - y = \frac{(1-\ln x)^2}{x}; \qquad y_1 = x$$

$$y'' - y' + e^{2x} y = e^{3x} \qquad y_1 = \cos e^{x}$$

$$x^2 y'' - xy' - 3y = 5x^4 \qquad y_1 = \frac{1}{x}$$

$$(x-1)\,y'' - xy' + y = (x-1)^2 e^{x} \qquad y_1 = x$$

$$y''' + 4y' = 2\,\frac{\sin 2x}{\cos^2 2x}$$

$$y''' + y' = \frac{x-1}{x^2}$$

$$x(x+1)\,y'' + (4x+2)\,y' + 2y = \frac{2}{x^3} \qquad y_1 = \frac{1}{x+1} \quad (\text{вар. } 29)$$

$$y'' + y' \operatorname{ctg} x - y \csc^2 x = 2\sin x \qquad y_1 = \csc x \quad (\text{вар } 30)$$

③ Метод Лагранжа (метод вариации произвольных постоянных) рассмотрим при решении 2х групп д.у.

1ая группа – д.у. с постоянными коэффициентами и правой частью неспециального вида (задача №3 РК №2 ДУ)

№9.342

$$y''+3y'+2y=\frac{1}{e^x+1}$$

1) Однородное: $y''+3y'+2y=0$

$$\lambda^2+3\lambda+2=0 \qquad \lambda_1=-1 \qquad \lambda_2=-2$$

$$y_1=e^{-x} \qquad y_2=e^{-2x}$$

$$y_{oo}=c_1y_1+c_2y_2=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}$$

2) Неоднородное

пусть $y_{он}=c_1(x)e^{-x}+c_2(x)e^{-2x}$ (*)

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1+c_2'(x)y_2=0 \\ c_1'(x)y_1'+c_2'(x)y_2'=f(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1'(x)e^{-x}+c_2'(x)e^{-2x}=0 \\ -c_1'(x)e^{-x}-2c_2'(x)e^{-2x}=\frac{1}{e^x+1} \end{cases}$$

$f(x)$ – правая часть д.у.

Сложим ур-ния:

$$\begin{cases} c_1'(x)=-c_2'(x)\frac{e^{-2x}}{e^{-x}} \to c_1'(x)=-c_2'(x)e^{-x} \\ -c_2'(x)e^{-2x}=\frac{1}{e^x+1} \to c_2'(x)=\frac{e^{2x}}{e^x+1} \end{cases}$$

$$c_2(x)=-\int\frac{e^{2x}dx}{e^x+1}=-\int\frac{e^xe^xdx}{e^x+1}=-\int\frac{e^x\,de^x}{e^x+1}=$$

$$=-\int\frac{(e^x+1)-1}{e^x+1}de^x=-\int de^x+\int\frac{d(e^x+1)}{e^x+1}=$$

4

$$= -e^{-x} + \ln(e^x+1) + \tilde{C}_2;$$

$$\left\{ C_2(x) = -e^{-x} + \ln(e^x+1) + \tilde{C}_2 \right\}$$

$$C_1'(x) = -C_2'(x)e^{-x} = -\frac{e^{2x}e^{-x}}{e^x+1} = -\frac{e^x}{e^x+1}$$

$$C_1(x) = -\int\frac{e^x dx}{e^x+1} = -\int\frac{d(e^x+1)}{(e^x+1)} = -\ln(e^x+1) + \tilde{C}_1$$

$$\left\{ C_1(x) = -\ln(e^x+1) + \tilde{C}_1 \right\}$$

подставим $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в $(*)$:

$$y_{он} = \left(-\ln(e^x+1) + \tilde{C}_1\right)e^{-x} + \left(-e^{-x} + \ln(e^x+1) + \tilde{C}_2\right)e^{-2x}$$

$$y_{он} = \underbrace{\tilde{C}_1 e^{-x} + \tilde{C}_2 e^{-2x}}_{y_{оо}} \underbrace{- e^{-x}\ln(e^x+1) - e^{-3x} + e^{-2x}\ln(e^x+1)}_{y_{ч.н.}}$$

ответ

N 9.344

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}$$

1) однородное $y'' - 2y' + y = 0$

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \quad (\lambda-1)^2 = 0$

$\lambda_{12} = 1$

$y_1 = e^x \qquad y_2 = xe^x$

$$y_{оо} = C_1 e^x + C_2 x e^x$$

2) неоднородное

пусть $y_{он} = C_1(x)e^x + C_2(x)xe^x \quad (*)$

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2 = f(x) \end{cases}$$

5

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)xe^x = 0 & : e^x \\ C_1'(x)e^x + C_2'(x)(e^x + xe^x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{4-x^2}} & : e^x \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x)\cdot x = 0 \\ C_1'(x) + C_2'(x) + C_2'(x)x = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}} \end{cases}$$

1ое вычитаем из 2ого ур-ния:

$$\begin{cases} C_1'(x) = -C_2'(x)x \\ C_2'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}} \end{cases}$$

$$C_2(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin\frac{x}{2} + \tilde{C}_2$$

$$\boxed{C_2(x) = \arcsin\frac{x}{2} + \tilde{C}_2}$$

$$C_1'(x) = -C_2'(x)\cdot x = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$C_1(x) = -\int\frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^2}} = -\frac{1}{2}\int\frac{dx^2}{(4-x^2)^{1/2}} = \frac{1}{2}\int\frac{d(-x^2+4)}{(4-x^2)^{1/2}} =$$

$$= \cancel{\frac{1}{2}}\frac{(4-x^2)^{1/2}}{\cancel{1/2}} + \tilde{C}_1; \quad \boxed{C_1(x) = \sqrt{4-x^2} + \tilde{C}_1}$$

$$y_{он} = \left(\sqrt{4-x^2} + \tilde{C}_1\right)e^x + \left(\arcsin\frac{x}{2} + \tilde{C}_2\right)xe^x$$

Ответ: $y_{он} = \tilde{C}_1 e^x + \tilde{C}_2 xe^x + e^x\sqrt{4-x^2} + xe^x\cdot\arcsin\frac{x}{2}$

№3032

$y'' + y = tg\, x$

1) Однородное $k^2 + 1 = 0 \quad k = \pm i$

$y_{oo} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

2) $y_{он} = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$ (Метод Лагранжа)

$\begin{cases} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0 & \cdot \sin x \\ -C_1' \sin x + C_2'(x) \cos x = tg x & \cdot \cos x \end{cases}$ и складываем

$C_2'(\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{=1}) = \sin x \qquad C_2'(x) = \sin x$

$C_2(x) = \int \sin x\, dx = -\cos x + \tilde{C}_2$

В 1ое ур-ние:

$C_1'(x) \cos x + \sin^2 x = 0$

$C_1(x) = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = -\int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x} dx = \int \frac{dx}{\cos x} + \int \cos x\, dx =$

$= -\ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + \sin x + \tilde{C}_1$

$y_{он} = \left(-\ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + \sin x + \tilde{C}_1\right) \cos x + \left(-\cos x + \tilde{C}_2\right) \sin x =$

$= \underbrace{-\cos x \ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|}_{y_{чн}} + \underbrace{\tilde{C}_1 \cos x + \tilde{C}_2 \sin x}_{y_{oo}}$

№3034

$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$

1) $k^2 - 2k + 1 = 0 \qquad (k-1)^2 = 0$

$k_{1,2} = 1 \qquad y_{oo} = C_1 e^x + C_2 x e^x$

2) $y_{он} = C_1(x) e^x + C_2(x) x e^x$

$-\begin{cases} C_1' e^x + C_2' x e^x = 0 \\ C_1' e^x + C_2' e^x + C_2' x e^x = \frac{e^x}{x} \end{cases}$

$-C_2' e^x = -\frac{e^x}{x} \qquad C_2' = \frac{1}{x} \qquad C_2(x) = \ln|x| + \tilde{C}_2$

В 1ое ур-ние: $C_1' \cancel{e^x} + \cancel{e^x} = 0 \qquad C_1(x) = -x + \tilde{C}_1$

$C_1' = -1$

$y_{он} = (-x + \tilde{C}_1) e^x + (\ln|x| + \tilde{C}_2) x e^x$

$y_{он} = \tilde{C}_1 e^x + \tilde{C}_2 x e^x - x e^x + x e^x \ln|x|$

Д3

1) $x^2(1 - \ln x) y'' + x y' - y = \frac{(1 - \ln x)^2}{x}; \quad y_1 = x$

2) $(x-1) y'' - x y' + y = (x-1)^2 e^x; \quad y_1 = x$

2ая группа д.у. – д.у. 2ого порядка с переменными коэффициентами и известном одном частном решении соответствующего однородного д.у. (задача №5 ДЗ №2)

$$x^2(1-\ln x)y''+xy'-y=\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)^2;\quad y_1=x$$

ОДЗ $x>0$

Делим на $x^2(1-\ln x)$, чтобы ур-ние было приведенным

$$y''+\frac{x}{x^2(1-\ln x)}y'-\frac{1}{x^2(1-\ln x)}y=\frac{(1-\ln x)^2}{x\cdot x^2(1-\ln x)}$$

$$y''\underbrace{+\frac{1}{x(1-\ln x)}}_{p(x)}-\frac{1}{x^2(1+\ln x)}=\frac{1-\ln x}{x^3}\quad (*)$$

Соответствующее однородное д.у. при известном одном частном решении $y_1=x$

по формуле Остроградского-Лиувилля находим второе y_2

$$\boxed{y_2=y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}dx}$$

Здесь $y_1=x$

$$p(x)=\frac{1}{x(1-\ln x)}$$

$$y_2=x\int\frac{1}{x^2}e^{-\int\frac{dx}{x(1-\ln x)}}dx=x\int\frac{1}{x^2}e^{\int\frac{d(\ln x)}{(\ln x-1)}}dx=$$

$$=x\int\frac{1}{x^2}e^{\ln(\ln x-1)}dx=x\int\frac{(\ln x-1)}{x^2}dx=$$

$$=x\int\frac{\ln x}{x^2}dx-x\int\frac{dx}{x^2}\ominus$$

$$\int\frac{\ln x\,dx}{x^2}=\left|\begin{matrix}u=\ln x & du=\frac{1}{x}dx\\ dV=\frac{dx}{x^2}\to & V=\int\frac{dx}{x^2}=\frac{x^{-1}}{-1}=-\frac{1}{x}\end{matrix}\right|=$$

$$= -\frac{\ln x}{x} - \int\left(-\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{x} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$$

$$= x\left(-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right) - x\left(-\frac{1}{x}\right) = -\ln x - 1 + 1 =$$
$$= -\ln x$$

$$\boxed{y_2 = -\ln x}$$

$\underline{y_{oo} = C_1 x + C_2 \ln x}$ („минус" от y_2 включили в C_2)

<u>Неоднородное</u> приведенное (*) д.у.

Пусть $\underline{y_{он} = C_1(x)x + C_2(x)\ln x}$

$$\begin{cases} C_1'(x)\, y_1 + C_2'(x)\, y_2 = 0 \\ C_1'(x)\, y_1' + C_2'(x)\, y_2' = f(x) \end{cases}$$

Здесь $f(x) = \frac{1-\ln x}{x^3}$

$$\begin{cases} C_1'(x)\, x + C_2'(x)\ln x = 0 \\ C_1'(x) + \frac{C_2'(x)}{x} = \frac{1-\ln x}{x^3} \end{cases} \cdot x$$

$$\begin{cases} C_1'(x)\, x + C_2'(x)\ln x = 0 \\ C_1'(x)\cdot x + C_2(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} \end{cases}$$

Вычитаем из 2ого 1ое ду:

$$\begin{cases} C_1'(x) = -C_2'(x)\frac{\ln x}{x} \\ C_2'(x)\cancel{(1-\ln x)} = \frac{\cancel{(1-\ln x)}}{x^2} \end{cases} \rightarrow C_2'(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$C_2(x) = \int\frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + \tilde{C}_2; \quad \boxed{C_2(x) = -\frac{1}{x} + \tilde{C}_2}$$

$$C_1'(x) = -C_2'(x)\frac{\ln x}{x} = -\frac{\ln x}{x\cdot x^2} = -\frac{\ln x}{x^3}$$

$$C_1(x) = -\int\frac{\ln x\, dx}{x^3} = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \quad du = \frac{1}{x}dx \\ dV = \frac{dx}{x^3} \rightarrow V = \int\frac{dx}{x^3} = \\ = \frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2x^2} \end{array} \right| =$$

$$= -\left(-\frac{\ln x}{2x^2} - \int\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\frac{dx}{x}\right) = \frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^3} =$$

$$= \frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{2}\frac{x^{-2}}{(-2)} + \tilde{C}_1 = \frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{4x^2} + \tilde{C}_1$$

$$\boxed{C_1(x) = \frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{4x^2} + \tilde{C}_1}$$

Подставим найденные $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в $y_{он}$:

$$y_{он} = \left(\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{4x^2} + \tilde{C}_1\right)x + \left(-\frac{1}{x} + \tilde{C}_2\right)\ln x$$

$$y_{он} = \tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2 \ln x + \frac{\ln x}{2x} + \frac{1}{4x} - \frac{\ln x}{x}$$

Ответ: $y_{он} = \tilde{C}_1 x + C_2 \ln x + \frac{1}{4x} - \frac{\ln x}{2x}$.