Семинар №19. Разбор задач варианта ДЗ №2 по ДУ.

Вариант 29.

1] $y''(y^2+2)=2y(y'+1)y'$; $y(0)=0$, $y'(0)=1$

Это д.у. 2-го порядка, явно x не содержит, допускает понижение порядка $\Rightarrow$

Пусть $y'=p(y)$, $y=y(x) \to y'=p(y(x))$

подставим в уравнение

$y'=p(y)$; $y''=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot p$

$\frac{dy}{dx}=y'=p(y)$ – обозначили

$\frac{dp}{dy}\cdot p(y^2+2)=2y(p+1)p$ $\quad : p\neq 0$ (не проверяем, т.к. решаем задачу Коши)

$\frac{dp}{dy}(y^2+2)=2y(p+1)$ – д.у. 1-го порядка с разделяющимися переменными

$\frac{dp}{p+1}=\frac{2y\,dy}{y^2+2}$; $\int\frac{dp}{p+1}=\int\frac{2y\,dy}{y^2+2}$; $\int\frac{dp}{(p+1)}=\int\frac{d(y^2+2)}{(y^2+2)}$

$\ln|p+1|=\ln(y^2+2)+\ln|C|$;

$\ln|p+1|=\ln|C(y^2+2)|$;

$|p+1|=|C(y^2+2)| \to p+1=\pm C(y^2+2)$

$p=C_1(y^2+2)-1$, где $C_1=\pm C$

Используем нач. условия уже здесь!

$p=y'=1$; $x=0$; $y=0$ (2)

$p=c_1(y^2+2)-1$; $1=c_1(0+2)-1$ $c_1=1$

$p=1\cdot(y^2+2)-1 \rightarrow p=y^2+1$

Имеем $p=y^2+1$, но $p=y'=\frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx}=y^2+1$ – д.у. 1^ого порядка с разделяющимися переменными.

$\frac{dy}{y^2+1}=dx \rightarrow \int\frac{dy}{y^2+1}=\int x \rightarrow arctg\,y=x+C_2$

Начальные условия: $x=0$ $y=0$

$arctg\,0=0+C_2 \rightarrow C_2=0$

$arctg\,y=x \rightarrow y=tg\,x$ – частное решение

Ответ: $y=tg\,x$

2] $xy'y''-(y')^2=x^4$ – д.у. 2^ого порядка, явно x содержит, допускает понижение порядка

Тогда $y'=p(x) \rightarrow y''=p'$

подставим в исходное уравнение

(*) $xpp'-p^2=x^4$ – порядок уравнения понизился на один.

Делим на $xp\neq 0$

$\boxed{p'-\frac{1}{x}p=\frac{x^3}{p}}$ – уравнение Бернулли

проверка: 1) $x=0$, подставим в (*)

$0-p^2\neq 0 \rightarrow x=0$ не решение

2) $p=0$, подставим в (*) (3)

$x\cdot 0\cdot 0-0=x^4$ $\quad p=0\to p'=0$

$0\neq x^4\to p$ – не решение

$$p'-\frac{1}{x}p=\frac{x^3}{p}$$

пусть $\underline{p=u(x)\cdot v(x)}$

$$u'v+uv'-\frac{1}{x}uv=\frac{x^3}{uv};$$

$$u'v+u\left(v'-\frac{v}{x}\right)=\frac{x^3}{uv}$$

пусть $v'-\frac{v}{x}=0$, с учетом этого:

$$\begin{cases} v'-\frac{v}{x}=0 & а) \\ u'v=\frac{x^3}{uv} & б) \end{cases}$$

а) $v'-\frac{v}{x}=0$ $\quad \frac{dv}{dx}=\frac{v}{x}$; $\frac{dv}{v}=\frac{dx}{x}$; $\int\frac{dv}{v}=\int\frac{dx}{x}$

$\ln v=\ln x\to v_{част.}=x$

б) $u'x=\frac{x^3}{ux}$ $\quad \frac{du}{dx}=\frac{x}{u}\to u\,du=x\,dx$

$\int u\,du=\int x\,dx\to\frac{u^2}{2}=\frac{x^2}{2}+\frac{c}{2}$ для удобства

$u^2=x^2+c$

$u=\pm\sqrt{x^2+c}$

$p=u(x)v(x)\to p=\pm x\sqrt{x^2+c}$

Далее делаем переход к $y(x)$

$y'=p(x)$

$\frac{dy}{dx}=\pm x\sqrt{x^2+c}$; $\quad dy=\pm x\sqrt{x^2+c}\,dx$

$$y=\pm\int x\sqrt{x^2+c}\,dx=\pm\frac{1}{2}\int(x^2+c)^{1/2}d(x^2+c)=$$

$$=\pm\frac{1}{\cancel{2}}\frac{(x^2+c)^{3/2}}{\frac{3}{\cancel{2}}}+c_1;\quad \underline{y=\pm\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+c)^3}+c_1}$$

ответ

Внимание! Во второй задаче проверяйте тщательно все ф-ции, на которые делите на предмет потери решения.

3] $y^{IV}+2y'''+2y''+2y'+y=1-\sin x+$
$+x^2\cos x-x^3+3xe^{-x}+e^{-x}\cos x$

ДУ 4^ого порядка с постоянными коэффициентами, правой частью специального вида (квазиполином), которая (эта правая часть) допускает подбор <u>частного</u> решения для всего уравнения (метод неопределенных коэффициентов)

Правая часть $f(x)$ <u>специального вида</u> может содержать многочлены, показательную ф-цию $e^{\alpha x}$, тригонометрические функции $\sin\beta x$; $\cos\beta x$, связанные операциями умножения, сложения, вычитания

<u>квазиполином</u>

$f(x)=e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x]$

по α и β ему можно поставить в соответствие число

$\boxed{z=\alpha\pm i\beta}$,

число α связано с показательной

функций, а β – с тригонометрическими функциями, (5)

$P_n(x)$ $Q_m(x)$ – многочлены степени n и m соответственно с неопределенными коэффициентами

$$\boxed{y_{он} = y_{оо} + y_{чн}}$$

$y_{он}$ – общее решение всего (неоднородного уравнения)

$y_{оо}$ – общее решение соответствующего однородного д.у.

$y_{чн}$ – частное решение неоднородного д.у

1ый шаг – решаем соответствующее однородное д.у.

$$y^{IV}+2y'''+2y''+2y'+y=0$$

Его характеристическое ур-ие:

$$\lambda^4+2\lambda^3+2\lambda^2+2\lambda+1=0$$ ← здесь для λ методы, какие знаете.

$$\lambda^4+\lambda^3+\lambda^3+\lambda^2+\lambda^2+\lambda+\lambda+1=0$$

$$\lambda^3(\lambda+1)+\lambda^2(\lambda+1)+\lambda(\lambda+1)+(\lambda+1)=0$$

$$(\lambda+1)(\lambda^3+\lambda^2+\lambda+1)=0$$

$$(\lambda+1)\left(\lambda^2(\lambda+1)+(\lambda+1)\right)=0$$

$$(\lambda+1)(\lambda+1)(\lambda^2+1)=0;\quad (\lambda+1)^2(\lambda^2+1)=0$$

$\lambda_{12}=-1$ (кратность $r=2$)

$\lambda^2+1=0$ $\quad\boxed{i^2=-1}$

$\lambda^2=-1$

$\lambda^2=i^2$

$\lambda_{3,4}=\pm i=\pm 1\cdot i$

$y_1=e^{\lambda_1 x}=e^{-x}$

$y_2=xe^{\lambda_2 x}=xe^{-x}$

учитывает кратность $\lambda_{12}=-1$

$y_3=\cos x$

$y_4=\sin x$ – всегда вместе!

$y_{oo} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + C_4 y_4$

$y_{oo} = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$

2-ой шаг – по правой части $f(x)$ спец. вида подбираем $y_{чн}$

$f(x) = \underbrace{1 - \sin x + x^2 \cos x - x^3}_{f_2(x),\ f_1(x)} + \underbrace{3x e^{-x}}_{f_3(x)} + \underbrace{e^{-x}\cos x}_{f_4(x)}$

$f_2(x)$: $\alpha = 0$, $\beta = 1$; $f_1(x)$: $\alpha = 0$, $\beta = 0$; $f_3(x)$: $\alpha = -1$, $\beta = 0$; $f_4(x)$: $\alpha = -1$, $\beta = 1$

$z = \alpha \pm i\beta$

Если $f(x) = \sum_{i=1}^{s} f_i(x)$, то $y_{част.н} = \sum_{i=1}^{s} y_{част\,i}$ (принцип наложения решений)

Например, $x^2 + 1 = e^{0x}\left[(x^2+1)\cos 0x + x^{2025} \cdot \sin 0x\right] \leftrightarrow z = 0$

так любой многочлен можно расписать как квазиполином

тогда $\alpha = 0$, $\beta = 0$

$\cos \beta x$ и $\sin \beta x$ – всегда вместе!

$f_1(x) = 1 - x^3$; $\to \alpha = 0$; $\beta = 0$ $\quad z_1 = 0 \pm 0i = 0$

$y_{ч_1} = (A_1 x^3 + B_1 x^2 + D_1 x + F_1)$

z_1 не совпадает ни с одним из λ_i

{здесь совмещаем 1 и x^3, т.к это все класс многочленов}

Можно и не совмещать и рассматривать $f_{11} = 1$ $f_{12} = -x^3$ и для каждого подбирать свое $y_{част.}$ неоднор.

$f_2(x) = \boxed{-1} \cdot \sin x \boxed{+x^2} \cos x \to \alpha = 0 \quad \beta = 1$

коэффициенты $\quad z_2 = 0 \pm 1i = \pm i$

$-\sin x + x^2 \cos x = e^{0x} \sin x + e^{0x} x^2 \cos x$

1 $\quad$ 1

$\alpha = 0 \quad \beta = 1$

У $\cos x$ коэффициент в виде многочлена x^2, а у $\sin x$ — -1

В $y_{чн}$ будем записывать старшую степень в коэффициентах.

Здесь опять $(-\sin x)$ и $x^2 \cos x$ можно было рассматривать отдельно, но помнить, что с $\sin \beta x$ везде следует $\cos \beta x$ и наоборот

описывает x^2 в общем виде

$y_{ч_2} = \left[(A_2 x^2 + B_2 x + D_2) \sin x + (F_2 x^2 + K_2 x + N_2) \cos x \right] \cdot x^1$

многочлен 2-ой степени в общем виде

кратность пары комплексных корней $\pm i = z_2$, которая совпадает с парой $\lambda_{3,4} = \pm i$

$f_3(x) = 3x e^{-x} \to \alpha = -1 \quad \beta = 0$ (нет $\cos \beta x$, $\sin \beta x$)

$z_3 = -1 \pm 0i = -1$

$y_{ч_3} = (A_3 x + B_3) e^{-x} \cdot x^2$ — кратность действительных корней $\lambda_{1,2} = -1$

$f(x) = \boxed{1} e^{-x} \cos 1x \to \alpha_4 = -1 \quad \beta_4 = 1 \to z_4 = -1 \pm 1i$

коэфф.

$y_{ч_4} = \boxed{A_4} e^{-x} \cos x + B_4 e^{-x} \sin x$

($\cos \beta x$ „требует" $\sin \beta x$)

Ответ: $y_{он} = y_{оо} + y_{ч_1} + y_{ч_2} + y_{ч_3} + y_{ч_4}$

(В ответ можно не переписывать $y_{оо}$ и $y_{чi}$ с неопределенными коэффициентами.)

Внимание! В задаче №3 нужно указать вид $y_{он}$ (без определения неопред. коэффициентов (A_i B_i D_i ....)

4) Найти частное решение

$y'' - 5y' + 4y = \underbrace{-6e^x}_{f_1(x)} + \underbrace{4x - 9}_{f_2(x)} \qquad y(0) = 2 \quad y'(0) = 3$

1) $y'' - 5y' + 4y = 0$

$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \to \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 4$

$y_1 = e^{1x} = e^x \qquad y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{4x}$

$y_{оо} = C_1 y_1 + C_2 y_2$

$y_{оо} = C_1 e^x + C_2 e^{4x}$

2) Неоднородное ур-ние

Правая часть спец. вида

$$y''-5y'+4y=\underbrace{-6e^x}_{f_1(x)}+\underbrace{4x-9}_{f_2(x)}$$

а) $y''-5y'+4y=-6e^x$ б) $y''-5y'+4y=4x-9$

а) $y''-5y'+4y=-6e^x$

$f_1(x)=-6e^x \to \alpha=1\ \beta=0 \to z_1=1\pm0i=$
$=1$

$y_{r_1}=\boxed{A}e^x\cdot x^1$

описывает коэффициент -6

кратность корня λ_1, с которым совпадает z_1

Найдем A! подставим для этого y_{r_1} в а), для этого найдем производные:

$y_{r_1}=Ae^x\cdot x$

$y'_{r_1}=Ae^x\cdot x+Ae^x$; $y''_{r_1}=Ae^x\cdot x+Ae^x+Ae^x=$
$=Ae^x\cdot x+2Ae^x$

подставляем в а)

$$\underbrace{Ae^x\cdot x+2Ae^x}_{y''}-5\underbrace{(Axe^x+Ae^x)}_{y'}+4\underbrace{Axe^x}_{y}=-6e^x$$

$\cancel{Ax}+2A\cancel{-5Ax}-5A+\cancel{4Ax}=-6$ (поделили на e^x)

$-3A=-6 \quad A=2$

$$\boxed{y_{r_1}=2xe^x}$$

б) $y''-5y'+4y=\underbrace{4x-9}_{f_2(x)}$

$f_2(x)=4x-9 \leftrightarrow \alpha=0,\ \beta=0 \to z_2=0$ не совпадает с λ_i

$y_{r_2}=Bx+D$

подставим $y_{ч_2} = Bx + D$ в б) 10

$y'_{ч_2} = B \quad y''_{ч_2} = 0$

$$\underbrace{0}_{y''_{ч_2}} - 5 \cdot \underbrace{B}_{y'_{ч_2}} + 4\underbrace{(Bx + D)}_{y_{ч_2}} = 4x - 9$$

$$-5B + 4Bx + 4D = 4x - 9$$

$$\left.\begin{aligned} x &: \; 4B = 4 \\ x^0 &: \; -5B + 4D = -9 \end{aligned}\right\} \quad \begin{cases} B = 1 \\ -5 + 4D = -9 \end{cases}$$

$B = 1 \quad D = -1$

$$\boxed{y_{ч_2} = x - 1}$$

$y_{он} = y_{оо} + y_{ч_1} + y_{ч_2}$

$y_{он} = c_1 e^x + c_2 e^{4x} + 2xe^x + x - 1$

(Было д.у. 2ого порядка → в общем его решении 2 const)

Нач. условия: $x = 0$; $y = 2$; $y' = 3$

$$\begin{matrix} y(0) = 2 \\ y'(0) = 3 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} y = c_1 e^x + c_2 e^{4x} + 2xe^x + x - 1 \\ y' = c_1 e^x + 4c_2 e^{4x} + 2e^x + 2xe^x + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 = c_1 + c_2 - 1 \\ \cancel{3} = c_1 + 4c_2 + \cancel{2 + 1} \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 + c_2 = 3 \\ c_1 + 4c_2 = 0 \end{cases} \ominus$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 3 \\ 3c_2 = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = 3 - c_2 \\ c_2 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = 4 \\ c_2 = -1 \end{cases}$$

Ответ: $y_{част} = 4e^x - e^{4x} + 2xe^x + x - 1$

11

5) $x(x+1)y''+(4x+2)y'+2y=\frac{2}{x^3}$

$y_1=\frac{1}{x+1}$ – данное частное решение соответствующего однородного

Это д.у. 2-ого порядка с переменными коэффициентами, ОДЗ $x\neq 0$ $x\neq -1$

Сделаем ур-ние приведенным (при старшей производной коэффициент 1)

Делим на $x(x+1)\neq 0$

$$y''+\frac{4x+2}{x(x+1)}+\frac{2}{x(x+1)}y=\frac{2}{x^4(x+1)} \quad \boxed{f(x)}$$

1) Однородное

$$y''+\frac{4x+2}{x(x+1)}+\frac{2}{x(x+1)}y=0$$

$p(x)$ со знаком!

$y_1=\frac{1}{x+1}$ – известное его частное решение

Второе частное находим по формуле Остроградского–Лиувилля

$$\boxed{y_2=y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}dx}$$

$$y_2=\frac{1}{x+1}\int\frac{1}{\frac{1}{(x+1)^2}}e^{-\int\frac{4x+2}{x(x+1)}dx}dx =$$

$\int\frac{(4x+2)}{x(x+1)}dx$: $\frac{4x+2}{x(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x+1)}=\frac{A(x+1)+Bx}{x(x+1)}$

$4x+2=A(x+1)+Bx$

$$\left.\begin{array}{l} x=0:\ 2=A \\ x=-1:\ -2=-B \end{array}\right\} \quad A=2 \quad B=2$$

$$\int\frac{4x+2}{x(x+1)}dx=\int\frac{2}{x}dx+\int\frac{2\,dx}{x+1}=2\ln x+2\ln(x+1)=$$

$$=\ln x^2(x+1)^2$$ (без const и модулей, т.к. ищем второе частное решение)

$$=\frac{1}{x+1}\int(x+1)^2e^{-\ln x^2(x+1)^2}dx=$$

$$=\frac{1}{(x+1)}\int(x+1)^2e^{\ln\frac{1}{x^2(x+1)^2}}dx=$$

$$=\frac{1}{(x+1)}\int\cancel{(x+1)^2}\frac{1}{x^2\cancel{(x+1)^2}}dx=\frac{1}{(x+1)}\int\frac{1}{x^2}$$

$$=\frac{1}{x+1}\left(-\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x(x+1)} \qquad \boxed{y_2=-\frac{1}{x(x+1)}}$$

этот „−" включим в C_2

$$y_{oo}=C_1y_1+C_2y_2$$

$$y_{oo}=C_1\frac{1}{(x+1)}+C_2\frac{1}{x(x+1)}$$

2) <u>Неоднородное ур-ние</u>

Метод Лагранжа (метод вариации произвольных постоянных)

пусть $y_{oн}=C_1(x)\frac{1}{(x+1)}+C_2(x)\frac{1}{x(x+1)}$ (*)

$C_1(x)$ и $C_2(x)$ как функции находим из системы:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1+C_2'(x)y_2=0 \\ C_1'(x)y_1'+C_2'(x)y_2'=\boxed{f(x)} \end{cases}$$

правая часть приведенного ур-ния

$$\begin{cases} C_1'(x)\frac{1}{(x+1)}+C_2'(x)\frac{1}{x(x+1)}=0 & \cdot(x+1) \\ -C_1'(x)\frac{1}{(x+1)^2}-C_2'(x)\frac{1\cdot(2x+1)}{x^2(x+1)^2}=\frac{2}{x^4(x+1)} & \cdot(x+1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1'(x) + \frac{1}{x} c_2'(x) = 0 \\ -c_1'(x) - \frac{(2x+1)}{x^2} c_2'(x) = \frac{2(x+1)}{x^4} \end{cases} \quad (+)$$

$$\begin{cases} c_1'(x) = -\frac{1}{x} c_2'(x) \\ \frac{1}{x} c_2'(x) - \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right) c_2'(x) = \frac{2(x+1)}{x^4} \end{cases}$$

$$c_1'(x) = -\frac{1}{x} c_2'(x)$$

$$c_2'(x)\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{2(x+1)}{x^4}$$

$$-c_2'(x)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = \frac{2(x+1)}{x^4}; \quad c_2'(x)\cancel{\frac{x+1}{x^2}} = -\frac{2\cancel{(x+1)}}{x^{\cancel{4}\,2}}$$

$$c_2'(x) = -\frac{2}{x^2} \to c_2(x) = -2\int \frac{dx}{x^2} = \frac{2}{x} + \tilde{c}_2$$

$$\boxed{c_2(x) = \frac{2}{x} + \tilde{c}_2}$$

$$c_1'(x) = -\frac{1}{x} c_2'(x) = -\frac{1}{x}\left(-\frac{2}{x^2}\right) = \frac{2}{x^3}$$

$$c_1(x) = 2\int \frac{dx}{x^3} = 2\,\frac{x^{-2}}{-2} + \tilde{c}_1 = -\frac{1}{x^2} + \tilde{c}_1$$

$$\boxed{c_1(x) = -\frac{1}{x^2} + \tilde{c}_1}$$

подставим $c_1(x)$ и $c_2(x)$ в (*)

$$y_{он} = \left(-\frac{1}{x^2} + \tilde{c}_1\right)\frac{1}{(x+1)} + \left(\frac{2}{x} + \tilde{c}_2\right)\frac{1}{x(x+1)}$$

$$y_{он} = -\frac{1}{x^2(x+1)} + \tilde{c}_1 \frac{1}{(x+1)} + \frac{2}{x^2(x+1)} + \tilde{c}_2 \cdot \frac{1}{x(x+1)}$$

$$y_{он} = \underbrace{\tilde{c}_1 \frac{1}{(x+1)} + \tilde{c}_2 \frac{1}{x(x+1)}}_{y_{оо} = \tilde{c}_1 y_1 + \tilde{c}_2 y_2} + \underbrace{\frac{1}{x^2(x+1)}}_{y_{ч.н.}}$$

Ответ: $y_{он} = \tilde{c}_1 \frac{1}{(x+1)} + \tilde{c}_2 \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{x^2(x+1)}$