Семинар № 20. ①

ИУ-РЛ-БМТ, 2013, ИиДУ, модуль 2

Задачи для подготовки к рубежному контролю

«Дифференциальные уравнения высших порядков»

Теоретические вопросы

Вопросы, оцениваемые в 1 балл

1) Сформулировать определение общего решения ОДУ n-го порядка.
2) Сформулировать определение задачи Коши для ОДУ n-го порядка.
3) Сформулировать определение линейного ОДУ n-го порядка.
4) Сформулировать определение линейной зависимости и линейной независимости системы функций на промежутке.
5) Сформулировать определение определителя Вронского системы функций.
6) Сформулировать определение фундаментальной системы решений линейного однородного ОДУ.
7) Сформулировать определение характеристического уравнения линейного ОДУ с постоянными коэффициентами.

Вопросы, оцениваемые в 3 балла

1) Сформулировать и доказать теорему о вронскиане системы линейно зависимых функций.
2) Сформулировать и доказать теорему о вронскиане системы линейно независимых частных решений линейного однородного ОДУ.
3) Сформулировать и доказать теорему о существовании фундаментальной системы решений линейного однородного ОДУ n-го порядка.
4) Сформулировать и доказать теорему о структуре общего решения линейного однородного ОДУ n-го порядка.
5) Сформулировать и доказать теорему о структуре общего решения линейного неоднородного ОДУ n-го порядка.
6) Сформулировать и доказать теорему о наложении (суперпозиции) частных решений линейного неоднородного ОДУ.
7) Сформулировать и доказать свойства частных решений линейного однородного ОДУ.
8) Вывести формулу Остроградского - Лиувилля для линейного ОДУ 2-го порядка.
9) Вывести формулу для общего решения линейного однородного ОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами в случае простых действительных корней характеристического уравнения.
10) Вывести формулу для общего решения линейного однородного ОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами в случае комплексных корней характеристического уравнения.
11) Вывести формулу для общего решения линейного однородного ОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами в случае кратных корней характеристического уравнения.

2

12) Описать метод Лагранжа вариации произвольных постоянных для линейного неоднородного ОДУ 2-го порядка и вывести систему соотношений для варьируемых переменных.

Задачи для подготовки

1. Составление ОДУ (*2 балла*)

1.1. Составить линейное однородное дифференциальное уравнение, зная корни его характеристического уравнения $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1 + 3i$, $\lambda_4 = 1 - 3i$. Написать общее решение составленного дифференциального уравнения.

1.2. Составить линейное однородное дифференциальное уравнение, фундаментальная система решений которого состоит из функций $y_1 = x$, $y_2 = x^3$. При каких x для этого уравнения выполнено условие существования и единственности решения?

1.3. Могут ли функции $y_1 = e^x$ и $y_2 = e^{-2x}$ задавать фундаментальную систему решений некоторого линейного однородного дифференциального уравнения? Если могут, то составить это уравнение.

1.4. Могут ли функции $y_1 = e^x \sin 2x$ и $y_2 = e^x \cos 2x$ задавать фундаментальную систему решений некоторого линейного однородного дифференциального уравнения? Если могут, то составить это уравнение.

1.5. Составить линейное неоднородное дифференциальное уравнение, общее решение которого имеет вид $y = Ce^x + \sin x$.

1.6. Составить линейное неоднородное дифференциальное уравнение, общее решение которого имеет вид $y = C\cos x + 1$.

2. Задача Коши для ОДУ высших порядков (*3 балла*)

2.1. Найти частное решение дифференциального уравнения $xy'' + y' + x = 0$, удовлетворяющее начальному условию $y = 0$, $y' = 0$ при $x = 2$.

2.2. Найти частное решение дифференциального уравнения $1 + yy'' + (y')^2 = 0$, удовлетворяющее начальному условию $y = 1$, $y' = 1$ при $x = 1$.

3. Решение линейного неоднородного ОДУ с постоянными коэффициентами (*3 балла*)

3.1. Найти общее решение ОДУ $y'' + y = \operatorname{tg} x \cdot \sec x$.

3.2. Найти общее решение ОДУ $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x}$.

4. Поиск вида общего решения линейного неоднородные ОДУ с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида (*4 балла*)

4.1. Указать вид общего решения ОДУ (без вычисления коэффициентов)

$$y^{IV} + y'' = xe^{-x} + 2 - x + x\sin x - e^x \sin x.$$

4.2. Указать вид общего решения ОДУ (без вычисления коэффициентов)

$$y^V - 5y^{IV} + 4y''' = 2 + xe^{-2x} + xe^x - e^{-2x}\cos 3x.$$

Образцы билетов рубежного контроля (теория)

Вариант 0. ИУ-РЛ-БМТ, 2013, ИиДУ, модуль 2, РК2 (теория)

1. Сформулировать определение нормальной системы ОДУ. *(1 балл)*
2. Сформулировать и доказать теорему о вронскиане системы линейно зависимых функций. *(3 балла)*

min = 2, max = 4

Вариант 0. ИУ-РЛ-БМТ, 2013, ИиДУ, модуль 2, РК2 (теория)

1. Сформулировать определение фундаментальной системы решений линейного однородного ОДУ. *(1 балл)*
2. Сформулировать и доказать теорему о вронскиане системы линейно независимых частных решений линейного однородного ОДУ. *(3 балла)*

min = 2, max = 4

Образцы билетов рубежного контроля (задачи)

Вариант 0. ИУ-РЛ-БМТ, 2013, ИиДУ, модуль 2, РК2 (задачи)

1. Составить линейное однородное дифференциальное уравнение, зная корни его характеристического уравнения $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1 + 3i$, $\lambda_4 = 1 - 3i$. Написать общее решение составленного дифференциального уравнения. *(2 балла)*
2. Найти частное решение дифференциального уравнения $xy'' + y' + x = 0$, удовлетворяющее начальному условию $y = 0$, $y' = 0$ при $x = 2$. *(3 балла)*
3. Найти общее решение ОДУ $y'' + y = \operatorname{tg} x \cdot \sec x$. *(3 балла)*
4. Указать вид общего решения ОДУ (без вычисления коэффициентов)
$$y^{IV} + y'' = xe^{-x} + 2 - x + x\sin x - e^{x}\sin x.$$ *(4 балла)*

min = 8, max = 12

Вариант 0. ИУ-РЛ-БМТ, 2013, ИиДУ, модуль 2, РК2 (задачи)

1. Составить линейное неоднородное дифференциальное уравнение, общее решение которого имеет вид $y = C\cos x + 1$. *(2 балла)*
2. Найти частное решение дифференциального уравнения $1 + yy'' + (y')^2 = 0$, удовлетворяющее начальному условию $y = 1$, $y' = 1$ при $x = 1$. *(3 балла)*
3. Найти общее решение ОДУ $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x}$. *(3 балла)*
4. Указать вид общего решения ОДУ (без вычисления коэффициентов)
$$y^{V} - 5y^{IV} + 4y''' = 2 + xe^{-2x} + xe^{x} - e^{-2x}\cos 3x.$$ *(4 балла)*

min = 8, max = 12

④

Задачи для подготовки

1] Составить ДУ

1.1 $\lambda_1=0$ $\lambda_2=0$ $\lambda_3=1+3i$ $\lambda_4=1-3i$ — корни характеристич. ур-ния

т.к. $\lambda_i,\ i=\overline{1,4}$ — корни, то

$$(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)(\lambda-\lambda_4)=0$$

$$(\lambda-0)(\lambda-0)(\lambda-1-3i)(\lambda-1+3i)=0 \qquad \boxed{i^2=-1}$$

$$\lambda^2\left((\lambda-1)^2-(3i)^2\right)=0;$$

$$\lambda^2(\lambda^2-2\lambda+1+9)=0$$

$$\lambda^4-2\lambda^3+10\lambda^2=0$$

$y^{IV}-2y'''+10y''=0$ — искомое д.у.

$\lambda_{12}=0 \to y_1=e^{0x}=1$

$\to y_2=xe^{0x}=x$

$\lambda_{3,4}=1\pm3i \to y_3=e^{1\cdot x}\cos 3x=e^x\cos 3x$

$\to y_4=e^{1\cdot x}\sin 3x=e^x\sin 3x$

$y_{oo}=C_1\cdot 1+C_2\cdot x+C_3e^x\cos 3x+C_4e^x\sin 3x$ — общее решение составленного д.у.

1.2 $y_1=x$ $y_2=x^3$ — ФСР однородного д.у.

т.к. y_1 и y_2 — ФСР, то эти ф-ции л/независимые

$y_{oo}=c_1y_1+c_2y_2=c_1x+c_2x^3 \to$

Ф-ции: y; x, x^3 — л/зависимые, т.к. y выражается через y_1 и y_2 $\Rightarrow$

их $W(x)=0$, т.е.

$$\begin{vmatrix} y & x & x^3 \\ y' & 1 & 3x^2 \\ y'' & 0 & 6x \end{vmatrix}=0$$

Раскрываем определитель по 1-ому столбцу $\to$

$$y\begin{vmatrix}1 & 3x^2\\ 0 & 6x\end{vmatrix} - y'\begin{vmatrix}x & x^3\\ 0 & 6x\end{vmatrix} + y''\begin{vmatrix}x & x^3\\ 1 & 3x^2\end{vmatrix}=0$$

$$y\cdot 6x - y'\cdot 6x^2 + y''(3x^3 - x^3) = 0$$

$$2x^3y'' - 6x^2y' + 6xy = 0 \quad : 2x \neq 0$$

$\underline{x^2y'' - 3xy' + 3y = 0}$ – искомое д.у.

Рассмотрим условие, когда y_1 и y_2 образуют ФСР (если они л/независ).

$$W(x, x^3) = \begin{vmatrix}x & x^3\\ 1 & 3x^2\end{vmatrix} = 3x^3 - x^3 = 2x^3 \not\equiv 0$$ при $\underline{x \neq 0}$ (поэтому выше поделили на $2x \neq 0$).

1.3. $y_1 = e^x$ $y_2 = e^{-2x}$ образуют ФСР однородного д.у?

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix}e^x & e^{-2x}\\ e^x & -2e^{-2x}\end{vmatrix} = -2e^{-x} - e^{-x} = -3e^{-x} \neq 0$$

$\rightarrow y_1, y_2$ – л/независ $\Rightarrow$ образуют ФСР однородного д.у.

Составим это д.у.

$y_1 = e^x \rightarrow \lambda_1 = 1$ $\quad y_2 = e^{-2x} \rightarrow \lambda_2 = -2$

$\lambda_1\ \lambda_2$ – корни характер. ур-ния д.у.

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0 \rightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

$$\underline{y'' + y' - 2y = 0}$$

1.4. $y_1 = e^x \sin 2x \quad y_2 = e^x \cos 2x \quad$ ФСР - ?

$$W(y_1\, y_2) = \begin{vmatrix} e^x \sin 2x & e^x \cos 2x \\ e^x \sin 2x + 2e^x \cos 2x & e^x \cos 2x - 2e^x \sin 2x \end{vmatrix} =$$

$$= e^x \cdot e^x \begin{vmatrix} \sin 2x & \cos 2x \\ \sin 2x + 2\cos 2x & \cos 2x - 2\sin 2x \end{vmatrix} =$$

$$= e^{2x}\left(\cancel{\sin 2x \cos 2x} - 2\sin^2 2x - \cancel{\sin 2x \cos 2x} - 2\cos^2 2x\right) = -2e^{2x}(\underbrace{\sin^2 2x + \cos^2 2x}_{1}) =$$

$$= -2e^{2x} \neq 0 \longrightarrow$$

y_1 и y_2 л/независимы и образуют ФСР однородного д.у.

$$y_1 = e^{1x} \sin \boxed{2} x \qquad y_2 = e^{1x} \cos \boxed{2} x \longrightarrow \lambda_{12} = 1 \pm 2i$$

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0 \to (\underbrace{\lambda - 1}_{a} - \underbrace{2i}_{b})(\underbrace{\lambda - 1}_{a} + \underbrace{2i}_{b}) = 0$$

$$(\lambda - 1)^2 - 4i^2 = 0 \qquad \lambda^2 - 2\lambda + 1 + 4 = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$

$\underline{y'' - 2y' + 5y = 0}$ - искомое д.у.

1.5 $y = Ce^x + \sin x$ - общее решение д.у.

$$\longrightarrow C = \frac{y - \sin x}{e^x}$$

дифференцируем по x

$y' = Ce^x + \cos x$ и подставим в исходное ур-ние $C = \dfrac{y - \sin x}{e^x}$

$$y' = \frac{y - \sin x}{\cancel{e^x}} \cancel{e^x} + \cos x$$

$$\underline{y' - y = \cos x - \sin x}$$

В общем решении одна const C → получим д.у. 1-ого порядка.

2 Задача Коши для д.у.

2.1. $xy'' + y' + x = 0 \quad y = 0 \quad y' = 0 \quad x = 2$

Это д.у. 2-ого порядка, явно содержит $x \rightarrow \boxed{y' = p(x)}$

$y'' = p'(x)$

подставим в уравнение:

$xp' + p + x = 0 \quad ; x \neq 0$

$p' + \frac{1}{x}p = -1$ – линейное д.у. 1-ого порядка

пусть $p = u(x)v(x)$

$u'v + uv' + \frac{1}{x}uv = -1$

$u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = -1 \longrightarrow \begin{cases} v' + \frac{v}{x} = 0 & а) \\ u'v = -1 & б) \end{cases}$

0 (пусть

а) $v' + \frac{v}{x} = 0; \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}; \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}$

$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}; \quad \ln v = -\ln x$

$\ln v = \ln x^{-1} \rightarrow v_{\text{час}} = \frac{1}{x}$

б) $u'v = -1 \quad \frac{du}{dx} \cdot \frac{1}{x} = -x; \quad du = -x^2 dx$

$v = \frac{1}{x}$

$u = -\int x^2 dx = -\frac{x^3}{3} + C$

$u = -\frac{x^3}{3} + C$

$p = u(x)v(x)$

$p = \left(-\frac{x^3}{3} + C\right)\frac{1}{x} \rightarrow p = -\frac{x^2}{3} + \frac{C}{x}$

Нач. условия $p = y' = 0 \quad x = 2$

$0 = -\frac{4}{3} + \frac{C}{2} \quad C = \frac{8}{3}$

$p=-\frac{x^3}{3}+\frac{8}{3x}$

Обратный переход: $y'=p(x)$

$\frac{dy}{dx}=-\frac{x^3}{3}+\frac{8}{3x}$; $dy=\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{8}{3x}\right)dx$

$y=\int\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{8}{3x}\right)dx=-\frac{x^4}{12}+\frac{8}{3}\ln|x|+C_1$

$y=-\frac{x^4}{12}+\frac{8}{3}\ln|x|+C_1$

Нач. условия: $x=2$ $y=0$

$0=-\frac{16}{12}+\frac{8}{3}\ln 2+C_1\to C_1=\frac{4}{3}-\frac{8}{3}\ln 2=$

$=\frac{4}{3}(1-2\ln 2)=\frac{4}{3}(1-\ln 4)$

подставим C_1 в $y(x)$:

$\underline{y=-\frac{x^4}{12}+\frac{8}{3}\ln|x|+\frac{4}{3}(1-\ln 4)}$

2.2. $1+yy''+(y')^2=0$ $x=1$ $y=1$ $y'=1$

ДУ 2ого порядка, явно x не содержит $\to$ $\underline{y'=p(y(x))}$

$y''=\frac{dp}{dy}\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{y'=p}=p\cdot\frac{dp}{dy}=p\cdot p'_y$

подставим в уравнение:

$1+yp\frac{dp}{dy}+p^2=0$

$yp\frac{dp}{dy}=-(p^2+1)$ – д.у. 1ого порядка с разделяющимися переменными

Делим на $(p^2+1)y\neq 0$

$\frac{p\,dp}{p^2+1}=-\frac{dy}{y}$; $\int\frac{p\,dp}{p^2+1}=-\int\frac{dy}{y}$;

$$\frac{1}{2}\int\frac{d(p^2+1)}{p^2+1}=-\int\frac{dy}{y}$$

$$\frac{1}{2}\ln(p^2+1)=-\ln|y|+\ln|c|$$

$$\ln(p^2+1)=-2\ln|y|+2\ln|c|$$

$$\ln(p^2+1)=\ln\left|\frac{c^2}{y^2}\right| \qquad c^2=c_1$$

$$p^2+1=\pm\frac{c_1}{y^2} \qquad p^2+1=\frac{c_2}{y^2}, \text{ где } c_2=\pm c$$

$$p^2=\frac{c_2}{y^2}-1 \rightarrow p=\pm\sqrt{\frac{c_2}{y^2}-1}$$

Нач. условия: $p=y'=1>0 \rightarrow$

$$p=+\sqrt{\frac{c_2}{y^2}-1} \qquad y=1$$

$$1=\sqrt{\frac{c_2}{1}-1} \qquad c_2-1=1 \qquad c_2=2.$$

$$p=\sqrt{\frac{2}{y^2}-1}$$

Обратный переход $y'=p(y)$

$$y'=\sqrt{\frac{2}{y^2}-1};$$

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{2-y^2}{y^2}}=\frac{\sqrt{2-y^2}}{y} \qquad (y>0)$$

$$\frac{y\,dy}{\sqrt{2-y^2}}=dx; \qquad \int\frac{y\,dy}{\sqrt{2-y^2}}=\int dx$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{d(-y^2+2)}{(2-y^2)^{1/2}}=\int dx$$

$$-\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\,\frac{(2-y^2)^{1/2}}{\cancel{1/2}}=x+C_3$$

$$\sqrt{2-y^2}=-x-C_3$$

Нач. условия: $x=1 \quad y=1$

$$\sqrt{2-1}=-1-C_3 \rightarrow C_3=-2$$

$\sqrt{2-y^2} = 2-x$

Ответ: $x = 2-\sqrt{2-y^2}$

3] Неоднородное д.у с постоянными коэффициентами, правой частью не специального вида (метод Лагранжа)

$y'' + y = tg\,x \cdot sec\,x \qquad sec\,x = \frac{1}{\cos x}$

1) Однородное $y'' + y = 0$

$\lambda^2 + 1 = 0 \to \lambda^2 = -1 = i^2$

$\lambda_{12} = \pm i \to y_1 = \cos x$

$y_2 = \sin x$

$y_{oo} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

2) Неоднородное (метод Лагранжа — правая часть не специального вида

Пусть $y_{oн} = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x \quad (*)$

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x) \end{cases}$$

Здесь $f(x) = tg\,x \cdot sec\,x$

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0 \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = tg\,x \cdot sec\,x \end{cases}$$

Решать можно разными способами. Это система (метод Крамера, подстановка, сложение ур-ний ...)

11

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0 & \cdot \sin x \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = \operatorname{tg} x \cdot \sec x & \cdot \cos x \end{cases} \quad +$$

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x \sin x + C_2'(x)\sin^2 x = 0 \\ -C_1'(x)\sin x \cos x + C_2'(x)\cos^2 x = \operatorname{tg} x \end{cases} \quad +$$

$$C_2'(x) = \operatorname{tg} x; \quad C_2(x) = \int \operatorname{tg} x\, dx =$$

$$= \int \frac{\sin x\, dx}{\cos x} = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + \tilde{C}_2$$

$$\boxed{C_2(x) = -\ln|\cos x| + \tilde{C}_2}$$

Из 1-го ур-ния: $C_1'(x) = -C_2'(x)\dfrac{\sin x}{\cos x}$

$$C_1'(x) = -\operatorname{tg} x \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$C_1(x) = -\int \frac{\sin^2 x\, dx}{\cos^2 x} = -\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx =$$

$$= -\int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int dx = -\operatorname{tg} x + x + \tilde{C}_1$$

$$\boxed{C_1(x) = -\operatorname{tg} x + x + \tilde{C}_1}$$

подставим $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в (*):

$$y_{он} = (-\operatorname{tg} x + x + \tilde{C}_1)\cos x + (-\ln|\cos x| + \tilde{C}_2)\sin x$$

$$y_{он} = -\sin x + x\cos x + \tilde{C}_1\cos x - \sin x \cdot \ln|\cos x| + \tilde{C}_2 \sin x$$

Ответ:

$$y_{он} = \underbrace{\tilde{C}_1\cos x + \tilde{C}_2 \sin x}_{y_{оо}} \underbrace{+ x\cos x - \sin x\,(1 + \ln|\cos x|)}_{y_{ч.н.}}$$

4. **Указать** вид общего решения (ДУ с постоянными коэффициентами и правой частью спец. вида, допускающей подбор частного)

$$y^{IV}+y''=xe^{-x}+2-x+x\sin x-e^{x}\sin x$$

1) Однородное $y^{IV}+y''=0$ $\quad \lambda^4+\lambda^2=0$

$\lambda^2(\lambda^2+1)=0$

$\lambda^2+1=0$

$\lambda^2=-1=i^2 \longrightarrow \lambda_{34}=\pm i$

$\lambda_{12}=0$

$y_1=e^{0x}=1 \quad y_2=xe^{0x}=x \qquad y_3=\cos x \qquad y_4=\sin x$

$$y_{oo}=C_1\cdot 1+C_2x+C_3\cos x+C_4\sin x$$

2) Неоднородное

$$f(x)=\underbrace{xe^{-x}}_{f_1(x)}+\underbrace{2-x}_{f_2(x)}+\underbrace{x\sin x}_{f_3(x)}-\underbrace{e^{x}\sin x}_{f_4(x)}$$

$f_1(x)=\boxed{x}e^{-x} \leftrightarrow \alpha_1=-1\ \beta_1=0 \to z_1=-1\pm 0i=-1$

$y_{ч1}=\boxed{A_1x+B}\cdot e^{-x}$ $\qquad z_1$ не совпадает с λ_i

переходит из $f_1(x)$

$f_2(x)=\boxed{2-x} \leftrightarrow \alpha_2=0\ \ \beta_2=0 \leftrightarrow z_2=0$

$(2-x)=e^{0x}\left((2-x)\cos 0x+10\cdot\sin 0x\right) \leftrightarrow \alpha_2=0,\ \beta_2=0$

$y_{ч2}=\left(\boxed{A_2x+B}\right)\cdot x^{2}$ — кратность корня $\lambda_{12}=0$, с которым совпадает z_2

$f_3(x) = \boxed{x}\, \sin x \Leftrightarrow \alpha_3 = 0 \quad \beta_3 = 1 \Leftrightarrow z_3 = 0 \pm 1i = \pm i$

коэффициент

$y_{\text{ч}_3} = \left(\boxed{A_3 x + B_3} \sin x + (D_3 x + F_3)\cos x\right) x^1$

переходит из $f_3(x)$ и к $\sin x$ дописываем $\cos x$

– кратность пары комплексных чисел $\lambda_{34} = \pm i$, с которой совпадает пара $z_3 = \pm i$

$f_4(x) = \boxed{1}\, e^x \sin x \Leftrightarrow \alpha_4 = 1;\ \beta_4 = 1 \Leftrightarrow z_4 = 1 \pm 1i = 1 \pm i$

эта пара не совпадает с корнями λ_i

$y_{\text{ч}_4} = \boxed{A_4}\, e^x \sin x + \boxed{B_4}\, e^x \cos x$

Ответ: $y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{ч}_1} + y_{\text{ч}_2} + y_{\text{ч}_3} + y_{\text{ч}_4}$.