(1)

Дифференцирование сложных функций

2) Пусть $z = f(x, y) = F(t)$, где $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $f(x, y)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ – дифференцируемые, тогда производная сложной ф-ции $z = f(x, y)$ вычисляется

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}}$$

(полная производная)

3) Если $z = f(x, y)$, где $y = \varphi(x)$, то полная производная

$$\boxed{\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}}$$

1) Если $z = f(x, y)$, $x = \varphi(\xi, \eta)$, $y = \psi(\xi, \eta)$, то частные производные

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \xi}} \quad \text{и} \quad \boxed{\frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta}}$$

Если $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – дифференцируемая ф-ция от $x_1 \ldots x_n$ и $x_1 = \varphi_1(t)$, $x_2 = \varphi_2(t)$, ..., $x_n = \varphi_n(t)$, то производная сложной ф-ции $u = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t))$ выражается

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\cdot\frac{dx_n}{dt}$$

В матричном виде: $y'_z = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial y}{\partial x_n}\right)\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial z_1} & \frac{\partial x_1}{\partial z_2} & \ldots & \frac{\partial x_1}{\partial z_l} \\ \frac{\partial x_2}{\partial z_1} & & & \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial z_1} & \frac{\partial x_n}{\partial z_2} & \ldots & \frac{\partial x_1}{\partial z_l} \end{pmatrix} = \frac{dy}{dz}$

$R_l \xrightarrow{g} R_n \xrightarrow{f} R_1$

$y = y(x_1 \ldots x_n)$, $x_1 = x_1(z_1 \ldots z_l)$, $x_2 = x_2(z_1 \ldots z_l)$

В частности: $\frac{\partial y}{\partial z_1} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial z_1}$

$R_l \xrightarrow{g} R_n \xrightarrow{f} R_m$

$m = 1$, $n = 3$, $l = 2$, $y = f(x_1, x_2, x_3)$, $x_i = \varphi_i(u, v)$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\ \frac{\partial y}{\partial x_2}\ \frac{\partial y}{\partial x_3}\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial u}\\ \frac{\partial x_2}{\partial u}\\ \frac{\partial x_3}{\partial u}\end{pmatrix}; \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\ \frac{\partial y}{\partial x_2}\ \frac{\partial y}{\partial x_3}\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial v}\\ \frac{\partial x_2}{\partial v}\\ \frac{\partial x_3}{\partial v}\end{pmatrix}$$

Теорема

если $f: R^n \to R^m$ $(\bar{y} = f(\bar{x}))$ диффер. в т. $\bar{x}_0$

$g: R^m \to R^k$ $(\bar{z} = g(\bar{y}))$ диффер. в т. $y_0 = f(\bar{x}_0)$,

то сложная ф-ция $f \circ g: R^n \to R^k$ $(z = g(f(x)))$ дифференц. в т. $\bar{x}_0$ и имеет место равенство

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial f}\cdot\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}$$

матрицы Якоби

№1856

$z=\frac{x}{y}\qquad x=e^{t}\qquad y=\ln t$

$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}=\frac{1}{y}\cdot e^{t}-\frac{x}{y^2}\frac{1}{t}=\frac{e^{t}}{\ln t}-\frac{e^{t}}{\ln^2 t}\frac{1}{t}=$

$=\frac{e^{t}(t\ln t-1)}{t\ln^2 t}$

№1859

$u=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\qquad \begin{array}{l} x=R\cos t\\ y=R\sin t\\ z=H\end{array}$

$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial u}{\partial z}\underbrace{\frac{dz}{dt}}_{0}=$

$=-\frac{z\cdot\cancel{2}x}{\cancel{2}(x^2+y^2)^{3/2}}(-R\sin t)-\frac{z\cdot\cancel{2}y}{\cancel{2}(x^2+y^2)^{3/2}}R\cos t=$

$=+\frac{H\cdot R^2\cos t\sin t}{R^3}-\frac{HR^2\sin t\cos t}{R^3}=0$

№1861

$\frac{\partial z}{\partial x}-?\qquad \frac{dz}{dx}-?$

$z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\qquad y=x^2$

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2+y^2}$

$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}\underbrace{\frac{dx}{dx}}_{1}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x^2+y^2}+\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{1}{x}\cdot 2x=$

$=-\frac{y}{x^2+y^2}+\frac{2x^2}{x^2+y^2}=\frac{2x^2-y}{x^2+y^2}\underset{y=x^2}{=}\frac{2x^2-x^2}{x^2+x^4}=\frac{1}{1+x^2}$

№1863

$z=f(u,v)\qquad u=x^2-y^2\qquad v=e^{xy}$

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=f'_u\cdot 2x+f'_v\,e^{xy}\cdot y$

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=f'_u(-2y)+f'_v\cdot e^{xy}\cdot x$

№1868

$z=f(\overset{u}{x+ay})$

$\frac{\partial z}{\partial y}=a\frac{\partial z}{\partial x}$

$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_u\cdot 1\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=f'_u\cdot a;$

подставили в уравнение.

$f'_u\cdot a\equiv a f'_u$

№1870

$z = y\cdot\varphi(x^2-y^2)$ удовлетворяет $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$

$\frac{\partial z}{\partial x}=y\,\varphi'_u\cdot 2x \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\varphi+y\cdot\varphi'_u(-2y)$ пусть $x^2-y^2=u$

подставляем в уравнение:

$$\frac{1}{\cancel{x}}2y\cancel{x}\,\varphi'_u+\frac{1}{y}(\varphi-2y^2\varphi'_u)=\cancel{2y\varphi'_u}+\frac{\varphi}{y}-\cancel{2y\varphi'_u}=$$

$$=\frac{\frac{z}{y}}{y}=\frac{z}{y^2}$$ ч.т.д.

№1903

$z=f(u,v)\qquad u=x^2+y^2;\ v=xy \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2};\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y};\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ – ?

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_u\cdot 2x+f'_v\cdot y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=(f''_{uu}\cdot 2x+f''_{uv}\cdot y)2x+2f'_u+y(f''_{vu}\cdot 2x+f''_{vv}\cdot y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(f''_{uu}\cdot 2y+f''_{uv}\,x)\cdot 2x+(f''_{vu}\cdot 2y+f''_{vv}\cdot x)y+f'_v$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f'_u\cdot 2y+f'_v\cdot x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(f''_{uu}\cdot 2y+f''_{uv}\,x)2y+2f'_u+(f''_{vu}\cdot 2y+f''_{vv}\cdot x)x$$

№1919 dz – ?

$z=u^v \qquad u=\frac{x}{y} \qquad v=xy \qquad dz$ – ?

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy$$

$$=\left[vu^{v-1}\frac{1}{y}+u^v\ln u\cdot y\right]dx+\left[vu^{v-1}\left(-\frac{x}{y^2}\right)+u^v\ln u\,x\right]dy=$$

$$=\left(xy\left(\frac{x}{y}\right)^{xy-1}\frac{1}{y}+\left(\frac{x}{y}\right)^{xy}\ln\frac{x}{y}\cdot y\right)dx-\left[xy\left(\frac{x}{y}\right)^{xy-1}\frac{x}{y^2}-\left(\frac{x}{y}\right)^{xy}\ln\frac{x}{y}x\right]dy$$

$$=\left(\frac{x}{y}\right)^{xy}\left[\left(\underset{\ln e^x}{x}y+y\ln\frac{x}{y}\right)dx+\left(x\ln\frac{x}{y}-\frac{x^2\cdot\cancel{y}}{\cancel{y}}\right)dy\right]$$

$$=\left(\frac{x}{y}\right)^{xy}\left(y\ln\frac{e^x\cdot x}{y}dx+x\ln\frac{x}{ye^{x^2}}dy\right)$$

Дифференцирование неявной ф-ции одной или нескольких переменных. Применение полного дифференциала и формулы Тейлора к приближенному представлению ф-ции нескольких переменных.

а) $F(x\,y)=0$ – задание неявной ф-ции $y=y(x)$

$F(x,y)$ – дифференцируемая ф-ция

$$\boxed{y'=-\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}=\frac{dy}{dx}}$$ – производная неявной ф-ции

Для ф-ции $z=g(x\,y)$ заданной в неявном виде $F(x\,y\,z)=0$ – дифференцируемая

$$\boxed{z'_x=\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}} \quad \boxed{z'_y=\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}} \quad \frac{\partial F}{\partial z}\neq 0$$

Производные высших порядков неявной функции можно найти последовательным дифференцированием производной 1-ого порядка, рассматривая при этом $y=y(x)$**!** и $y'=\frac{dy}{dx}$

Для ф. н. п. в общем виде $u=f(x_1,\ldots,x_n)$

$F(x_1\ldots x_n, u)=0$ – неявное задание ф-ции u

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x_k}=-\frac{F'_{x_k}}{F'_u}, \quad k=\overline{1,n}}; \quad F'_u\neq 0$$

x_k – независимые аргументы $k=\overline{1,n}$

Дифференциалом du 1-ого порядка $u=f(x_1\ldots x_n)$ в (·) $(x_1\ldots x_n)$ наз. главная часть полного приращения этой ф-ции в рассматриваемой точке, линейная относительно Δx_i

$$\boxed{du=\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n}$$

Системы неявных функций

$$\begin{cases} F(x\,y\,u\,v)=0 \\ G(x\,y\,u\,v)=0 \end{cases}$$

имеет решение $x=x_0$ $y=y_0$ $u=u_0$ $v=v_0$

F и G имеют непрерывные частные производные в окрестности $P_0(x_0\,y_0\,u_0\,v_0)$ и якобиан

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}\neq 0 \text{ в (·)} P_0$$

Тогда в некоторой окрестности (·)P_0 система определяет единственную систему непрерывных ф-ций $u(x\,y)$ и $v(x\,y)$, имеющих непрерывные частные производные и удовлетворяющих

$u(x_0\,y_0)=u_0$; $v(x_0\,y_0)=v_0$

Дифференциалы du и dv находятся

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial u}du+\frac{\partial F}{\partial v}dv=0 \\ \frac{\partial G}{\partial x}dx+\frac{\partial G}{\partial y}dy+\frac{\partial G}{\partial u}du+\frac{\partial G}{\partial v}dv=0 \end{cases}$$

№1943

Найти $\dfrac{dy}{dx}$ (5)

$F(x\,y)=0$

$F(x;\,y(x))=0$

$F'_x+F'_y\cdot y'_x=0$

$\boxed{y'_x=-\dfrac{F'_x}{F'_y}}$

$y=1+y^x \to \underbrace{1+y^x-y}_{F(x,y)}=0$

$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F'_x}{F'_y}$ $\qquad \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y^x\ln y}{xy^{x-1}-1}$

№1945

$\dfrac{dy}{dx}-?\quad \dfrac{d^2y}{dx^2}?$ при $x=1$ x-независимая

Здесь $y(x)$ неявно задана $F(x;y(x))=0$

$\underbrace{x^2-2xy+y^2+x+y-2}_{F(x\,y\,z)}=0$

$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F'_x}{F'_y}=-\dfrac{2x-2y+1}{-2x+2y+1};\qquad \dfrac{dy}{dx}\Big|_{\substack{x=1\\y=0}}=-\dfrac{2-2y+1}{-2+2y+1}=3$

при $x=1$

$1-2y+y^2+1+y-2=0$

$y^2-y=0$

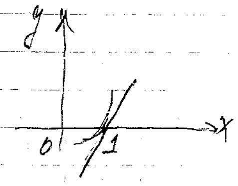
$y_1=0\quad y_2=1\quad M_1(1;0)\quad M_2(1;1)$

$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}=-1$

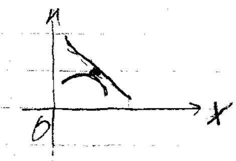
$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x-2y+1}{2x-2y-1}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(2-2y')(2x-2y-1)-(2x-2y+1)(2-2y')}{(2x-2y-1)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{\substack{x=1\\y=0\\y'_x=3}}\Big\}M_1=\frac{(2-2\cdot3)(2-0-1)-(2-0+1)(2-2\cdot3)}{(2-0-1)^2}=8$$



$$\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{\substack{x=1\\y=1\\y'_x=-1}}\Big\}M_2=\frac{(2+2)(2-2-1)-(2-2+1)(2+2)}{(2-2-1)^2}=-8$$



№1948

$\overbrace{x^3+2y^3+z^3-3xyz-2y+3}^{F(x,y)}=0$

$\dfrac{\partial z}{\partial x}-?\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}-?$

Здесь $z(x,y)$ неявно задана $F(x,y;z(x,y))=0$ x,y-независимые аргументы

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F'_x}{F'_z}=-\dfrac{3x^2-3yz}{3z^2-3xy}$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F'_y}{F'_z}=-\dfrac{6y^2-3xz-2}{3z^2-3xy}$

№1955

Найти dz и dz^2 для $\begin{cases}x=2\\y=0\\z=1\end{cases}$

$F(xy)=2x^2+2y^2+z^2-8xz-z+8=0$

$dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy=-\dfrac{F'_x}{F'_z}dx-\dfrac{F'_y}{F'_z}dy$

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F'_x}{F'_z}=-\dfrac{4x-8z}{2z-8x-1}\qquad \dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{\substack{x=2\\y=0\\z=1}}=-\dfrac{8-8}{2-16-1}=0.$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F'_y}{F'_z}=-\dfrac{4y}{2z-8x-1}\qquad \dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{\substack{x=2\\y=0\\z=1}}=-\dfrac{0}{2-16-1}=0$

$\boxed{dz=0}$

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{8z-4x}{2z-8x-1}\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{4y}{8x+1-2z}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{(8\cdot z'_x-4)(2z-8x-1)-(8z-4x)(2z'-8)}{(2z-8x-1)^2}$$

$$\left.\frac{d^2 z}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=2\\y=0\\z=1\\z'_x=0}}=\frac{(0-4)(2-16-1)-(8-8)(0-8)}{(2-16-1)^2}=\frac{-4}{-15}=\frac{4}{15}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{4(8x+1-2z)-4y(-2z'_y)}{(8x+1-2z)^2}\qquad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{\substack{x=2\\y=0\\z=1\\z'_y=0}}=\frac{4(16+1-2)}{(16+1-2)^2}=\frac{4}{15}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{8z'_y(2z-8x-1)-(8z-4x)(2z'_y)}{(2z-8x-1)^2};\qquad \left.\frac{d^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=2\\y=0\\z=1\\z'_y=0}}=\frac{0-(8-8)\cdot 2}{(2-16-1)^2}=0$$

$$\boxed{d^2z=\frac{4}{15}(dx^2+dy^2)}$$

№1958 Доказать, что $F(\underbrace{x-az}_{u},\ \underbrace{y-bz}_{v})=0$ удовлетворяет ур-нию $\underbrace{a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}}_{Л.ч}=1$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{F'_u\cdot 1+F'_v\cdot 0}{F'_u(-a)+F'_v(-b)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}=-\frac{F'_v\cdot 1}{F'_u(-a)+F'_v(-b)}$$

Л.ч

$$a\left(\frac{F'_u}{F'_u a+F'_v\cdot b}\right)+b\left(\frac{F'_v}{F'_u a+F'_v b}\right)=\frac{aF'_u+bF'_v}{F'_u a+F'_v\cdot b}=1$$

$$1\equiv 1$$

№1959

$F\left(\underbrace{\frac{x}{z}}_{u};\ \underbrace{\frac{y}{z}}_{v}\right)=0$ удовлетворяет $\overbrace{x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}}^{\text{Левая часть}}=z$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{F'_u\frac{1}{z}}{F'_u\left(-\frac{x}{z^2}\right)+F'_v\left(-\frac{y}{z^2}\right)}=\frac{F'_u\frac{1}{z}}{F'_u\frac{x}{z^2}+F'_v\frac{y}{z^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}=-\frac{F'_v\cdot\frac{1}{z}}{F'_u\left(-\frac{x}{z^2}\right)+F'_v\left(-\frac{y}{z^2}\right)}=\frac{F'_v\cdot\frac{1}{z}}{F'_u\frac{x}{z^2}+F'_v\frac{y}{z^2}}$$

Левая часть:

$$x\cdot\frac{F'_u\cdot z}{F'_u\cdot x+F'_v\cdot y}+y\frac{F'_v\cdot z}{F'_u\cdot x+F'_v y}=z\frac{\cancel{(xF'_u+yF'_v)}}{\cancel{xF'_u+F'_v\cdot y}}$$

$$z\equiv z$$