Семинар № 12. (1)

Производная по направлению и градиент. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

ФМП: $f: R^n \to R^1$

пусть $\bar r_0 = x_0\bar i + \bar j y_0 + z_0\bar k$ – радиус-вектор (·) $P_0(x_0 y_0 z_0)$
$\bar n$ – вектор данного направления

<u>Производная скалярного поля</u> $f(P)$ в (·) P_0 по направлению $\bar n$ (направление $\bar n = \cos\alpha\,\bar i + \cos\beta\,\bar j + \cos\gamma\,\bar k$)

$$\left.\frac{\partial f}{\partial n}\right|_{P_0} = \lim_{\tau\to 0}\frac{f(\bar r_0+\tau \bar n)-f(\bar r_0)}{\tau}$$

(если этот предел сущ-ет) и характеризует скорость изменения функц $f(P)$ в направлении $\bar n$

$\bar r_0 = x_0\bar i + y_0\bar j + z_0\bar k$

когда f – дифференцируема в (·) P_0

$$\left.\frac{\partial f}{\partial n}\right|_{P_0} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}\nu_i$$

ν_i – направляющие косинусы $\bar n_0$

$n_0 = \frac{\bar n}{|\bar n|}$ – единичный вектор

<u>Опр</u> <u>вектор</u> вида $\{f'_{x_1}(x) \dots f'_{x_n}(x)\}$ наз <u>grad f(x)</u> в точке

$$\boxed{\left.\frac{\partial f(x)}{\partial n}\right|_{P_0} = (\operatorname{grad} f(\bar x), \bar n^0)}$$ – скалярное произведение → производная по направлению.

! n_0 – единичный вектор

1) grad – вектор, проекции которого на координатные оси являются соответствующие частные производные $f(P)$

$$\boxed{\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\bar i + \frac{\partial f}{\partial y}\bar j + \frac{\partial f}{\partial z}\bar k}$$

2) Градиент $f(P)$ и производная в направлении $\bar n$ связаны

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial n} = \text{пр}_{n}\operatorname{grad} f}$$

3) Направление grad f – есть направление наибольшего роста функции $f(P)$ в (·) P_0

4) Наибольшая скорость роста $f(P)$ в (·) P_0 равна модулю $|\operatorname{grad} f(P_0)|$

$\boxed{z = f(x,y)}$

<u>Опр</u> касательной плоскостью к поверхности в (·) M наз плоскость содержащая в себе касательные ко всем кривым, проведенным на поверхности через (·) M.

<u>Опр</u> нормалью к поверхности в (·) M наз прямая, проходящая через M ⊥ касательной пл-ти в (·) M.

поверхность задана <u>неявно</u> $F(x\,y\,z)=0$ и F – дифференцируема в некоторой окрестности (·) M и $\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_M, \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_M, \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_M \neq 0$, то ур-ние касательной пл. в (·) M:

$$\boxed{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M(x-x_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M(y-y_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_M(z-z_0)=0}$$

$$\boxed{\frac{x-x_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M} = \frac{y-y_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M} = \frac{z-z_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_M}}$$ – ур-ние нормали к поверхности в (·) M

поверхность задана явно $z = f(x,y)$, где $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M$ $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M$ в (·) $M(x_0, y_0, z_0)$ конечны и не могут быть $= 0$ одновременно, то

$$\boxed{z - z_0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M (x - x_0) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M (y - y_0)}$$ ← ур-ние касательной плоскости

$$\boxed{\frac{x - x_0}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M} = \frac{y - y_0}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M} = \frac{z - z_0}{-1}}$$ – ур-ние нормали в (·) М

Например: $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ – это означает, что касательная плоскость параллельна оси Ox, а нормаль лежит в плоскости $x = x_0$

Если $f(x,y) = z$ – дифференцируема, то производная в данном направлении записывается

$$\frac{\partial z}{\partial n} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \sin\alpha$$ α – угол, образов. вектором $\bar{n}_0$ с Ox

Если $u = f(x,y,z)$, то

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{n}} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos\gamma$$

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы $\bar{n}$

Условие дифференцируемости ф.м.п. равносильно тому, что график этой функции обладает касательной плоскостью.

Касательная пл-ть к поверхности в (·) P – это плоскость, обладающая тем свойством, что расстояние от какой-либо (·) поверхности Q до касательной пл-ти есть величина более высокого порядка малости, чем ее расстояние до (·) P.

Производная по направлению и grad u.

№1876

$z = x^2 - xy - 2y^2$ $P(1,2)$ в направлении $(\bar{n}\,\hat{}\,Ox) = 60^\circ$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial n}\right|_P = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_P \cos\alpha + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_P \cos\beta$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (2x - y)\Big|_P = 2 - 2 = 0 \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = (-x - 4y)\Big|_P = -1 - 8 = -9$$

$$\alpha = 60^\circ \to \beta = 30^\circ \qquad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \quad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial n}\right|_P = 0 \cdot \frac{1}{2} + (-9)\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{9\sqrt{3}}{2}$$

№1878

$z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ $P(1\ 1)$ в направлении биссектрисы 1 го координатного угла

$\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial n}\right|_P = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_P \cos\alpha + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_P \cos\beta$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1 \cdot 2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}\Bigg|_P = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}\,\sqrt{x^2+y^2}}\Bigg|_P = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial n}\right|_P = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

№1880

$u = xy + yz + zx$ $M(2,\ 1,\ 3)$ $N(5\ 5\ 15)$

$\left.\frac{\partial u}{MN}\right|_M - ?$ $\quad \overline{MN}\{3\ 4\ 12\}$

$\overline{MN}^\circ \left\{\frac{3}{13};\ \frac{4}{13};\ \frac{12}{13}\right\}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (y + z)\Big|_M = 4 \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = (x + z)\Big|_M = 5 \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = (y + x)\Big|_M = 3$$

$$\left.\frac{\partial u}{MN}\right|_M = 4\cdot\frac{3}{13} + 5\cdot\frac{4}{13} + 3\cdot\frac{12}{13} = \frac{12 + 20 + 36}{13} = \frac{68}{13} \approx 5{,}23$$

В направлении $\overline{\operatorname{grad} u}$

$\operatorname{grad} u\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\ \frac{\partial u}{\partial y}\ \frac{\partial u}{\partial z}\right\}$ $\quad \operatorname{grad}\big|_M = \{4\ 5\ 3\}$

$\operatorname{grad}^\circ_M\left\{\frac{4}{\sqrt{50}}\ \frac{5}{\sqrt{50}}\ \frac{3}{\sqrt{50}}\right\}$

$$\left.\frac{\partial u}{\operatorname{grad} u}\right|_M = 4\cdot\frac{4}{\sqrt{50}} + \frac{5\cdot 5}{\sqrt{50}} + \frac{3\cdot 3}{\sqrt{50}} = \frac{16 + 25 + 9}{\sqrt{50}} = \sqrt{50} \approx 7{,}07$$

(4)

№1884

grad z в (·) P(2,1) $z = x^3 + y^3 - 3xy$

grad z $\left\{ \frac{\partial z}{\partial x}\ \frac{\partial z}{\partial y} \right\}$ $\frac{\partial z}{\partial x} = (3x^2 - 3y)_P = 3\cdot4 - 3\cdot1 = 9$

$\frac{\partial z}{\partial y} = (3y^2 - 3x)_P = 3 - 6 = -5$

$grad\, z|_P = \{9; -5\}$ или $grad\, z|_P = 9i - 5j$

Касательная плоскость и нормаль к поверхности

№1981 (а, б)

а) $z = x^2 + y^2$ $A(1; -2; 5)$ $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x|_A = 2$

$z - z_0 = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_A (x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_A (y - y_0)$ $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y|_A = -4$

$z - 5 = 2(x-1) - 4(y+2)$

$\boxed{2x - 4y - z - 5 = 0}$ - касат. пл-ть

$\frac{x - x_0}{\frac{\partial z}{\partial x}\big|_A} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial z}{\partial y}\big|_A} = \frac{z - z_0}{-1}$ $\boxed{\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-5}{-1}}$ ур-ние нормали

б) $F = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{8} = 0$ $B(4\ 3\ 4)$

$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{x}{8}\Big|_B = \frac{1}{2}$; $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2y}{9}\Big|_B = \frac{2}{3}$; $\frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{z}{4}\Big|_B = -1.$

$\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_B (x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_B (y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}\Big|_B (z - z_0) = 0$

$\frac{1}{2}(x - 4) + \frac{2}{3}(y - 3) - 1(z - 4) = 0$

$\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y - z = 0$ $\boxed{3x + 4y - 6z = 0}$ - касат. пл-ть.

$\frac{x - x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}\big|_B} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}\big|_B} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}\big|_B}$ $\boxed{\frac{x-4}{1/2} = \frac{y-3}{2/3} = \frac{z-4}{-1}}$ - ур-ние нормали

№1985

$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ касат. пл-ть ∥ пл-ти $x + 4y + 6z = 0$

$F = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 21 = 0$ $\vec{n}\{1; 4; 6\}$

$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$ $\frac{\partial F}{\partial y} = 4y$ $\frac{\partial F}{\partial z} = 6z$

grad F $\left\{ \frac{\partial F}{\partial x}\ \frac{\partial F}{\partial y}\ \frac{\partial F}{\partial z} \right\}$ - нормаль к поверхности

$\frac{2x}{1} = \frac{4y}{4} = \frac{6z}{6}$

$\begin{cases} 8x = 4y \\ 4y = 4z \\ 2x = z \end{cases}$ $\begin{cases} 2x = y \\ y = z \\ 2x = z \end{cases}$ → Далее подставляем в ур-ние поверхности

(5)

$x^2+2(2x)^2+3(2x)^2=21$

$x^2+8x^2+12x^2=21 \qquad x=\pm 1$

$\begin{cases} x=x \\ y=2x \\ z=2x \end{cases}$

$A\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=2 \end{cases} \qquad B\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \\ z=-2 \end{cases}$

(·) A $\quad \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_A=2 \quad \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_A=8 \quad \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_A=12$

$2(x-1)+8(y-2)+12(z-2)=0$

$2x+8y+12z-42=0 \qquad \underline{x+4y+6z-21=0}$

(·) B $\quad \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_B=-2 \quad \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_B=-8 \quad \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_B=-12$

$-2(x+1)-8(y+2)-12(z+2)=0$

$2x+8y+12z+42=0 \qquad \underline{x+4y+6z+21=0}$

(6)

Касательная пл-ть
и нормаль к пов-ти

№ 7.229(а)

$z = \sin x \cos y$ в (·) $A\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$

$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos x \cos y \Big|_A = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\sin x \sin y \Big|_A = -\frac{1}{2}$

Ур-ние касательной пл-ти

$$(z - z_0) = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_A (x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_A (y - y_0)$$

$$z - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{\pi}{4}\right); \quad 2z - 1 = x - \cancel{\frac{\pi}{4}} - y + \cancel{\frac{\pi}{4}}$$

$$\boxed{x - y - 2z + 1 = 0}$$

Ур-ние нормали:

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_A} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_A} = \frac{z - z_0}{-1}; \quad \frac{x - \frac{\pi}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{y - \frac{\pi}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{z - \frac{1}{2}}{-1}$$

$$\boxed{\frac{x - \frac{\pi}{4}}{1} = \frac{y - \frac{\pi}{4}}{1} = \frac{z - \frac{1}{2}}{-2}}$$

№7.232

$z = 4x - xy + y^2$ Найти ур-ние касательной пл-ти, ⊥ пл-ти Q: $4x + y + 2z + 9 = 0$

$f(xyz) = 4x - xy + y^2 - z = 0$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 4 - y$; $\frac{\partial f}{\partial y} = -x + 2y$

$\frac{\partial f}{\partial z} = -1$

нормальный вектор: $n\{4\ 1\ 2\}$

Из условия параллельности касательной пл-ти и данной (их нормальные в-ры ∥ → координаты пропорциональны)

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{4} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{1} = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{2} \to \frac{4-y}{4} = \frac{-x+2y}{1} = \frac{-1}{2}$$

$$\begin{cases} \frac{4-y}{4} = -\frac{1}{2} \\ \frac{-x+2y}{1} = -\frac{1}{2} \\ z = 4x - xy + y^2 \end{cases} \quad \begin{cases} 8 - 2y + 4 = 0 \\ 4y - 2x + 1 = 0 \\ z = 4x + xy + y^2 \end{cases} \to (A) \begin{cases} y = 6 \\ x = \frac{25}{2} \\ z = 11 \end{cases}$$

– точка касания касательной пл-ти, ∥ пл-ти Q

$\frac{\partial f}{\partial x} = 4 - y\Big|_A = -2$; $\frac{\partial f}{\partial y} = -x + 2y\Big|_A = -\frac{1}{2}$; $\frac{\partial f}{\partial z} = -1$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_A (x - x_A) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_A (y - y_A) + \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_A (z - z_A) = 0$$

$$-2\left(x - \frac{25}{2}\right) - \frac{1}{2}(y - 6) - 1(z - 11) = 0$$

$$\boxed{4x + y + 2z - 78 = 0}$$

№7.233 (а)

Найти ур-ние касат. пл-ти и нормали в т. $P(2, 1, 3)$

$x(y+z)(xy-z) + 8 = 0$

$(xy + xz)(xy - z) + 8 = 0$

$x^2y^2 + x^2yz - xyz - xz^2 + 8 = 0 = f(xyz)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2 + 2xyz - yz - z^2\Big|_P = 4 + 12 - 3 - 9 = 4$; $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y + x^2z - xz\Big|_P = 8 + 12 - 6 = 14$

$\frac{\partial f}{\partial z} = x^2y - xy - 2xz\Big|_P = 4 - 2 - 12 = -10$

касательная пл-ть:

$4(x-2) + 14(y-1) - 10(z-3) = 0$ $\boxed{2x + 7y - 5z + 4 = 0}$

Ур-ние нормали:

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{14} = \frac{z-3}{-10} \qquad \boxed{\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{7} = \frac{z-3}{-5}}$$