Семинар № 13. Подготовка к КР по ЛА „Дифференцирование ФНП."

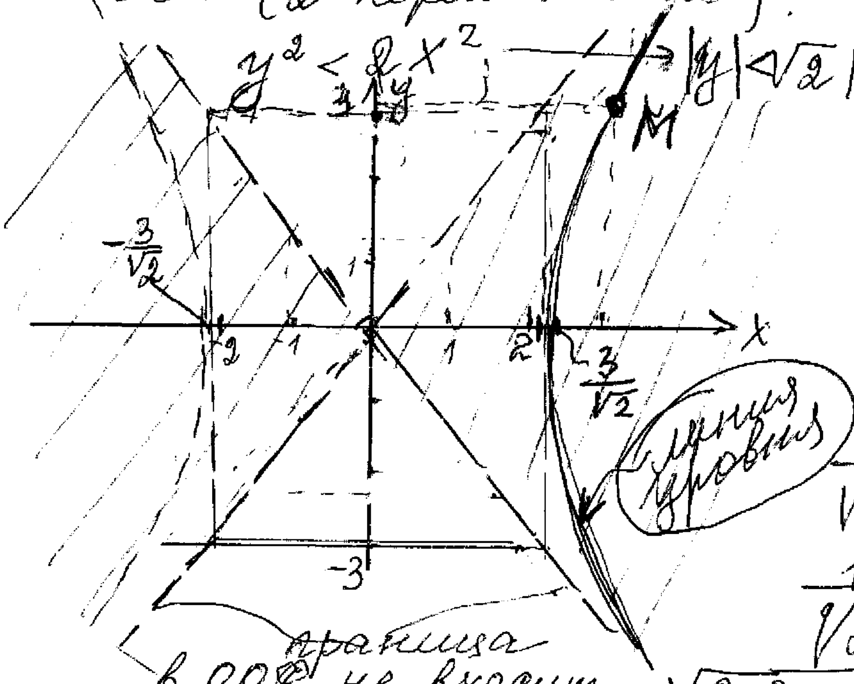
min − 9 баллов; max − 15 баллов
Каждая задача оценивается 0−3 балла.

Примерный вариант 1.

1] $z = \frac{1}{\sqrt{2x^2 - y^2}}$; $M(3;3)$

ООФ ($2^х$ переменные функция): $2x^2 - y^2 > 0$ строго > 0

$y^2 < 2x^2$, $|y| < \sqrt{2}|x|$



граница в ООФ не входит т.к. $y^2 < 2x^2$

Линия уровня через $M(3;3)$

$z\big|_M = z\big|_{(3,3)} = \frac{1}{\sqrt{2\cdot 9 - 9}} = \frac{1}{3}$

$\frac{1}{\sqrt{2x^2 - y^2}} = z_M$

$\frac{1}{\sqrt{2x^2 - y^2}} = \frac{1}{3}$

$\sqrt{2x^2 - y^2} = 3$; $2x^2 - y^2 = 9$

$\frac{2x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$; $\boxed{\frac{x^2}{\frac{9}{2}} - \frac{y^2}{9} = 1}$ гипербола

$a = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$ $b = 3$

2] $u = \sin x \cos y + \sin y \cos z + \sin z \cos x$

$M(0;0;0)$ $\bar{l} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + \bar{k}$

$u = u(x, y, z)$ − ф-ция $3^х$ переменных

$\boxed{\operatorname{grad} u \left\{\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z}\right\}}$ − вектор градиента в произвольной точке

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\cos x\cdot\cos y-\sin z\sin x;\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M(0,0,0)}=1\cdot1-0=1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\sin x\sin y+\cos y\cos z;\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M}=0+1\cdot1=1$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-\sin y\sin z+\cos z\cos x;\quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M}=0+1=1$$

$$\overline{\operatorname{grad} u}\Big|_M=\left\{\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M;\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M;\ \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M\right\}$$

$$\underline{\overline{\operatorname{grad} u}\Big|_M=\{1;\ 1;\ 1\}}$$ или

$$\overline{\operatorname{grad} u}\Big|_M=\bar i+\bar j+\bar k$$ (в виде разложения по $\{\bar i,\bar j,\bar k\}$)

<u>производная по направлению</u> $\bar l$

$$\boxed{\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M\cos\alpha+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M\cos\beta+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M\cos\gamma}$$

$\bar l^0\{\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma\}$ $\quad \bar l^0$ – орт

направляющие косинусы $\bar l$

$\bar l=2\bar i-3\bar j+\bar k\longrightarrow \bar l\{2;\ -3;\ 1\}$

$|\bar l|=\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}=14$

$\bar l^0\left\{\underbrace{\frac{2}{14}}_{\cos\alpha};\ \underbrace{\frac{-3}{14}}_{\cos\beta};\ \underbrace{\frac{1}{14}}_{\cos\gamma}\right\}$ – орт направления $\bar l$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M\cos\alpha+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M\cos\beta+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M\cos\gamma$$

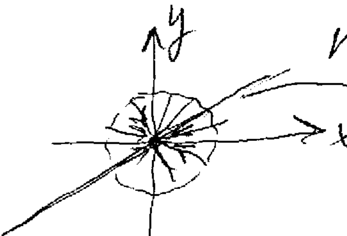
$M(0;0;0)$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M=1\cdot\frac{2}{14}+1\left(\frac{-3}{14}\right)+1\cdot\frac{1}{14}=\cancel{\frac{2}{14}}-\cancel{\frac{3}{14}}+\cancel{\frac{1}{14}}=0$$

Ответ: $\overline{\operatorname{grad} u}\Big|_M\{1;\ 1;\ 1\}$; $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M=0$

3] $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} \frac{x+y}{x-y} = \left|y=kx\right| = \lim\limits_{x\to0}\frac{x+kx}{x-kx} = \lim\limits_{x\to0}\frac{\cancel{x}(1+k)}{\cancel{x}(1-k)} = \frac{1+k}{1-k} \to$ предел $\nexists$

т.к. зависит от траектории движения



$y=kx$ — прямая с угловым коэффициентом k, проходящая через начало координат $(0;0)$.

Ответ: предел не существует.

4] $u=\ln\left(x+\sqrt{y+z}\right)+\frac{z}{x}$ Найти все частные производные второго порядка

$u=u(xyz)$ — ф-ция $3^х$ переменных

Тема: Сложная ф-ция

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\left(x+\sqrt{y+z}\right)}\cdot 1 + z(-1)x^{-2} = \frac{1}{x+\sqrt{y+z}} - \frac{z}{x^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{1}{x+\sqrt{y+z}}\right)\left(x+\sqrt{y+z}\right)'_y + 0 = \left(\frac{1}{x+\sqrt{y+z}}\right)\left(0+\frac{1\cdot1}{2\sqrt{y+z}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2x\sqrt{y+z}+2y+2z} = \frac{1}{2}\frac{1}{\left(x\sqrt{y+z}+y+z\right)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{1}{x+\sqrt{y+z}}\right)\left(x+\sqrt{y+z}\right)'_z + \left(\frac{1}{x}z\right)'_z =$$

$$= \left(\frac{1}{x+\sqrt{y+z}}\right)\left(0+\frac{1\cdot1}{2\sqrt{y+z}}\right) + \frac{1}{x} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\left(x\sqrt{y+z}+y+z\right)} + \frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \left(\frac{1}{x+\sqrt{y+z}} - z\cdot x^{-2}\right)'_x =$$

$$= \frac{-1}{\left(x+\sqrt{y+z}\right)^2}\cdot 1 + 2zx^{-3} = -\frac{1}{\left(x+\sqrt{y+z}\right)^2} + \frac{2z}{x^3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(x\sqrt{y+z}+y+z)}\right)'_y =$$

$$= \frac{1}{2}(-1)\left(x\sqrt{y+z}+y+z\right)^{-2}\cdot\left(\frac{x\cdot 1}{2\sqrt{y+z}}+1\right) =$$

$$= -\frac{1}{2\left(x\sqrt{y+z}+y+z\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{2\sqrt{y+z}}+1\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = u''_{zz} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(x\sqrt{y+z}+y+z\right)^{-1}\right)'_z + \left(\frac{1}{x}\right)'_z =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(-1)}{\left(x\sqrt{y+z}+y+z\right)^2}\left(\frac{x\cdot 1}{2\sqrt{y+z}}+1\right) + 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = u''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \left(\frac{1}{x+\sqrt{y+z}} - \frac{z}{x^2}\right)'_y =$$

$$= \frac{-1}{\left(x+\sqrt{y+z}\right)^2}\left(0+\frac{1}{2\sqrt{y+z}}\cdot 1\right) - 0 \leftarrow \left(\frac{z}{x^2}\right)'_y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} = u''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x\sqrt{y+z}+y+z}\right)'_x =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{-1}{\left(x\sqrt{y+z}+y+z\right)^2}\left(x\sqrt{y+z}+y+z\right)'_x =$$

$$= -\frac{1}{2\left(x\sqrt{y+z}+y+z\right)^2}\cdot\sqrt{y+z} \qquad u''_{xy} = u''_{yx}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z} = \left(u'_x\right)'_z = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \left(\frac{1}{x+\sqrt{y+z}} - \frac{z}{x^2}\right)'_z =$$

$$= \frac{-1}{\left(x+\sqrt{y+z}\right)^2}\left(0+\frac{1}{2\sqrt{y+z}}\cdot 1\right) - 0$$

Аналогично $\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x} = \left(u'_x\right)'_z$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = (u'_y)'_z = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x\sqrt{y+z}+y+z}\right)'_z =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(-1)}{(x\sqrt{y+z}+y+z)^2}\left(x\cdot\frac{1}{2\sqrt{y+z}}\cdot 1+0+1\right)$$

Аналогично $\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} = (u'_z)'_y = \ldots$

5. Тема: неявная ф-ция

$\ln x + \ln y + \ln z = 2z - 2$ $\quad M(\underset{x_0}{1};\underset{y_0}{1};\underset{z_0=f(x_0 y_0)}{1})$

Найти $dz\big|_{(1;1)}$ — ?

Приближенно вычислить $z(\underset{x}{1{,}1};\underset{y}{1{,}1})$

Решение:

$z=f(xy)$ задана неявно если $F(x,y,z)=0$

$$\underbrace{\ln x + \ln y + \ln z - 2z + 2}_{F(xyz)} = 0$$

Для $z=f(x,y)$, где x,y — независимые аргументы

$$\boxed{dz\big|_M = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_M dx + \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_M dy} \qquad M(1;1;1)$$

Для неявной ф-ции:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z};\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}}$$

$\frac{\partial F}{\partial x} = F'_x = \frac{1}{x}$; $\quad \frac{\partial F}{\partial y} = F'_y = \frac{1}{y}$; $\quad \frac{\partial F}{\partial z} = F'_z = \frac{1}{z} - 2$

$F'_x\big|_M = 1$ $\quad F'_y\big|_M = 1$ $\quad F'_z = 1-2 = -1$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_M = -\frac{F'_x\big|_M}{F'_z\big|_M} = -\frac{1}{(-1)} = 1$$

Тема: неявная функция

$$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_M = -\frac{F'_y|_M}{F'_z|_M} = -\frac{1}{(-1)} = 1$$

$$\boxed{dz|_M = 1\cdot dx + 1\cdot dy = dx + dy}$$

$z(\underset{x}{1{,}1};\ \underset{y}{1{,}1}) - ?$ $\qquad M(\underset{x_0}{1},\ \underset{y_0}{1},\ \underset{z_0 = f(x_0 y_0)}{1})$

$$\Delta x = 1{,}1 - x_0 = 1{,}1 - 1 = 0{,}1$$

$$\Delta y = y - y_0 = 1{,}1 - 1 = 0{,}1$$

$$z(x, y) \approx z(x_0 y_0) + dz\Big|_{(x_0 y_0)}$$

$$z(1{,}1;\ 1{,}1) \approx z(x_0 y_0) + dx + dy \approx$$

$$\approx 1 + 0{,}1 + 0{,}1 \approx 1{,}2$$

Δy

Δx

$dx = \Delta x$ – для
$dy = \Delta y$ независимых аргументов, какими и являются x и y в случае неявно заданной ф-ции

$F(\underbrace{x,\ y}_{\text{независимые}},\ \underbrace{z(x, y)}_{\text{функция}}) = 0$

Примерный вариант 2.

1] $u=7x^2+5y^2+3z^2$ $\quad M(-3;\ 3;\ -3)$

Изобразить поверхность уровня, проходящую через точку M

$u|_M=7(-3)^2+5\cdot 3^2+3(-3)^2=63+45+27=135$

(В ф-цию $u(x\,y\,z)$ подставим координаты точки M, т.к. поверхность уровня проходит через M)

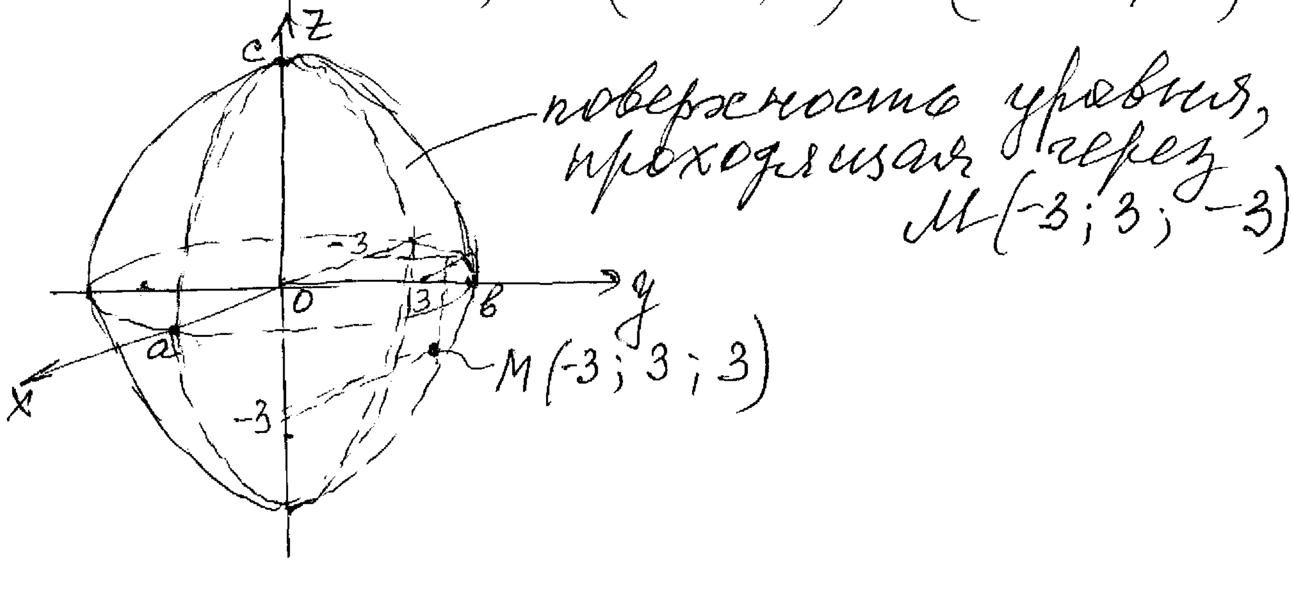
$7x^2+5y^2+3z^2=u_M$

$7x^2+5y^2+3z^2=135 \quad :135$

$\frac{7x^2}{135}+\frac{5y^2}{135}+\frac{3z^2}{135}=1$

$$\boxed{\frac{x^2}{\frac{135}{7}}+\frac{y^2}{27}+\frac{z^2}{45}=1}$$ эллипсоид (каноническое уравнение)

$a=\sqrt{\frac{135}{7}}$ $(a\approx 4{,}39)$ $\quad b=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$ $(b\approx 5{,}19)$, $\quad c=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$ $(c\approx 6{,}75)$



2] $z = y^2 e^{\frac{x}{y}}$; $M(3;1)$ $\overline{\text{grad}\, z}\Big|_M$ - ?

$\bar{l} = -\bar{i} + \bar{j}$ $\frac{\partial z}{\partial l}\Big|_M$ - ?

$$\boxed{\overline{\text{grad}\, z}\left\{\frac{\partial z}{\partial x};\ \frac{\partial z}{\partial y}\right\}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 e^{\frac{x}{y}} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)'_x = y^2 e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y} = y e^{\frac{x}{y}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\underset{u}{y^2} \cdot \underset{v}{e^{\frac{x}{y}}}\right)'_y = 2y e^{\frac{x}{y}} + y^2 e^{\frac{x}{y}}\left(-\frac{x}{y^2}\right) =$$

$$= 2y e^{\frac{x}{y}} - x e^{\frac{x}{y}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_M = y e^{\frac{x}{y}}\Big|_M = 1 e^{\frac{3}{1}} = e^3;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_M = \left(2y e^{\frac{x}{y}} - x e^{\frac{x}{y}}\right)\Big|_M = 2 \cdot 1 e^{\frac{3}{1}} - 3 \cdot e^{\frac{3}{1}} =$$

$$= 2e^3 - 3e^3 = -e^3$$

$$\underline{\overline{\text{grad}\, z}\Big|_M = \{e^3; -e^3\}}$$

производная в направлении l

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial l}\Big|_M = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_M \cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_M \cos\beta}$$

$$\bar{l} = -\bar{i} + \bar{j} \longrightarrow \bar{l}\{-1;\ 1\} \quad |\bar{l}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\bar{l}^0\left\{\underbrace{-\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\cos\alpha};\ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\cos\beta}\right\}$$

$$\frac{\partial z}{\partial l}\Big|_M = \left(\overline{\text{grad}\, z}\Big|_M;\ \bar{l}^0\right) = \cancel{e^3\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \cancel{- e^3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = 0$$

Ответ: $\overline{\text{grad}\, z}\Big|_M \{e^3; -e^3\}$

$$\frac{\partial z}{\partial l}\Big|_M = 0$$

(9)

3] $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \exp\left(-\frac{1}{x^2+y^2}\right) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} =$

$= \left| \begin{matrix} y = kx \\ k\text{-число} \end{matrix} \right| = \lim\limits_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2+k^2x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2(1+k^2)}} =$

$= \left| \begin{matrix} 1+k^2\text{-число} \\ x\to 0 \end{matrix} \right| = e^{-\frac{1}{0\cdot c}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0$

4] $z = f(u, v)$; $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$.
$f = \operatorname{arctg}\frac{u}{v}$, $u = x^2+y^2$ $v = xy$, т.е.
$z = \operatorname{arctg}\frac{u}{v}$, где $u = x^2+y^2$, $v = xy$

Найти z'_x, z'_y — ?

$$\boxed{z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}}$$

$$z'_x = \underbrace{\left(\frac{1}{1+\left(\frac{u}{v}\right)^2}\cdot\frac{1}{v}\right)}_{\frac{\partial z}{\partial u}}\cdot\underbrace{2x}_{\frac{\partial u}{\partial x}} + \underbrace{\left(\frac{1}{1+\left(\frac{u}{v}\right)^2}\cdot\left(-\frac{u}{v^2}\right)\right)}_{\frac{\partial z}{\partial v}}\cdot\underbrace{y}_{\frac{\partial v}{\partial x}}$$

Ответ оставляем в такой форме.

$$\boxed{z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.}$$

$$z'_y = \underbrace{\left(\frac{1}{1+\left(\frac{u}{v}\right)^2}\cdot\frac{1}{v}\right)}_{\frac{\partial z}{\partial u}}\cdot\underbrace{2y}_{\frac{\partial u}{\partial y}} + \underbrace{\left(\frac{1}{1+\left(\frac{u}{v}\right)^2}\cdot\left(-\frac{u}{v^2}\right)\right)}_{\frac{\partial z}{\partial v}}\cdot\underbrace{x}_{\frac{\partial v}{\partial y}}$$

5 Неявнозаданная функция (10)

$x^3+y^3+z^3=3xyz$ $M(1;-2;1)$

Найти: $dz|_M$, $z(0{,}9;-1{,}8)$

Решение:

$F(x,y,z)=0$ — неявно задана $z=z(x,y)$

$$\boxed{dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy}$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}} \qquad \boxed{\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}}$$

$$\underbrace{x^3+y^3+z^3-3xyz}_{F(x,y,z)}=0$$ x,y — независимые переменные

$F'_x=3x^2-3yz$; $F'_y=3y^2-3xz$; $F'_z=3z^2-3xy$

$F'_x|_M=3\cdot1^2-3(-2)\cdot1=3+6=9$

$F'_y|_M=3(-2)^2-3\cdot1\cdot1=12-3=9$

$F'_z|_M=3\cdot1^2-3\cdot1(-2)=3+6=9$

$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_M=-\frac{9}{9}=-1$; $\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_M=-\frac{9}{9}=-1$

$$dz|_M=\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_M dx+\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_M dy$$

$$\boxed{dz|_M=-1\cdot dx-1\cdot dy=-dx-dy}$$

$\Delta z=z(x,y)-z(x_0;y_0)\approx dz|_{(x_0y_0)}$

$z(x,y)\approx z(x_0,y_0)+dz|_{(x_0y_0)}$

$z(0{,}9;\ -1{,}8)$ — ? $\quad M(1;\ -2;\ 1)$ $\quad$ 11

$x_0 \quad y_0 \quad z_0 = z(x_0, y_0)$

$dx = \Delta x = 0{,}9 - 1 = -0{,}1$

куда пришли $x = 0{,}9$ $\quad$ откуда идем $x_0 = 1$

$dy = \Delta y = -1{,}8 - (-2) = 0{,}2$

(для независимых x и y) $\quad dx = \Delta x$, $\quad dy = \Delta y$

$z(0{,}9;\ -1{,}8) \approx \underset{z_0}{1} + (-dx - dy) \approx$

$\approx 1 - (-0{,}1) - (0{,}2) \approx 1 + 0{,}1 - 0{,}2 \approx \underline{\underline{0{,}9}}$

Программа для подготовки к контрольной работе
''Дифференцирование ФНП'';
ЛА и ФНП, модуль 2, для ИУ (кроме ИУ-9), РЛ, БМТ

Необходимый минимум для зачёта -- 10 баллов

Примерный вариант № 1

1. (*2 балла*) Найти и изобразить область определения функции $z = \frac{1}{\sqrt{2x^2 - y^2}}$; найти и изобразить линию уровня этой функции, проходящую через точку $(3, 3)$.
2. (*2 балла*) Для функции $u = \sin x \cos y + \sin y \cos z + \sin z \cos x$ в точке $M(0, 0, 0)$ найти градиент и производную в направлении вектора $\mathbf{l} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$.
3. (*3 балла*) Существует ли предел $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x+y}{x-y}$? Ответ обосновать.
4. (*3 балла*) Вычислить все частные производные второго порядка от функции $u = \ln(x + \sqrt{y + z}) + z/x$.
5. (*3 балла*) Неявная функция $z(x, y)$ в окрестности точки $(1, 1, 1)$ задана уравнением

$$\ln x + \ln y + \ln z = 2z - 2.$$

Найти дифференциал функции z в точке $(1, 1)$. С помощью найденного выражения вычислить приближённо $z(1{,}1, 1{,}1)$.

Примерный вариант № 2

1. (*2 балла*) Найти и изобразить поверхность уровня функции $u = 7x^2 + 5y^2 + 3z^2$, проходящую через точку $(-3, 3, -3)$.
2. (*2 балла*) Для функции $z = y^2 e^{x/y}$ в точке $M(3, 1)$ найти градиент и производную в направлении вектора $\mathbf{l} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$.
3. (*3 балла*) Существует ли предел $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \exp(-\frac{1}{x^2 + y^2})$? Ответ обосновать.
4. (*3 балла*) Найти частные производные z'_x и z'_y функции $z = f(u(x, y), v(x, y))$, если $f = \operatorname{arctg}(u/v)$, $u = x^2 + y^2$, $v = xy$.
5. (*3 балла*) Неявная функция $z(x, y)$ в окрестности точки $(1, -2, 1)$ задана уравнением

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz.$$

Найти дифференциал функции z в точке $(1, -2)$. С помощью найденного выражения вычислить приближённо $z(0{,}9, -1{,}8)$.