Экстремумы функции нескольких переменных. Семинар 14

<u>Опр.</u> $z=f(x,y)$ имеет max (min) в (·) $M_0(x_0,y_0)$ если значение ф-ции в этой точке больше (меньше) чем ее значение в любой другой (·) $M(x,y)$ некоторой окрестности (·) M_0, т.е.

$f(x_0,y_0) > f(x,y)$ [соответственно $f(x_0,y_0) < f(x,y)$] для всех точек $M(x,y)$, удовлетворяющих условию $|M_0M| < \delta$, δ – малое положит. число.

max или min наз. ее <u>экстремумом</u>
(·) M_0 наз. <u>точкой экстремума</u>

<u>Необходимые условия экстремума</u>
Если дифференцируемая ф-ция $z=f(x,y)$ достигает экстремума в точке $M_0(x_0,y_0)$, то ее частные производные 1-ого порядка в этой точке равны 0

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=0 \qquad \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{M_0}=0$$

Точки, в которых частные производные равны 0, наз. <u>стационарными</u> точками.
Не <u>всякая</u> стационарная точка явл. точкой экстремума.

<u>Достаточные условия экстремума</u>
Если $M_0(x_0,y_0)$ – стационарная точка $\boxed{z=f(x,y)}$

и $A=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{M_0}$; $B=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{M_0}$; $C=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{M_0}$

и дискриминант $\Delta = AC-B^2$

тогда:
1) $\Delta>0$ – то в (·) M_0 экстремум
при $A<0$ – максимум $(C<0)$
при $A>0$ – минимум $(C>0)$
2) $\Delta<0$, то в (·) M_0 экстремума нет
3) $\Delta=0$ – требуется дальнейшее исследование (сомнительный случай)

<u>Геометрический смысл</u> необходимых условий экстремума: в стационарной точке касательная плоскость к поверхности $z=f(x,y)$ параллельна плоскости xOy.

Аналогично определяются экстремумы функции трех и большего числа переменных.

<u>Теорема</u>: пусть 2-ые производные ф-ции f непрерывны. Тогда невырожденная стационарная (·) M тогда и только тогда явл. (·) ее локального <u>min</u> (max) если ее матрица Гессе в этой точке <u>положительно</u> (отрицательно) определена.

$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right]$ - матрица гессе. (2)

Стационарная (.) наз. невырожденной если гессиан ф-ции $\neq 0$ в этой точке.
гессиан - определитель матрицы гессе.

d^2f - квадратичная форма относительно $dy\, dx$
Матрицей этой формы явл. матрица гессе.
поэтому кв. форма положительно (отрицательно) определена, если матрица гессе положительно (отрицательно) определена

Достаточные условия сущ-ния экстремума сводятся к изучению знака d^2f
f - ф-ция с непрерывными 2-ыми производн.
по ф-ле Тейлора для $z = f(x\, y)$

$$f(x\, y) = f(x_0\, y_0) + \frac{1}{1!}\left(f'_x dx + f'_y dy\right) + \frac{1}{2!}\left[f''_{xx} dx^2 + f''_{yy} dy^2 + 2f''_{xy} dx dy\right] + R_n$$

$\rightarrow 0$, т. к. рассматриваем стационарн. точки ($f'_x = 0$ $f'_y = 0$)

$\boxed{f(xy) - f(x_0 y_0) = \Delta f \sim d^2 f}$ приращение ф-ции связано линейно со 2-м d^2f

$$d^2 f = \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{M_0}}_{a_{11}} \underbrace{(x - x_0)^2}_{\Delta x^2} + 2 \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Big|_{M_0}}_{a_{12}} \underbrace{(x - x_0)}_{\Delta x} \underbrace{(y - y_0)}_{\Delta y} + \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big|_{M_0}}_{a_{22}} \underbrace{(y - y_0)^2}_{\Delta y^2}$$

квадратичная ф-ма относительно $\Delta x, \Delta y$

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ - матрица квадратичной формы.

$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

1) $\left.\begin{array}{l} \Delta > 0 \\ \Delta > 0 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} a_{11} > 0 \ \text{min} \\ a_{11} < 0 \ \text{max} \end{array}$
2) $\Delta < 0$ - экстремума нет
3) $\Delta = 0$ - дополнительные исследования

Квадр. форма положительно опред. $\Delta_i > 0$
отрицат. определенная $\Delta_1 < 0$ $\Delta_2 > 0$ $\Delta_3 < 0$

№ 7.187 Найти экстремумы

(3)

$z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$

$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - 3 = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - 6 = 0 \end{cases}$

Находим подозрительные на экстремум точки

$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x + 2y - 6 = 0 \end{cases}$ $-3y + 9 = 0$

$y = 3$

$x = 6 - 2y = 6 - 6 = 0$

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}$

1ый способ.

Проверяем знак 2-ого дифференциала $\Delta z \sim d^2 z$

$\boxed{d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2$ $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1$

1) $d^2 z = 2dx^2 + 2 \cdot 1\, dx\, dy + 2dy^2 = 2(dx^2 + dx\, dy + dy^2)$

$d^2 z = 2(dx^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} dx dy + \frac{1}{4} dy^2 - \frac{1}{4} dy^2 + 2dy^2 = 2(dx + \frac{1}{2} dy)^2 + \frac{3}{2} dy^2 > 0$

точка min

2) Или квадратичная форма относит. dx, dy (2ой способ)

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\Delta_1 = 2 > 0$ $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$ - extr есть

знакоположительно определ. кв. форма

матрица Гессе

$\cdot \begin{matrix} x = 0 \\ y = 3 \end{matrix} \Big\}$ min $z_{min} = -9$

√ 7.189

$z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$

$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 6x - 3x^2 = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 6y + 4 = 0 \end{cases}$

подозрительные на экстремум точки

$\begin{cases} 6x - 3x^2 = 0 \\ 6y + 4 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x(2 - x) = 0 \\ 6y + 4 = 0 \end{cases}$

$\cdot B \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2 \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases} \cdot C$

$\cdot B \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6 - 6x \Big|_B = 6$ $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$

$d^2 z = 6dx^2 + 2 \cdot 0\, dx dy + 6dy^2 = 6(dx^2 + dy^2) > 0$ $\forall x, y \neq 0$

$\cdot B$ — точка min $z_{min} = -\frac{4}{3}$

$A = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 36 > 0$ экстремум есть, и $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6 > 0 \rightarrow$ min

$d^2 z = 6dx^2 + 6dy^2$

$\cdot C \begin{cases} x = 2 \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6 - 6x \Big|_C = -6$ $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$ $\begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -36 < 0$

$d^2 z = -6dx^2 + 6dy^2 = -6(dx^2 - dy^2)$

$A = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -36 < 0$

Экстремума нет

№2010 Исследовать на экстремум

$z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$

① $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - 2 = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$ $\quad - \begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ 2x + 4y - 2 = 0 \end{cases}$ $\quad 3y = 0 \quad y = 0$

$x = \dfrac{2 - y}{2} = 1$

точка $A(1, 0)$

② $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 \qquad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 \qquad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1$

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 > 0$ и $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 > 0 \rightarrow$ (·)A - min

extr есть. $\quad z_{min} = 1 + 0 + 0 - 2 - 0 = \underline{-1}$

№2012

$z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$

$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 4x + 4y = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 + 4x - 4y = 0 \end{cases} \Big| +$ $\quad 4(x^3 + y^3) = 0 \quad x = -y$

в 1-ое ур-ние: $4x^3 - 4x + 4(-x) = 0$

$4x^3 - 8x = 0 \quad x_1 = 0$

$x^2 - 2 = 0 \quad x_{2,3} = \pm\sqrt{2}$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 - 4; \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y^2 - 4; \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4$ $\quad \begin{cases} A(0;0) \\ B(\sqrt{2}; -\sqrt{2}) \\ C(-\sqrt{2}; \sqrt{2}) \end{cases}$

$A(0,0)$: $\begin{vmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{vmatrix}_A = \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 16 - 16 = 0$ — седловая точка

$\rightarrow -4(dx - dy)^2 \leq 0$

$d^2 z|_A = -4dx^2 - 4dy^2 + 8dx\,dy = -4(dx^2 + dy^2) + 8dx\,dy$

при $y = x$: $d^2 z = -8dx^2 + 8dx^2 = 0$

$B(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$: $\begin{vmatrix} 12 \cdot 2 - 4 & 4 \\ 4 & 12 \cdot 2 - 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{vmatrix} > 0$ — экстремум есть

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 20 > 0$ — min

$z_{min} = 4 + 4 - 4 - 8 - 4 = \underline{-8}$

$d^2 z|_B$: $20dx^2 + 20dy^2 + 8dx\,dy = 20(dx^2 + \frac{2}{5}dx\,dy + \frac{dy^2}{25}) - \frac{4}{5}dy^2 + 20dy^2 > 0$

$C(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$: $\begin{vmatrix} 12 \cdot 2 - 4 & 4 \\ 4 & 12 \cdot 2 - 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{vmatrix} > 0$ — экстремум есть

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 20 > 0$ — min

$z_{min} = 4 + 4 - 4 - 8 - 4 = \underline{-8}$

(·)$A(0,0)$ $\quad z_A = 0$

$y = x$: $\quad z = x^4 + x^4 - 2x^2 + 4x^2 - 2x^2 = 2x^4$ $\qquad \Delta x > 0 \quad z > 0$; $\quad \Delta x < 0 \quad z > 0$

$y = -x$: $\quad z = x^4 + x^4 - 2x^2 - 4x^2 - 2x^2 =$
$= 2x^4 - 8x^2 = 2x^2(x^2 - 4)$

$\Delta x > 0 \quad z < 0$

$\Delta x < 0 \quad z < 0$

№2016.

$z = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y \qquad x>0,\ y>0$

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{8}{x^2} + \frac{1}{y} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -8y + x^2 = 0 \\ -x + y^2 = 0 \end{cases} \to x = y^2$$

$-8y + y^4 = 0$

$y(y^3-8)=0 \quad y=0$ (не подходит)

$y = 2 \qquad x = y^2 = 4$

$A(4;2)$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = +\frac{16}{x^3} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{y^2}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = +\frac{2x}{y^3}$

$d^2z\big|_A = \frac{1}{4}dx^2 + dy^2 - \frac{1}{2}dxdy =$

$= \frac{1}{4}(dx^2 - 2dxdy + dy^2) - \frac{1}{4}dy^2 + dy^2 > 0$

$$\begin{vmatrix} \frac{16}{x^3} & -\frac{1}{y^2} \\ -\frac{1}{y^2} & \frac{2x}{y^3} \end{vmatrix}_A = \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16} > 0 \qquad \Delta_1 = \frac{1}{4} > 0$$

min в (·) A

$z_{min} = 2 + 2 + 2 = 6$

№2020

$F(x,y,z) = x^3 - y^2 - 3x + 4y + z^2 + z - 8 = 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{3x^2-3}{2z+1} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{-2y+4}{2z+1} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ 2y - 4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x = \pm 1 \\ y = 2 \end{matrix}$$

$A(1;2) \qquad B(-1;2)$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{-6x(2z+1) - (3-3x^2)\,2z'_x}{(2z+1)^2}; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{0 - (3-3x^2)\cdot z'_y}{(2z+1)^2}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2(2z+1) - (2y-4)\cdot 2z'_x}{(2z+1)^2};$

$A(1;2)$: $1 - 4 - 3 + \cancel{8} + z^2 + z - \cancel{8} = 0$

$z^2 + z - 6 = 0 \qquad z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} \qquad z_1 = 2, \quad z_2 = -3$

$\underline{z=2}$ $\quad \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{-6(4+1)}{25} = -\frac{6}{5}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2(4+1)}{(4+1)^2} = \frac{2}{5} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0 \qquad \begin{vmatrix} -\frac{6}{5} & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} \end{vmatrix} < 0$ нет экстрем.

$\underline{z=-3}$ $\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{-6(-6+1)}{(-6+1)^2} = +\frac{6}{5}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2(-6+1)}{(-6+1)^2} = -\frac{2}{5} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0 \qquad \begin{vmatrix} \frac{6}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{5} \end{vmatrix} < 0$ экстрем. нет

$B(-1, 2)$: $-1 - 4 + 3 + \cancel{8} + z^2 + z - \cancel{8} = 0$

$z^2 + z - 2 = 0 \qquad z_1 = 1 \qquad z_2 = -2$

$\underline{z_1 = 1}$ $\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{6(2+1)}{(2+1)^2} = 2$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2(2+1)}{(2+1)^2} = \frac{2}{3}$ $\qquad \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{vmatrix} > 0$ - экстремум есть

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$ $\qquad$ min

$\boxed{z_{min} = 1}$

$\underline{z = -2}$ $\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{6(-4+1)}{(-4+1)^2} = -2$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2(-4+1)}{(-4+1)^2} = -\frac{2}{3}$ $\qquad \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} \end{vmatrix} > 0$ - max.

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$

$\boxed{z_{max} = -2}$