Семинар 15 (1)

Условный экстремум функции нескольких переменных. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции в ограниченной замкнутой области.

1) Опр. Условным экстремумом функции $f(\bar{x})$ наз. экстремум этой ф-ции, достигнутый при условии, что переменные $(x_1 \dots x_n)$ связаны уравнениями связи $\varphi_k(\bar{x}) = \varphi_k(x_1 \dots x_n) = 0$, $k = \overline{1, m}$

Отыскание условного экстремума сводится к исследованию на обычный экстремум ф-ции Лагранжа

$$L(x_1 \dots x_n, \lambda_1 \dots \lambda_m) = f(x_1 \dots x_n) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \varphi_k(x_1 \dots x_n)$$

λ_k - множители Лагранжа

Для $z = f(x,y)$ и $\varphi(x,y) = 0$ - ур-ние связи

$$L(x, y, \lambda) = f(x,y) + \lambda \cdot \varphi(x,y)$$

2) Необходимые условия экстремума имеют вид

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow x_0\, y_0\, \lambda$$

(x_0, y_0), λ_0 - точка возможного экстремума.

Достаточные условия изучаются с помощью d^2L

Для нахождения max и min значения ф-ции в замкнутой области нужно:
1) найти стационарные точки, расположенные в области, и вычислить значения ф-ции в них (не обязательно исследовать по знаку d^2L)
2) найти max и min значения на линиях, образующих границу области.
3) из всех значений ф-ции выбрать max и min.

Если ф-ция дифференцируема в ограниченной области (замкнутой), то она достигает своего max (min) значения или в стационарной точке или на границе области.

3) Достаточные условия условного экстремума связаны с изучением знака d^2L при условии, что $dx_1\, dx_2 \dots dx_n$ удовлетворяют

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_k(x_1^0 \dots x_n^0)}{\partial x_j} dx_j = 0 \quad \text{при } dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2 \neq 0$$

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ \varphi'_y & L''_{xy} & L''_{yy} \end{vmatrix}$$

Если $\Delta > 0$, то усл. min
$\Delta < 0$, то условн. max.

(2) № 7.205 Найти условный экстремум

$z = 2x + y$ при $x^2 + y^2 = 1 \rightarrow \underbrace{x^2+y^2-1=0}_{\varphi(x,y)}$ — ур-ие связи в неявной форме

$L = 2x + y + \lambda\underbrace{(x^2+y^2-1)}_{\varphi(x,y)} =$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2 + 2x\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 1 + 2y\lambda = 0 \\ x^2+y^2-1=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 + x\lambda = 0 \\ 1 + 2y\lambda = 0 \\ x^2+y^2-1=0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} &\rightarrow x = -\frac{1}{\lambda} \\ &\rightarrow y = -\frac{1}{2\lambda} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} - 1 = 0 \qquad \frac{5}{4\lambda^2} = 1$$

$$\lambda = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Подозрительные точки

$$(\cdot)A \begin{cases} \lambda = \dfrac{\sqrt5}{2} \\ x = -\dfrac{2}{\sqrt5} \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt5} \end{cases} \qquad (\cdot)B \begin{cases} \lambda = -\dfrac{\sqrt5}{2} \\ x = \dfrac{2}{\sqrt5} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt5} \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2\lambda \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0$$

1ый способ

$$d^2L = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}dy^2 = 2\lambda(dx^2+dy^2)$$

Для $(\cdot)A$ $\quad d^2L = 2\dfrac{\sqrt5}{2}(dx^2+dy^2) > 0$ — точка условного min

$$z_{min_A} = 2\left(-\frac{2}{\sqrt5}\right) - \frac{1}{\sqrt5} = -\frac{5}{\sqrt5}$$

Для $(\cdot)B$ $\quad d^2L = 2\left(-\dfrac{\sqrt5}{2}\right)(dx^2+dy^2) < 0$ — точка условного max

$$z_{max_B} = 2\frac{2}{\sqrt5} + \frac{1}{\sqrt5} = \frac{5}{\sqrt5}$$

2ой способ

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ \varphi'_y & L''_{xy} & L''_{yy} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{vmatrix}$$

$$\Delta_A = -\begin{vmatrix} 0 & -\frac{4}{\sqrt5} & -\frac{2}{\sqrt5} \\ -\frac{4}{\sqrt5} & \frac{\cancel{2}\sqrt5}{\cancel{2}} & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt5} & 0 & \frac{\cancel{2}\sqrt5}{\cancel{2}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{\sqrt5}\frac{1}{\sqrt5}\frac{1}{\sqrt5}\begin{vmatrix} 0 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{5\sqrt5}(0+0+0-20-0-80) =$$

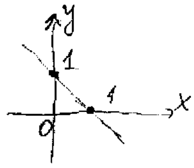
$$= +\frac{100}{5\sqrt5} = \frac{20\sqrt5}{5} = 4\sqrt5 > 0 \rightarrow$$

A точка условного min

Аналогично для т. B.

№2021

$z = xy \qquad x+y=1$



$L(x\,y\,\lambda) = xy + \lambda(x+y-1)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = y+\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = x+\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x+y-1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -\lambda \\ x = -\lambda \\ x+y = 1 \end{cases} \qquad -\lambda-\lambda = 1 \quad -2\lambda = 1. \quad \lambda = -\frac{1}{2}$$

$$A\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ \lambda = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

ур-ние связи

$x+y=1$
$dx=-dy$

!

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 1$$

$$d^2L = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}dy^2 = 2\,dx\,dy =$$

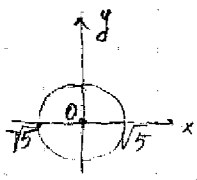
$$= 2dx(-dx) = -2\,dx^2 < 0$$

точка условного max.

$z_{max} = \frac{1}{4}$

№2022

$z = x+2y \qquad x^2+y^2=5$



$L = x+2y+\lambda(x^2+y^2-5)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 1+2x\lambda = 0 \rightarrow \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2+2\lambda y = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2+y^2-5 = 0 \end{cases} \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2\lambda} \\ y = -\dfrac{1}{\lambda} \\ x^2+y^2-5=0 \end{cases} \qquad \frac{1}{4\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^2} = 5 \qquad \frac{5}{4\lambda^2} = 5 \quad \lambda = \pm\frac{1}{2}$$

$$A\begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \\ \lambda = 1/2 \end{cases} \qquad B\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ \lambda = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2\lambda \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0$$

$$d^2L = 2\lambda dx^2 + 2\lambda dy^2 = 2\lambda(dx^2+dy^2)$$

⊙A: $d^2L = 2\cdot\frac{1}{2}(dx^2+dy^2) > 0$ − условный min

$z_{min} = -1-4 = -5$

⊙B: $d^2L = 2\left(-\frac{1}{2}\right)(dx^2+dy^2) < 0$ − условный max

$z_{max} = 1+4 = 5$

№2027

$u = xy^2z^3 \qquad x+y+z=12 \qquad (x>0 \;\; y>0 \;\; z>0)$

$L = xy^2z^3 + \lambda(x+y+z-12)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = y^2z^3+\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2xyz^3+\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = 3xy^2z^2+\lambda = 0 \\ x+y+z-12=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y^2z^3 = -\lambda \;! \\ 2xyz^3 = -\lambda \;! \\ 3xy^2z^2 = -\lambda \\ x+y+z-12=0 \end{cases}$$

$\longrightarrow \dfrac{y^2z^3}{2xyz^3} = 1 \longrightarrow y = 2x$

$\dfrac{y^2z^3}{3xy^2z^2} = 1 \longrightarrow z = 3x$

$x+2x+3x = 12$

$x = 2$

№ 2023 параболоид вращения — ур-ние плоскости

$z = x^2 + y^2$ при $\boxed{\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1} \to \underbrace{\frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 1}_{\varphi(x,y)} = 0$

$L = x^2 + y^2 + \lambda\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 1\right)$

$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + \frac{\lambda}{2} = 0$

$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y + \frac{\lambda}{3} = 0$

$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 1 = 0$

$\begin{cases} x = -\frac{\lambda}{4} \\ y = -\frac{\lambda}{6} \\ 3x + 2y = 6 \end{cases}$

$3\left(-\frac{\lambda}{4}\right) + 2\left(-\frac{\lambda}{6}\right) = 6$

$-\frac{3}{4}\lambda - \frac{\lambda}{3} = 6$

$-\frac{9+4}{12}\lambda = 6$; $-\frac{13}{12}\lambda = 6$

$\lambda = -\frac{72}{13}$

$A \begin{cases} x = \frac{18}{13} \\ y = \frac{12}{13} \\ \lambda = -\frac{72}{13} \end{cases}$

1ый способ.

$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2$ $\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2$ $\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0$

$d^2L = 2dx^2 + 2dy^2 > 0$ — условн. min

$z_{min} = \frac{324}{169} + \frac{144}{169} = \frac{468}{169} = \frac{36}{13}$

2ой способ.

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ \varphi'_y & L''_{xy} & L''_{yy} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -\left(0 + 0 + 0 - \frac{2}{9} - 0 - \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{9} + \frac{1}{2} = \frac{4+9}{18} = \frac{13}{18} > 0$$

$\to$ т. A — точка условного min

$$z_{min} = z(A) = \left(\frac{18}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = \frac{324}{169} + \frac{144}{169} = \frac{468}{169} = \frac{36}{13}$$

5

№ 7.214 Исследовать на условный экстремум.

$z = xy^2$ при $x^2+y^2=1$

$\underbrace{x^2+y^2-1}_{\varphi(x,y)}=0$ – ур-ние связи в неявной форме.

Функция Лагранжа:

$L(x,y,\lambda) = z(x,y)+\lambda\cdot\varphi(x,y)$

$L(x,y,\lambda) = xy^2+\lambda\cdot(x^2+y^2-1)$

Необходимые условия

$\begin{cases} L'_x=0 \\ L'_y=0 \\ L'_\lambda=0 \end{cases}$

$L'_x = y^2+2x\lambda$

$L'_y = 2xy+2y\lambda$; $L'_\lambda = x^2+y^2-1$

$\begin{cases} y^2+2x\lambda=0 \\ 2xy+2y\lambda=0 \\ x^2+y^2-1=0 \end{cases}$

$y^2+2x\lambda=0 \to \lambda=-\dfrac{y^2}{2x}$

$2xy+2y\lambda=0 \to \lambda=-x$

$2y(x+\lambda)=0 \to \left[\begin{array}{ll} y=0 & а) \\ \lambda=-x. & б) \end{array}\right.$

а) $\begin{cases} y=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \to \begin{cases} y=0 \\ x=\pm 1 \end{cases}$

$F\begin{cases} y=0 \\ x=1 \\ \lambda_F=0 \end{cases}$ $\quad K\begin{cases} y=0 \\ x=-1 \\ \lambda_K=0. \end{cases}$

$\lambda=-\dfrac{y^2}{2x}$

б) $\begin{cases} \lambda=-x \\ \lambda=-\dfrac{y^2}{2x} \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ $\to x=\dfrac{y^2}{2x}$

$y^2=2x^2$

$y=\pm\sqrt{2}x$

$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y=\pm\sqrt{2}x \end{cases}$ $\quad x^2+2x^2=1$

$x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$A\begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \lambda_A=-x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$ $\quad B\begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ y=-\sqrt{2}x=-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \lambda_B=-x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$

$C\begin{cases} x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ y=\sqrt{2}x=-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \lambda_C=-x=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$ $\quad D\begin{cases} x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ y=-\sqrt{2}x=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \lambda_D=-x=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$

Нашли точки возможного условного экстремума

Достаточные условия:

$\varphi(x,y)=x^2+y^2-1 \qquad \varphi'_x=2x \qquad \varphi'_y=2y$

$L''_{xx}=(y^2+2x\lambda)'_x=2\lambda; \quad L''_{yy}=(2xy+2y\lambda)'_y=2x+2\lambda$

(6)

$L''_{xy} = (y^2 + 2x\lambda)'_y = 2y$

Используем 2ой способ (через определитель)

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ \varphi'_y & L''_{xy} & L''_{yy} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 2y \\ 2y & 2y & 2x+2\lambda \end{vmatrix}$$

$A\left(\frac{1}{\sqrt3}; \frac{\sqrt2}{\sqrt3}\right)$ $\lambda_A = -\frac{1}{\sqrt3}$

$$\Delta_A = -\begin{vmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt3} & \frac{2\sqrt2}{\sqrt3} \\ \frac{2}{\sqrt3} & -\frac{2}{\sqrt3} & \frac{2\sqrt2}{\sqrt3} \\ \frac{2\sqrt2}{\sqrt3} & \frac{2\sqrt2}{\sqrt3} & \underbrace{\frac{2}{\sqrt3} - \frac{2}{\sqrt3}}_{0} \end{vmatrix} = -\left(0 + \frac{2}{\sqrt3}\frac{2\sqrt2}{\sqrt3}\frac{2\sqrt2}{\sqrt3} + \frac{2}{\sqrt3}\frac{2\sqrt2}{\sqrt3}\frac{2\sqrt2}{\sqrt3} + \frac{2}{\sqrt3}\frac{2\sqrt2}{\sqrt3}\frac{2\sqrt2}{\sqrt3} - 0 - 0\right) =$$

$$= -\frac{8\cdot2}{\cancel{3}\sqrt3}\cancel{(1+1+1)} = -\frac{16}{\sqrt3} < 0$$

т. A - точка условного max.

$B\left(\frac{1}{\sqrt3}; -\frac{\sqrt2}{\sqrt3}\right)$; $\lambda_B = -\frac{1}{\sqrt3}$

$$\Delta_B = -\begin{vmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt3} & -\frac{2\sqrt2}{\sqrt3} \\ \frac{2}{\sqrt3} & -\frac{2}{\sqrt3} & -\frac{2\sqrt2}{\sqrt3} \\ -\frac{2\sqrt2}{\sqrt3} & -\frac{2\sqrt2}{\sqrt3} & \underbrace{\frac{2}{\sqrt3} - \frac{2}{\sqrt3}}_{0} \end{vmatrix} = -\left(0 + \frac{2}{\sqrt3}\frac{2\sqrt2}{\sqrt3}\frac{2\sqrt2}{\sqrt3} + \frac{2}{\sqrt3}\frac{2\sqrt2}{\sqrt3}\frac{2\sqrt2}{\sqrt3} + \frac{2}{\sqrt3}\frac{2\sqrt2}{\sqrt3}\frac{2\sqrt2}{\sqrt3} - 0 - 0\right)$$

$$= -\frac{8\cdot2}{\cancel{3}\sqrt3}\cancel{(1+1+1)} = -\frac{16}{\sqrt3} < 0$$

т B - точка условного max.

Аналогично для других точек C, D, F и K.