1

Семинар № 16. Подготовка к РК № 2 по Л.А (ФН.П).

Учебник А.Н. Канатников, А.П. Крищенко, В.Н. Четвериков
- выпуск V Изд-во МГТУ им. Баумана Москва, 2003 г.
„Дифференциальное исчисление функций многих переменных"

Для зачета выполнить:
Часть А (2 вопроса + 2 задачи правильно изложенные)
Часть Б - решаем только задачу № 8 (7 баллов)

Программа для подготовки к рубежному контролю № 2 по ФНП

ИУ (кроме ИУ-9), РЛ, БМТ;

Теоретические вопросы

(как они сформулированы в билетах рубежного контроля)

Часть А

1. Дать определение открытой окрестности и открытого множества в $\mathbb{R}^n$.
2. Дать определение предельной точки, граничной точки множества, и замкнутого множества в $\mathbb{R}^n$.
3. Дать определение ограниченного и связного множества в $\mathbb{R}^n$.
4. Дать определение предела функции нескольких переменных (ФНП) по множеству и непрерывной ФНП.
5. Дать определение частной производной ФНП в точке.
6. Дать определение дифференцируемой ФНП в точке.
7. Сформулировать теорему о связи непрерывности и дифференцируемости ФНП.
8. Сформулировать теорему о необходимых условиях дифференцируемости ФНП.
9. Сформулировать теорему о достаточных условиях дифференцируемости ФНП.
10. Дать определение (полного) первого дифференциала ФНП.
11. Дать определение второго дифференциала ФНП и матрицы Гессе.
12. Сформулировать теорему о независимости смешанных частных производных от порядка дифференцирования.
13. Сформулировать теорему о необходимых и достаточных условиях того, чтобы выражение $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ было полным дифференциалом.
14. Записать формулы для вычисления частных производных сложной функции вида $z = f(u(x,y), v(x,y))$.
15. Записать формулу для вычисления производной сложной функции вида $u = f(x(t), y(t), z(t))$.
16. Сформулировать теорему о неявной функции.
17. Записать формулы для вычисления частных производных неявной функции $z(x,y)$, заданной уравнением $F(x,y,z) = 0$.
18. Дать определение градиента ФНП и производной ФНП по направлению.
19. Записать формулу для вычисления производной ФНП по направлению.
20. Перечислить основные свойства градиента ФНП.
21. Сформулировать теорему Тейлора для функции двух переменных.
22. Сформулировать теорему об условиях существовании касательной плоскости к поверхности, заданной уравнением $F(x,y,z) = 0$.
23. Записать уравнения касательной и нормали к поверхности $F(x,y,z) = 0$ в точке (x_0, y_0, z_0).

24. Дать определение (обычного) экстремума (локального максимума и минимума) ФНП.
25. Сформулировать необходимые условия экстремума ФНП.
26. Сформулировать достаточные условия экстремума ФНП.
27. Дать определение условного экстремума ФНП.
28. Дать определение функции Лагранжа и множителей Лагранжа задачи на условный экстремум ФНП.
29. Сформулировать необходимые условия условного экстремума ФНП.
30. Сформулировать достаточные условия условного экстремума ФНП.

Часть Б

1. Доказать теорему о необходимых условиях дифференцируемости ФНП.
2. Доказать теорему о достаточных условиях дифференцируемости ФНП.
3. Доказать теорему о независимости смешанных частных производных от порядка дифференцирования (для вторых производных функции двух переменных).
4. Вывести формулу для дифференцирования сложной ФНП (можно ограничиться случаем функции вида $z = f(x(t), y(t))$).
5. Сформулировать теорему о неявной функции. Вывести формулы для частных производных неявной функции.
6. Вывести уравнение касательной плоскости к поверхности, заданной уравнением $F(x, y, z) = 0$.

Примеры задач

Часть А

1. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности S в точке M:
а) $S\colon z = 2x^2 - 3y^2 + x + y$, $M(1, 1, 1)$;
б) $S\colon x^3 - y^4 + z^2 = 10$, $M(2, -1, -1)$;
в) $S\colon e^{x+y+z} = \sin(x - 2y - z)$, $M(1, 2, -3)$.

2. Исследовать на экстремум следующие функции:
а) $z = 9x^2 - 4xy - 6y^2 + 16x - 8y - 2$;
б) $z = 1 + 6x + 8y - 2x^2 - 4xy - 5y^2$;
в) $z = y^3 - x^2 - 2xy - y^2 - 3y$.

3. Исследовать на экстремум функцию
а) $z = x^2 + y^2$ при условии $x + y = 1$;
б) $z = x + y$ при условии $x^2 + y^2 = 1$;
в) $z = xy$ при условии $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{1} = 1$.

Часть Б

1. В каких точках поверхности $4x - 9y + 25z = -xyz$ касательная плоскость параллельна одной из координатных плоскостей?

2. Найти такие a, b, c, чтобы однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ касался плоскости $4x - y + 2z = 1$ в точке $(4, 5, -10)$.

3. Найти те нормали к гиперболическому параболоиду $x^2 - y^2 = 2z$, которые проходят через точку $(6, 0, 0)$.

4. Среди касательных к эллипсоиду

$$\frac{x^2}{75} + \frac{y^2}{48} + \frac{z^2}{12} = 1$$

найти ту, которая отсекает от положительного октанта $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ тетраэдр наименьшего объёма.

5. Среди эллипсоидов $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, проходящих через точку $(1, 2, \sqrt{5})$, найти тот, который имеет наименьший объём. (Указание: Объём эллипсоида с полуосями a, b, c равен $\frac{4}{3}\pi abc$.)

6. Среди эллипсоидов $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, касающихся плоскости $7x + 4y + 4z = 9$ найти тот, который имеет наибольший объём. (Указание: сначала найти точку M на эллипсоиде с полуосями a, b, c, в которой касательная плоскость имеет нормальный вектор $(7, 4, 4)$; условие принадлежности точки M плоскости $7x + 4y + 4z = 9$ даст уравнение связи.)

3

Примерный вариант билета рубежного контроля

Часть А

необходимо ответить хотя бы на 2 вопроса и решить не менее 2 задач;
оценка 21 баллов

Теория

1. Дать определение предельной точки, граничной точки множества, замкнутого множества в $\mathbb{R}^n$.

2. Записать формулы для вычисления частных производных сложной функции вида $z = f(u(x,y), v(x,y))$.

3. Сформулировать необходимые условия условного экстремума ФНП.

Задачи

4. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x - \sqrt{x^2 + y^2}$ в точке $(4, 3, -1)$.

5. Исследовать на экстремум функцию $z = e^{2x} + e^{2y} - x - y$.

6. Исследовать на экстремум функцию $z = e^{-2xy}$ при условии

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Часть Б

засчитывается, только если выполнена часть А;
необходимо решить задачу; оценка 5-14 баллов

Теория

7. Доказать теорему о достаточных условиях дифференцируемости ФНП.

Задача

8. На поверхности

$$\frac{27}{x} + \frac{8}{y} + \frac{8}{z} = 1$$

найти точку, наименее удалённую от точки $O(0, 0, 0)$.

Разбор варианта РК №2 по „ФН12"

Задачи (часть Б)

4] Составить уравнения касательной пл-ти и нормали к поверхности в точке M

$z = x - \sqrt{x^2+y^2}$ $\quad M(4;3;-1)$

Для $F(x,y,z)=0$ (поверхность задана неявно)

$$\boxed{\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_M (x-x_M) + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_M (y-y_M) + \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_M (z-z_M) = 0}$$

→ ур-ние касательной пл-ти.

Ур-ние нормали:

$$\boxed{\frac{x-x_M}{\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_M} = \frac{y-y_M}{\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_M} = \frac{z-z_M}{\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_M}}$$

$z = x - \sqrt{x^2+y^2}$ $\quad M(4;3;-1)$

$$\underbrace{x - \sqrt{x^2+y^2} - z}_{F(x,y,z)} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = F'_x = 1 - \frac{1 \cdot 2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = F'_y = -\frac{1 \cdot 2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = F'_z = -1$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_M = 1 - \frac{4}{\sqrt{16+9}} = \frac{1}{5}; \quad \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_M = -\frac{3}{\sqrt{16+9}} = -\frac{3}{5}$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_M = -1$$

$$\frac{1}{5}(x-4) - \frac{3}{5}(y-3) - 1(z+1) = 0.$$

$$x - \cancel{4} - 3y + \cancel{9} - 5z - \cancel{5} = 0$$

$$\boxed{x - 3y + 5z = 0}$$ — ур-ние касат. пл-ти

$$\frac{x-4}{\frac{1}{5}}=\frac{y-3}{-\frac{3}{5}}=\frac{z+1}{-1}$$ или

$$\boxed{\frac{x-4}{1}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z+1}{-5}}$$ — ур-ние нормали (прямая в пространстве, канонический вид)

5] Исследовать на экстремум

$$z=e^{2x}+e^{2y}-x-y$$

$$z'_x=2e^{2x}-1;\quad z'_y=2e^{2y}-1$$

Необходимое условие экстремума:

$$\begin{cases} z'_x=0\\ z'_y=0\end{cases}\quad \begin{cases} 2e^{2x}-1=0\\ 2e^{2y}-1=0\end{cases};\quad \begin{cases} e^{2x}=\frac{1}{2}\\ e^{2y}=\frac{1}{2}\end{cases};\quad \begin{cases} 2x=\ln\frac{1}{2}\\ 2y=\ln\frac{1}{2}\end{cases};$$

$$\to \begin{cases} x=-\frac{1}{2}\ln 2\\ y=-\frac{1}{2}\ln 2.\end{cases}\qquad A\left(-\frac{1}{2}\ln 2;\ -\frac{1}{2}\ln 2\right)$$

Достаточное условие:

$$z''_{xx}=\left(2e^{2x}-1\right)'_x=4e^{2x}$$

$$z''_{yy}=\left(2e^{2y}-1\right)'_y=4e^{2y};\quad z''_{xy}=z''_{yx}=\left(2e^{2x}-1\right)'_y=0$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy}\\ z''_{xy} & z''_{yy}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4e^{2x} & 0\\ 0 & 4e^{2y}\end{vmatrix}=16e^{2x}\cdot e^{2y}$$

$$\Delta_A=16e^{2\left(-\frac{1}{2}\ln 2\right)}\cdot e^{2\left(-\frac{1}{2}\ln 2\right)}=16e^{-\ln 2}\cdot e^{-\ln 2}=$$

$$=16\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=4>0\to \text{extr есть}$$

т.к. $z''_{xx}\Big|_A=4e^{2x}\Big|_A=4e^{2\left(-\frac{1}{2}\ln 2\right)}=4\cdot\frac{1}{2}=2>0$, то в т. A — min

$$z_A = z\left(-\frac{1}{2}\ln 2; -\frac{1}{2}\ln 2\right) = e^{2\left(-\frac{1}{2}\ln 2\right)} + e^{2\left(-\frac{1}{2}\ln 2\right)} + \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ln 2 = \underline{1+\ln 2}$$

$$z_{min} = z_A = 1 + \ln 2$$

6] Исследовать на <u>условный extr</u>

$z = e^{-2xy}$ при $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Составим ф-цию Лагранжа:

$L(x,y,\lambda) = z(x,y) + \lambda \cdot \varphi(x,y)$, где λ – множитель Лагранжа

$\varphi(x,y) = 0$ – ур-ние связи в неявной форме

$$L(x,y,\lambda) = e^{-2xy} + \lambda \cdot \left(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - 1\right)$$

$$\varphi(x,y) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - 1$$

$$L'_x = -2y e^{-2xy} + \frac{2x}{9}\lambda$$

$$L'_y = -2x e^{-2xy} + \frac{y}{2}\lambda$$

$$L'_\lambda = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - 1.$$

<u>Необходимые условия условного экстремума</u>

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\cancel{2}y e^{-2xy} + \frac{\cancel{2}x\lambda}{9} = 0 \rightarrow \lambda = \frac{9ye^{-2xy}}{x} \\ -2x e^{-2xy} + \frac{y\lambda}{2} = 0 \rightarrow \lambda = \frac{4xe^{-2xy}}{y} \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{9y\cancel{e^{-2xy}}}{x} = \frac{4x\cancel{e^{-2xy}}}{y} \qquad 9y^2 = 4x^2 \qquad y = \pm\frac{2}{3}x$$

$$\begin{cases} y = \pm\frac{2}{3}x \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \pm\frac{2}{3}x \\ \frac{x^2}{9} + \frac{x^2}{9} = 1 \end{cases} \qquad x^2 = \frac{9}{2}$$

$$x = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3}{\sqrt{2}} \\ y = \pm\frac{2}{3}x \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\frac{3}{\sqrt{2}} \\ y = \pm\frac{2}{3}x \end{cases}$$

$$A\begin{cases} x = \frac{3}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{2}{3}\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad B\begin{cases} x = \frac{3}{\sqrt{2}} \\ y = -\frac{2}{3}x = -\frac{2}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad C\begin{cases} x = -\frac{3}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{2}{3}x = -\frac{2}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad D\begin{cases} x = -\frac{3}{\sqrt{2}} \\ y = -\frac{2}{3}x = \\ = \frac{2}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Найдем для каждой точки λ, например, из $\boxed{\lambda = \frac{4xe^{-2xy}}{y}}$

$$\lambda_A = \frac{4\,3\,e^{-2\frac{3}{\sqrt{2}}\frac{2}{\sqrt{2}}}}{\cancel{\sqrt{2}}\frac{2}{\cancel{\sqrt{2}}}} = 6e^{-6}; \quad \lambda_B = \frac{4\,3\,e^{-2\frac{3}{\sqrt{2}}\left(-\frac{2}{\sqrt{2}}\right)}}{\cancel{\sqrt{2}}\left(-\frac{2}{\cancel{\sqrt{2}}}\right)} = -6e^{6}$$

$$\lambda_C = \frac{-4\,3\,e^{-2\frac{3}{\sqrt{2}}\frac{2}{\sqrt{2}}}}{\cancel{\sqrt{2}}\left(-\frac{2}{\cancel{\sqrt{2}}}\right)} = 6e^{-6}; \quad \lambda_D = \frac{-4\cdot 3\,e^{-2\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\frac{2}{\sqrt{2}}}}{\cancel{\sqrt{2}}\frac{2}{\cancel{\sqrt{2}}}} = -6e^{6}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &A\left(\frac{3}{\sqrt{2}};\frac{2}{\sqrt{2}}\right),\ \lambda_A = 6e^{-6}; \quad B\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\ -\frac{2}{\sqrt{2}}\right),\ \lambda_B = -6e^{6} \\ &C\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\ -\frac{2}{\sqrt{2}}\right),\ \lambda_C = 6e^{-6}; \quad D\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\ \frac{2}{\sqrt{2}}\right),\ \lambda_D = -6e^{6} \end{aligned}}$$

Достаточные условия условного экстремума

$$L''_{xx} = \left(-2ye^{-2xy} + \frac{2}{9}x\lambda\right)'_x = 4y^2e^{-2xy} + \frac{2}{9}\lambda$$

$$L''_{yy} = \left(-2xe^{-2xy} + \frac{y\lambda}{2}\right)'_y = 4x^2e^{-2xy} + \frac{\lambda}{2}$$

$$L''_{xy} = \left(-2ye^{-2xy} + \frac{2x}{9}\lambda\right)'_y = -2e^{-2xy} + 4xye^{-2xy}$$

$$\varphi'_x = \frac{2x}{9} \qquad \varphi'_y = \frac{y}{2}.$$

8

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ \varphi'_y & L''_{yx} & L''_{yy} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & \frac{2x}{9} & \frac{y}{2} \\ \frac{2x}{9} & \left(4y^2e^{-2xy}+\frac{2}{9}\lambda\right) & \left(-2e^{-2xy}+4xy\cdot e^{-2xy}\right) \\ \frac{y}{2} & \left(-2e^{-2xy}+4xye^{-2xy}\right) & \left(4x^2e^{-2xy}+\frac{\lambda}{2}\right) \end{vmatrix}$$

$A\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\ \frac{2}{\sqrt{2}}\right)$, $\lambda_A = 6e^{-6}$

$$\Delta_A = -\begin{vmatrix} 0 & \frac{2}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3\sqrt{2}} & \left(\cancel{4}^{2}\frac{4}{\cancel{2}}e^{-6}+\frac{4}{3}e^{-6}\right) & \left(-2e^{-6}+4\frac{3}{\cancel{\sqrt{2}}}\frac{2}{\cancel{\sqrt{2}}}e^{-6}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \left(-2e^{-6}+12e^{-6}\right) & \left(\cancel{4}^{2}\frac{9}{\cancel{2}}e^{-6}+3e^{-6}\right) \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} 0 & \frac{2}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & \frac{28}{3}e^{-6} & 10e^{-6} \\ 1 & 10e^{-6} & 21e^{-6} \end{vmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{28}{3}e^{-6} & 10e^{-6} \\ 1 & 10e^{-6} & 21e^{-6} \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(0+\frac{20}{3}e^{-6}+\frac{20}{3}e^{-6}-\frac{28}{3}e^{-6}-0-\frac{4\cdot\cancel{21}^{7}}{\cancel{9}_{3}}e^{-6}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-6}\left(\frac{40}{3}-\frac{28}{3}-\frac{28}{3}\right) = \frac{1}{2}e^{-6}\cdot\frac{16}{3} = \frac{8}{3}e^{-6} > 0$$

т. А – точка условного $\underline{\min}$

Аналогично для и других точек В, С и Д.