Семинар 10. (1)

Частные производные функции нескольких переменных. Частные производные высших порядков.

Частной производной от $z=f(x,y)$ по независимой переменной x наз. конечный предел

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}=\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x,y),$$ вычисленный при постоянном y.

Частной производной по y наз. конечный предел

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}=\frac{\partial z}{\partial y}=f'_y(x,y),$$ ~~вычисленный~~ при постоянном x.

Аналогично для ф.м.п. $f(x_1\ldots x_n)$

$$\frac{\partial f(x_1\ldots x_n)}{\partial x_i}=\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{\Delta_i f(x_1\ldots x_n)}{\Delta x_i}=\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{f(x_1\ldots x_i+\Delta x_i\ldots x_n)-f(x_1\ldots x_n)}{\Delta x_i}$$

Практическое правило: надо дифференцировать $f(x_1\ldots x_n)$ по переменной x_i, считая все остальные переменные постоянными.

Частными производными второго порядка от $z=f(x,y)$ наз. частные производные от ее частных производных первого порядка

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x y)\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=f''_{xy}(x y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=f''_{yx}(x y)\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x y)$$

Аналогично определяются и обозначаются частные производные третьего и высших порядков.

Так называемые „смешанные" производные, отличающиеся друг от друга лишь последовательностью дифференцирования, равны между собой, если они непрерывны. ~~частные производные низшего порядка~~

Для частных производных справедливы обычные правила и формулы дифференцирования.

Геометрическая интерпретация частных производных.
$z=f(x y)$ графиком явл. поверхность.
Пересекаем поверхность плоскостью (например $y=const$). Получаем в сечении кривую пересечения графика ф-ции и пл-ти ($y=const$). В любой ⊙ касательная к этой кривой имеет угол α

$$\operatorname{tg}\alpha=f'_x$$

Частные производные — частный случай производной по направлению

$$\boxed{\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{xy}=A(x y)\cos\alpha+B(x,y)\cos\beta=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta}$$

$l=a_x i+a_y j$ — направление, по которому вычисляется производная

№7.53 Найти частные производные 1-ого и 2-ого порядка

(2)

$z = x^5 + y^5 - 5x^3y^3$

$\frac{\partial z}{\partial x} = 5x^4 - 15x^2y^3; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 5y^4 - 15x^3y^2$

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 20x^3 - 30xy^3; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 20y^3 - 30x^3y$

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -45x^2y^2; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -45x^2y^2$

№7.57

$z = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y \cdot \sqrt{x^2+y^2} - xy \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{y(x^2+y^2) - x^2y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x\sqrt{x^2+y^2} - xy\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2y}{x^2+y^2} = \frac{x(x^2+y^2) - xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{3x^2(x^2+y^2)^{3/2} - x^3 \cdot \frac{3}{2}(x^2+y^2)^{1/2} \cdot 2x}{(x^2+y^2)^3} =$

$= \frac{3x^2(x^2+y^2) - 3x^4}{(x^2+y^2)^{5/2}} = \frac{3x^2y^2}{(x^2+y^2)^{5/2}}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{-y^3 \frac{3}{2}(x^2+y^2)^{1/2} \cdot 2x}{(x^2+y^2)^3} = -\frac{3xy^3}{(x^2+y^2)^{5/2}}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{-x^3\frac{3}{2}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2y}{(x^2+y^2)^3} = -\frac{3x^3y}{(x^2+y^2)^{5/2}}$

№7.59

$z = \frac{\cos y^2}{x} = \cos y^2 \cdot x^{-1}$

$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\cos y^2}{x^2} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x}(-\sin y^2) \cdot 2y = -\frac{2y \sin y^2}{x}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\cos y^2 (-2)\frac{1}{x^3} = \frac{2\cos y^2}{x^3}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2}{x}\left[\sin y^2 + y \cos y^2 \cdot 2y\right] = -\frac{2\sin y^2}{x} - \frac{4y^2 \cos y^2}{x}$

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2y \sin y^2 (-1)\frac{1}{x^2} = \frac{2y \sin y^2}{x^2}$

N 7.61

$$z=\ln(x^2+y^2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1\cdot 2x}{x^2+y^2};\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1\cdot 2y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2(x^2+y^2)-2x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2(x^2+y^2)-2y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=2y(-1)\frac{1}{(x^2+y^2)^2}\cdot 2x=-\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}$$

N 7.63

$$u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1\cdot 2x}{2\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}};\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\left[\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}+x\left(-\frac{3}{2}\cdot\frac{2x}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\right)\right]=$$

$$=\frac{-x^2-y^2-z^2+3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}=\frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\left[\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}+y\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot 2y}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\right]=\frac{2y^2-x^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{2z^2-x^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-y\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{2x}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}=\frac{3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-z\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\cdot 2x=\frac{3xz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$N\ 7.81$

$$z = 4e^{-2y} + (2x+4y-3)e^{-y} - x - 1$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + x + z = 0 \text{ — доказать}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{-y}\cdot 2 - 1; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4e^{-2y}(-2) + 4\cdot e^{-y} + (2x+4y-3)e^{-y}(-1)$$

$$(2e^{-y}-1)^2 - 8e^{-2y} + 4e^{-y} - 2xe^{-y} - 4ye^{-y} + 3e^{-y} + x + \underbrace{+4e^{-2y} + (2x+4y-3)e^{-y} - x - 1}_{z} =$$

$$= \cancel{4e^{-2y}} - \cancel{4e^{-y}} + \cancel{1} - \cancel{8e^{-2y}} + \cancel{7e^{-y}} - \cancel{2xe^{-y}} - \cancel{4ye^{-y}} + \cancel{4e^{-2y}} + \cancel{2xe^{-y}} + \cancel{4ye^{-y}} - \cancel{3e^{-y}} - \cancel{1} = 0 \quad \text{ч. т. д.}$$

$N\ 7.83$

$$u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}} \qquad \boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \text{ доказать}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{t\sqrt{t}}\cdot e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}} + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}}\cdot\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{4at\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}} + \frac{(x-x_0)^2}{8a^3t^2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}}\cdot\left(-\frac{1}{4a^2t}\right)2(x-x_0) = -\frac{(x-x_0)}{4a^3t\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{4a^3t\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}} - \frac{(x-x_0)}{4a^3t\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}}\cdot\left(-\frac{\cancel{2}(x-x_0)}{\cancel{4}_2 a^2t}\right) =$$

$$= -\frac{1}{4a^3t\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}} + \frac{(x-x_0)^2}{8a^5t^2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}}$$

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2\left[-\frac{1}{4a^3t\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}} + \frac{(x-x_0)^2}{8a^5t^2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}}\right] =$$

$$= -\frac{1}{4at\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}} + \frac{(x-x_0)^2}{8a^3t^2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

№1906

$u = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ показать что функция u удовлетворяет

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{x \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

№1803 Найти частные производные

$$z=\frac{y}{x} \qquad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}$$

№1805

$$z=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x\frac{1\cdot\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=\frac{x^2+y^2-x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}=\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1\,x\cdot\cancel{2}y}{\cancel{2}(x^2+y^2)^{3/2}}=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

№1807

$$z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}$$

№1812

$$u=(xy)^z=x^z\cdot y^z$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=z\,x^{z-1}\cdot y^z=yz\,(xy)^{z-1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x^z\cdot z\,y^{z-1}=xz\,(xy)^{z-1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=(xy)^z\cdot\ln xy$$

№1814

$$f(xy)=\sqrt{xy+\frac{x}{y}} \qquad f'_x(2,1)-? \qquad f'_y(2,1)-?$$

$$f'_x=\frac{1}{2\sqrt{xy+\frac{x}{y}}}\left(y+\frac{1}{y}\right) \qquad f'_x(2,1)=\frac{1+1}{2\sqrt{2+2}}=\frac{1}{2}$$

$$f'_y=\frac{1}{2\sqrt{xy+\frac{x}{y}}}\left(x-\frac{x}{y^2}\right) \qquad f'_y(2,1)=\frac{\left(2-\frac{2}{1}\right)}{2\sqrt{2+2}}=0$$

№1822

$$z=\ln(x^2+xy+y^2) \qquad \text{показать, что} \quad x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1\cdot(2x+y)}{x^2+xy+y^2} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1\cdot(x+2y)}{x^2+xy+y^2}$$

$$x\,\frac{2x+y}{x^2+xy+y^2}+y\,\frac{x+2y}{x^2+xy+y^2}=\frac{2x^2+xy+xy+2y^2}{x^2+xy+y^2}=2$$

№1892 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - ?$

$z = \ln(x^2+y)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2(x^2+y^2) - 2x \cdot 2x}{x^2+y} = \frac{2y^2 - 2x^2}{x^2+y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x^2+y}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{(x^2+y)^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{-2x}{(x^2+y)^2}$$

№1894

$z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$ $\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - ?$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2} \cdot \frac{(1-xy) - (x+y)(-y)}{(1-xy)^2} = \frac{1+y^2}{(1-xy)^2 + (x+y)^2} =$$

$$= \frac{1+y^2}{1-\cancel{2xy}+x^2y^2+x^2+\cancel{2xy}+y^2} = \frac{1+y^2}{(1+x^2)+y^2(x^2+1)} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)'_y = 0$$

№1898 $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} - ?$

$z = \sin xy$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot \cos xy; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \cos xy - xy \sin xy$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -x \sin xy - x \sin xy - x^2 y \cos xy$$

№1900 показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

$z = \arcsin \sqrt{\frac{x-y}{x}}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x-y}{x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x-y}{x}}} \cdot \frac{x-(x-y)}{x^2} = \sqrt{\frac{x}{y}} \cdot \sqrt{\frac{x}{x-y}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{x^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{y}{x\sqrt{y(x-y)}} = \frac{1}{2x}\sqrt{\frac{y}{x-y}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x^3-x^2y}}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{y}{x^3-x^2y}}} \cdot \frac{(x^3-x^2y) - y(-x^2)}{(x^3-x^2y)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^3-x^2y}{y}} \cdot \frac{x^3}{(x^3-x^2y)^2}$$

и далее: $\frac{\partial z}{\partial y} = \ldots$

и потом $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)'_x$

Вычисление дифференциалов 1-го и высших порядков. Применение первого дифференциала для приближенного вычисления значений функций нескольких переменных.

Пусть $P(x_0 y_0)$ - данная точка, $P'(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ - другая точка, отвечающая приращениям аргументов Δx и Δy

Полным приращением ф-ции $z=f(xy)$ в (·)P наз. разность:

$$\Delta z = f(P') - f(P) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0 y_0)$$

Если приращение можно представить в виде

$$\Delta z = A\cdot\Delta x + B\Delta y + \varepsilon \quad \text{или} \quad \boxed{\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})}$$

ε - б.м. более высокого порядка по сравнению с расстоянием $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ между (·)(·) P и P'

тогда $f(xy)$ наз. дифференцируемой в (·)P

Главная линейная часть ее приращения $(A\Delta x+B\Delta y)$ наз. полным дифференциалом ф-ции в точке

$$dz = A\Delta x + B\Delta y.$$

Ф-ция, имеющая дифференциал в каждой (·) области D, наз. дифференцируемой в области.

Если ф-ция дифференцируема, то необходимо чтобы $A=\frac{\partial z}{\partial x}$ $B=\frac{\partial z}{\partial y}$

Достаточным условием дифференцируемости является наличие непрерывных частных производных

т.к. $\Delta x \sim dx$ $\Delta y \sim dy$, то $\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy}$

Эта ф-ла справедлива и в случае, когда x и y в свою очередь являются ф-циями каких-либо переменных (св-во инвариантности полного дифференциала)

Для $u=f(xyz)$: $\quad du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$

Теоремы и ф-лы для дифференциала ф-ции одного аргумента полностью сохраняются и для дифференц. ф-ции нескольких переменных

$d(u\pm v) = du \pm dv$; $\quad d(uv) = vdu + udv$

$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$; $\quad dF(u) = F'(u)du$

Дифференциалы высших порядков от $z=f(xy)$ определяются ф-лами:

$$d^2z = d(dz) \quad d^3z = d(d^2z) \quad \text{и т.д.}$$

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

$$d^3z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dx\,dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3$$

$$d^m u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^m u$$ – для $u=f(x_1 \ldots x_n)$

формула раскрывается по биномиальному закону

<u>Применение дифференциала к приближенным вычислениям.</u>

Приращение ф-ции и dz связаны

$$\Delta z = dz + \varepsilon, \quad \text{где} \quad \varepsilon = o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)$$

При достаточно малых приращениях аргументов можно величиной ε пренебречь

(ε – б.м. более высокого порядка малости по сравнению с $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$)

Считаем $\boxed{\Delta z \approx dz}$

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \quad \text{или}$$

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0 y_0) \approx df(x_0 y_0) = \frac{\partial f(x_0 y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0 y_0)}{\partial y}\Delta y$$

Этой ф-лой можно пользоваться для приближенного подсчета значения $f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ по известному значению $f(x_0 y_0)$ и ее частных производных в данной точке $P(x_0 y_0)$

<u>Геометрический смысл дифференциала</u>

Это приращение аппликаты касательной пл-ти при $P(x_0 y_0) \to P'(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$

Дифференциал функции и его применение

№ 7.88

$z = \lg(x^2+y^2)$ x меняется от 2 до 2.1, y — от 1 до 0.9

$\Delta z = \lg[(x+\Delta x)^2+(y+\Delta y)^2] - \lg(x^2+y^2)]$ - полное приращение ф-ции

$\Delta x = 0.1 \quad \Delta y = -0.1 \quad \Delta z \approx dz$

$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \lg e \frac{2x}{x^2+y^2}dx + \lg e \frac{2y\,dy}{x^2+y^2} = 2\lg e \cdot \frac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2} =$

$= 2\lg e \frac{[2\cdot 0.1 + 1(-0.1)]}{4+1} = 0.4 \lg e \cdot 0.1 = 0.04 \lg e$

$\Delta z = \lg \frac{(x+\Delta x)^2+(y+\Delta y)^2}{x^2+y^2} = \lg \frac{2.1^2+0.9^2}{5} = \lg \frac{4.41+0.81}{5} = \lg \frac{5.22}{5}$
$= \lg 1{,}045$

№ 7.90

$z = \operatorname{tg}\frac{y^2}{x} \qquad dz - ?$

$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\cos^2\frac{y^2}{x}}\left(-\frac{y^2}{x^2}\right) \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\cos^2\frac{y^2}{x}} \cdot 2y \cdot \frac{1}{x}$

$dz = -\frac{y^2}{x^2\left(\cos^2\frac{y^2}{x}\right)}dx + \frac{2y}{x\cdot\cos^2\frac{y^2}{x}}dy = \frac{y}{x^2\cos^2\frac{y^2}{x}}(2x\,dy - y\,dx)$

№ 7.92

$u = (xy)^z \qquad du - ? \qquad du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$

$\frac{\partial u}{\partial x} = y^z \cdot z x^{z-1}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^z z y^{z-1} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = (xy)^z \cdot \ln xy$

$du = \frac{z(xy)^z}{x}dx + \frac{z(xy)^z}{y}dy + (xy)^z\ln(xy)\cdot dz =$
$= (xy)^z\left(\frac{z}{x}dx + \frac{z}{y}dy + \ln(xy)\cdot dz\right)$

№ 7.95 Вычислить приближенно:

$(2{,}01)^{3.03} = z = x^y \qquad \boxed{z(xy) \approx z(x_0,y_0) + dz\big|_{\substack{x_0\\y_0}}} \qquad dz \approx \Delta z$

$z = (2+0.01)^{3+0.03}$

$\Delta x = 0.01 = dx; \ \Delta y = 0.03 = dy$
$x_0 = 2 \quad y_0 = 3$

$\Delta z \approx dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{x_0y_0}dx + \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{x_0y_0}dy = \underbrace{y_0 x_0^{y_0-1}}_{\frac{\partial z}{\partial x}}dx + \underbrace{x_0^{y_0}\ln x_0}_{\frac{\partial z}{\partial y}}dy$

$\Delta z = 3\cdot 2^2 \cdot 0.01 + 2^3\ln 2\cdot 0.03 = 0.12 + 8\underbrace{\ln 2}_{=0.69315}\cdot 0.03 =$
$= 0.12 + 0.24\cdot 0.69 = 0.12 + 0.1656 \approx$
$\approx 0.12 + 0.17 \approx 0.29$

$z_0(2,3) = 2^3 = 8 = z(x_0,y_0)$

$z = z_0 + \Delta z = 8 + 0.29 = 8.29$

N7.88. Найти полное приращение и дифференциал ф-ции $z = x^2 - xy + y^2$, если x изменяется от 2 до 2.1, а y – от 1 до 1.2

11

$\Delta x = 2.1 - 2 = 0,1$ $\quad \Delta y = 1,2 - 1 = 0,2$ $\quad x_0 = 2$

$y_0 = 1$

$z = x^2 - xy + y^2$

<u>полное приращение ф-ции:</u>

$$\Delta z = (x_0+\Delta x)^2 - (x_0+\Delta x)(y_0+\Delta y) + (y_0+\Delta y)^2 - x_0^2 + x_0y_0 - y_0^2 =$$

$$= \cancel{x_0^2} + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - \cancel{x_0y_0} - \Delta x y_0 - x_0\Delta y - \Delta x\cdot\Delta y + \cancel{y_0^2} + 2y_0\Delta y + \Delta y^2 -$$

$$- \cancel{x_0^2} + \cancel{x_0y_0} - \cancel{y_0^2} = 2\cdot 2\cdot 0,1 + (0,1)^2 - 0.1\cdot 1 - 2\cdot 0,2 - 0.1\cdot 0.2 +$$

$$+ 2\cdot 1\cdot 0.2 + (0,2)^2 = 0,4 + 0,01 - 0,1 - 0,4 - 0.02 + 0.4 + 0,04 =$$

$$= 0.41 - 0.52 + 0.44 = 0.85 - 0.52 = \underline{0.33}$$

Дифференциал ф-ции

$\left.\begin{array}{l} dx \sim \Delta x \\ dy \sim \Delta y \end{array}\right\}$ для независимых переменных

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy =$$

$$= (2x - y)\Big|_{\substack{x_0=2\\ y_0=1}}\cdot\Delta x + (-x+2y)\Big|_{\substack{x_0=2\\ y_0=1}}\cdot\Delta y = 3\cdot 0.1 + 0\cdot 0.2 = \underline{0.3}$$

N 7.89 <u>Найти дифференциалы ф-ций</u>

$z = \ln(y + \sqrt{x^2+y^2})$ $\qquad \boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y+\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{1\cdot 2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{y+\sqrt{x^2+y^2}}\left(1+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$dz = \frac{x}{(y+\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{x^2+y^2}}dx + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$$

N 7.92

$u = (xy)^z$ $\qquad du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = z(xy)^{z-1}\cdot y; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = z(xy)^{z-1}\cdot x$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = (xy)^z\ln(xy)$$

$$du = yz(xy)^{z-1}dx + xz(xy)^{z-1}dy + (xy)^z\ln(xy)dz =$$

$$= (xy)^z\left[\frac{z}{x}dx + \frac{z}{y}dy + \ln(xy)dz\right]$$

N 7.94

$f(x y z) = \frac{z}{x^2+y^2}$ $\qquad df(1,2,1) - ?$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = -\frac{z\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}dx - \frac{2yz}{(x^2+y^2)^2}dy +$$

$$+ \frac{1}{x^2+y^2}dz$$

$$df(1,2,1) = -\frac{2\cdot 1\cdot 1}{25}dx - \frac{2\cdot 2\cdot 1}{25}dy + \frac{1}{5}dz = \frac{5dz - 2(dx+2dy)}{25}$$

№ 7.101 — Найти дифференциалы 1-ого и 2-ого порядков

$$z = x^3 + 3x^2y - y^3$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = (3x^2 + 6xy)\,dx + (3x^2 - 3y^2)\,dy =$$

$$= 3x(x+2y)\,dx + 3(x^2 - y^2)\,dy = \varphi(xy)\,dx + g(xy)\,dy = F(x,y)$$

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 =$$

по формуле d^2z

$$= (6x+6y)\,dx^2 + 2(6x)\,dx\,dy + (-6y)\,dy^2 =$$

$$= 6[(x+y)\,dx^2 + 2x\,dx\,dy - y\,dy^2]$$

$$d(dz) = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = (6x + 2y)\,dx + 6x\,dy)\,dx + (6x\,dx - 6y\,dy)\,dy$$

$$= (6x + 2y)\,dx^2 - 6y\,dy^2 + 12x\,dx\,dy$$

№ 7.108

$$u = xy + yz + zx$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz = (y+z)\,dx + (x+z)\,dy + (x+y)\,dz$$

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}dz^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dx\,dy + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}dx\,dz + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}dy\,dz$$

$$d^2u = 0\cdot dx^2 + 0\cdot dy^2 + 0\cdot dz^2 + 2\cdot 1\,dx\,dy + 2\cdot 1\,dx\,dz + 2\cdot 1\,dy\,dz = 2(dx\,dy + dx\,dz + dy\,dz)$$