Приведение уравнения кривой 2 порядка к каноническому виду

Дано ур-е кривой 2 порядка в некоторой прямоуг. системе координат:

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0.$$

Перейдём к другой прямоуг. системе координат, в которой ур-е кривой будет иметь канонич. вид.

Рас. только частные случаи:

I. $B=0$
1. $A\neq 0,\ C\neq 0$
2. $A\neq 0,\ C=0$
3. $A=0,\ C\neq 0$

II. $B\neq 0,\ A=0,\ C=0.$

Рас. I^е частные случаи:

I. $B=0$ 1. $A\neq 0, C\neq 0.$

Ур-е имеет вид:

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

Выделим полные квадраты по x и y:

$$A\left(x^2+2\cdot\frac{D}{2A}x+\left(\frac{D}{2A}\right)^2-\left(\frac{D}{2A}\right)^2\right)+$$

$$+C\left(y^2+2\cdot\frac{E}{2C}y+\left(\frac{E}{2C}\right)^2-\left(\frac{E}{2C}\right)^2\right)+F=0$$

$$A\underbrace{\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2}_{\text{обозн.} -x_0}+C\underbrace{\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2}_{\text{обозн.} -y_0}\underbrace{-\frac{D^2}{4A}-\frac{E^2}{4C}+F}_{\text{обозначим } -F'}=0$$

$$A(x-x_0)^2+C(y-y_0)^2=F'$$

Рас. случаи:

1) $F'\neq 0$.

Разделим ур-е на F':

$$\frac{A(x-x_0)^2}{F'}+\frac{C(y-y_0)^2}{F'}=1$$

2) $F'=0$.

Ур-е имеет вид:

$$A(x-x_0)^2+C(y-y_0)^2=0$$

Перепишем:

$$\frac{(x-x_0)^2}{\frac{F'}{A}}+\frac{(y-y_0)^2}{\frac{F'}{C}}=1 \qquad \frac{(x-x_0)^2}{\frac{1}{A}}+\frac{(y-y_0)^2}{\frac{1}{C}}=0$$

Обозначим: $\boxed{\begin{cases}x'=x-x_0\\ y'=y-y_0\end{cases}}$ и

$$a^2=\left|\frac{F'}{A}\right|,\ b^2=\left|\frac{F'}{C}\right| \qquad a^2=\left|\frac{1}{A}\right|,\ b^2=\left|\frac{1}{C}\right|$$

При различных сочетаниях знаков

$$\frac{F'}{A} \text{ и } \frac{F'}{C} \qquad \frac{1}{A} \text{ и } \frac{1}{C}$$

получим уравнение:

(1) $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$ при $\frac{F'}{A}>0, \frac{F'}{C}>0$

(2) $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=-1$ при $\frac{F'}{A}<0, \frac{F'}{C}<0$

(3) $\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=1$ при $\frac{F'}{A}>0, \frac{F'}{C}<0$

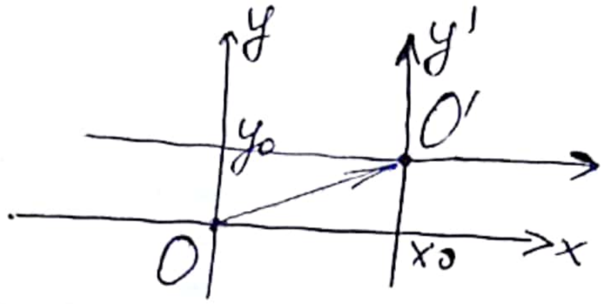
(3) $\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=-1$ при $\frac{F'}{A}<0, \frac{F'}{C}>0$

это ур-е сопряженной гип-лы

(4) $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=0$ при $AC>0$

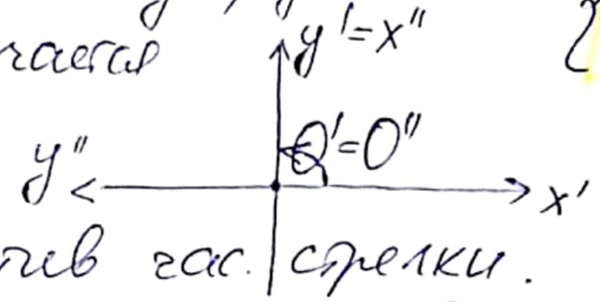
(5) $\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=0$ при $AC<0$

Мы получили ур-я (1)–(6) в сист. к-т $O'x'y'$, которая получается из сист. к-т Oxy переносом x_0, y_0



Если в ур-ех (1) и (2) $a<b$ (считают $a>0$, $b>0$), то переходят к новой сист. к-т $O''x''y''$, где $O''=O'$ и $\boxed{\begin{cases} x''=y' \\ y''=-x' \end{cases}}$

Она получается из $O'x'y'$ поворотом на 90° против час. стрелки.



Получим из (1): $\frac{x''^2}{b^2}+\frac{y''^2}{a^2}=\pm 1$, где $b>a$

I. $B=0$ 2. $A\neq 0, C=0$

Ур-е имеет вид

$$Ax^2+Dx+Ey+F=0$$

Выделим полный квадрат по x:

$$A\Big(x+\underbrace{\frac{D}{2A}}_{\text{обозн.} -x_0}\Big)^2+Ey+\underbrace{F-\frac{D^2}{4A}}_{\text{обозн. } F'}=0$$

$$A(x-x_0)^2+Ey+F'=0$$

Рас. случаи:

1) $E \neq 0$

$$A(x-x_0)^2 + E(y + \underbrace{\frac{F'}{E}}_{\text{обозн. } -y_0}) = 0$$

$$A(x-x_0)^2 + E(y-y_0) = 0$$

$$A(x-x_0)^2 = -E(y-y_0)$$

2) $E = 0$

$$A(x-x_0)^2 + F' = 0$$

$$A(x-x_0)^2 = -F'$$

Разделим на A:

$$(x-x_0)^2 = -\frac{E}{A}(y-y_0)$$

Обозн. $\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases}$

$$x'^2 = -\frac{E}{A}y'$$

$$(x-x_0)^2 = -\frac{F'}{A}$$

Обозн. $\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y \end{cases}$

$$x'^2 = -\frac{F'}{A}$$

Рас. различные знаки правой части:

$-\frac{E}{A} > 0$	$-\frac{E}{A} < 0$	$-\frac{F'}{A} > 0$	$-\frac{F'}{A} < 0$	$-\frac{F'}{A} = 0$
Обозначим		Обозначим		
$2p = -\frac{E}{A}$	$2p = \frac{E}{A}$	$a^2 = -\frac{F'}{A}$	$a^2 = \frac{F'}{A}$	
Получим		Получим		
$x'^2 = 2py'$	$x'^2 = -2py'$	$x'^2 = a^2$	$x'^2 = -a^2$	$x'^2 = 0$
Обозначим		$x'^2 - a^2 = 0$	$x'^2 + a^2 = 0$	
$\begin{cases} x'' = y' \\ y'' = -x' \end{cases}$	$\begin{cases} x'' = -y' \\ y'' = -x' \end{cases}$	(7)	(8)	(9)
Получим				
$y''^2 = 2px''$	$y''^2 = 2px''$			
Это ур-е (6).				

Мы получили все виды канонич. ур-ий.

I. $B=0$ 3. $A=0$, $C\neq 0$ Этот случай аналогичен сл. I.2. (при переименовании к-т x и y).

След. случай рас. на след. странице.

Канонич. ур-е кривых, если вместо x, y записаны $x-x_0$, $y-y_0$ наз. <u>смещёнными уравнениями кривых 2-го порядка</u>.

Рас. II-й частный случай:

$$\text{II.}\quad B\neq 0,\ A=0,\ C=0.$$

Ур-е имеет вид

$$Bxy+Dx+Ey+F=0. \quad |:B$$

$$xy+\frac{D}{B}x+\frac{E}{B}y+\frac{F}{B}=0$$

$$x\left(y+\frac{D}{B}\right)+\frac{E}{B}\left(y+\frac{D}{B}-\frac{D}{B}\right)+\frac{F}{B}=0$$

$$x\left(y+\frac{D}{B}\right)+\frac{E}{B}\left(y+\frac{D}{B}\right)\underbrace{-\frac{ED}{B^2}+\frac{F}{B}}_{\text{обозн. } F'}=0$$

$$\left(x+\frac{E}{B}\right)\left(y+\frac{D}{B}\right)+F'=0$$

$$\Big(x+\underbrace{\frac{E}{B}}_{-x_0}\Big)\Big(y+\underbrace{\frac{D}{B}}_{-y_0}\Big)=\underbrace{-F'}$$

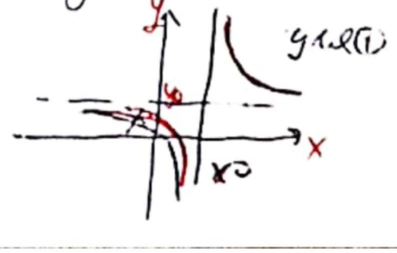
Обозначим: $\dfrac{a^2}{2}$, если $-F'\geq 0$

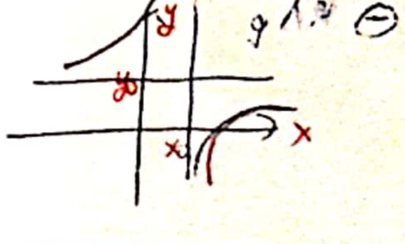
$-\dfrac{a^2}{2}$, если $-F'<0$

Получим

$$\boxed{(x-x_0)(y-y_0)=\pm\frac{a^2}{2}}$$

Если $a\neq 0$, то это ур-е смещённой гип-лы в асимптотах:





В сист. к-т $O'x'y'$, где $\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases}$ получим ур-я $\boxed{x'y' = \pm\frac{a^2}{2}}$

Если $a = 0$, то это ур-е п-ли прямых (асимптот гип-лы): $\begin{cases} x - x_0 = 0 \\ y - y_0 = 0 \end{cases}$ т.е. $\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$

В сист. к-т $O'x'y'$:

$\boxed{x'y' = 0}$

<u>Зам.</u> Последние три уравнения могут быть приведены к канонич. виду поворотом системы координат $O'x'y'$ на $45°$ против час. стрелки. Формулы поворота $\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x'' - \frac{\sqrt{2}}{2}y'' \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x'' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'' \end{cases}$

$$\left(\begin{cases} x' = \cos 45° x'' - \sin 45° y'' \\ y' = \sin 45° x'' + \cos 45° y'' \end{cases} \right)$$