Векторная алгебра

Лекция 1

Направленные отрезки и свободные векторы

Опр. Величина наз.

скалярной,	векторной,

если она характеризуется

действит. числом.	1) действит. числом и 2) направлением.

Опр. Геометрическим вектором (или направленным отрезком) наз. отрезок, концы которого упорядочены, т.е. известно, какой конец отрезка явл. 1-м, а какой 2-м.

Обозн. $\overrightarrow{AB}$, $\overline{AB}$

Геом. вектор явл. векторной величиной. Он характеризуется

1) длиной (или модулем). Обозн. $|\overrightarrow{AB}|$.
$|\overrightarrow{AB}| = |AB|$, т.е. длине отрезка AB.
2) направлением от A к B.

Опр. Геом. вектор наз. нулевым, если его начало и конец совпадают.

Обозн. $\vec{AA}, \vec{BB} \ldots$

Для нулевого вектора

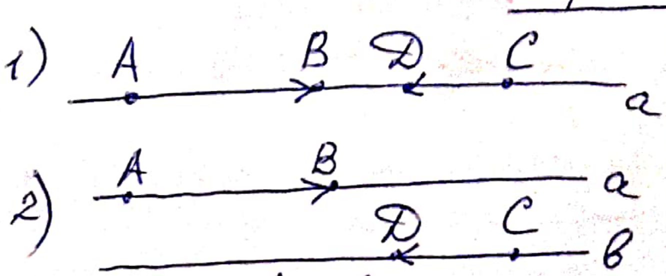
1) длина $=0$,
2) направление не определено (считают любым)

Опр. Геом. вектор наз. единичным (или ортом), если его длина $=1$.

Опр. Геом. векторы наз.

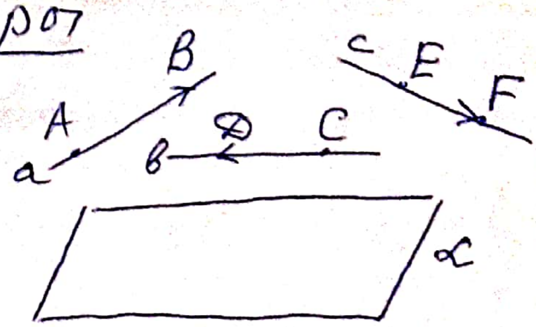
коллинеарными,	компланарными,
если они лежат	
на одной или на параллельных прямых	на прямых, параллельных некоторой плоскости.

Примеры



$(a \parallel b)$

$\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ коллинеарны



$(a \parallel \alpha, b \parallel \alpha, c \parallel \alpha)$

$\vec{AB}, \vec{CD}$ и $\vec{EF}$ компланарны

Св-ва (простейшие)

1. Нулевой вектор коллинеарен и компланарен любым векторам
2. Любые 2 геом. вектора компланарны.

Опр. Геом. векторы наз.
сонаправленными, | противоположно направленными,

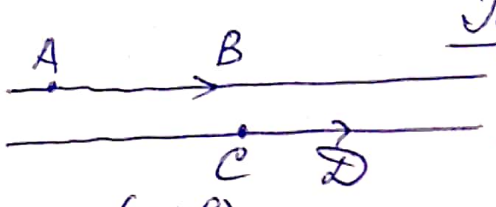
если они
1) коллинеарны и
2) их направления

совпадают. | противоположны.

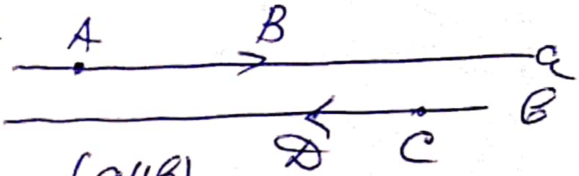
Обозн.

$\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$ | $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$

Пример



(a∥b)

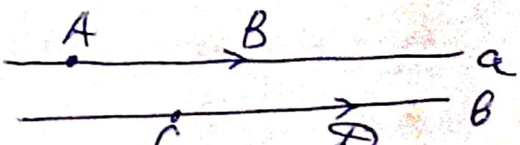


(a∥b)

Нулевой вектор считают сонаправл. и противонаправл. с любым вектором.

Опр 2 геом. вектора наз. равными, если
1) они сонаправлены и
2) их длины равны.

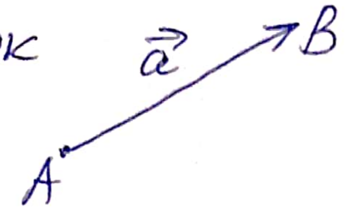
Пример.



(a∥b) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

Опр. Свободным вектором наз. множество всех равных друг другу геом. векторов.

Обозн. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \ldots$

Рисунок 

означает, что $\vec{AB}$ – один из геом. векторов, представляющих своб. вектор $\vec{a}$.

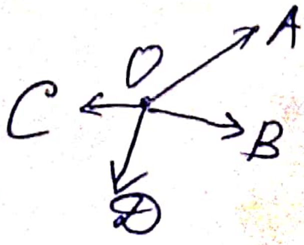
Также говорят, что своб. вектор $\vec{a}$ отложен от точки A; при этом получается геом. вектор $\vec{AB}$.

Правильно писать $\vec{AB} \in \vec{a}$, но пишут $\vec{AB} = \vec{a}$.

<u>Опр</u>. <u>Нулевым (свободным) вектором</u> наз. множество всех нулевых геом. векторов.
<u>Обозн</u>. $\vec{0}$.

<u>Опр</u>. <u>Скользящим вектором</u> наз. мн-во всех равных друг другу геом. векторов, <u>лежащих на одной прямой</u>.

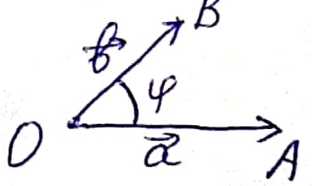
<u>Опр</u>. <u>Связанными векторами</u> наз. геом. векторы, имеющие общее начало.



<u>Опр</u> <u>Свободные векторы наз</u> <u>коллинеарными</u>, <u>компланарными</u>, <u>сонаправленными</u>, <u>противонаправленными</u>, если этими свойствами обладают представляющие их геом. векторы.

<u>Опр</u> <u>Длиной</u> (или <u>модулем</u>) <u>свободного вектора</u> наз длина любого геом. вектора, представляющего этот своб. вектор.
<u>Обозн.</u> $|\vec{a}|$. $\quad A \xrightarrow{\vec{a}} B \quad |\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}|$.

<u>Опр</u> <u>Углом между свободными векторами</u> $\vec{a}$ и $\vec{b}$ наз. величина угла AOB, где $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.
<u>Обозн.</u> $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$.



<u>Зам.</u> φ <u>не зависит</u> от выбора т. O.

<u>Опр</u> <u>Векторы</u> $\vec{a}$ и $\vec{b}$ <u>наз. ортогональными</u>, если угол между ними равен 90°.
<u>Обозн.</u> $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Нулевой вектор $\vec{0}$ считают ортогональным любому своб. вектору.

Дальше слово „свободные" будем пропускать.

Сканировано с CamScanner

Линейными операциями над векторами

наз. ① сложение векторов и
② умножение на числа.

<u>Опр.</u> <u>Суммой $2^х$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$</u> наз. вектор $\vec{c}$, построенный по след. правилам.

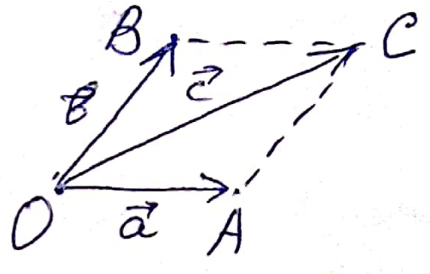
Правило паралл-ма	Правило треуг-ка

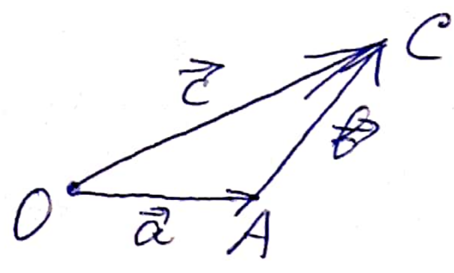
Пусть O - любая точка.
Отложим $\vec{a}$ от O.
Получим $\overrightarrow{OA}$.
Отложим $\vec{b}$ от

т. O.	т. A.

Получим

$\overrightarrow{OB}$	$\overrightarrow{AC}$





Построим

паралл-м OACB	Δ OAC

Рас. $\overrightarrow{OC}$.

Вектор $\vec{c}$, представителем которого явл. $\overrightarrow{OC}$, явл. искомым вектором.

<u>Обозн.</u> $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

Построение $\vec{c}$ не зависит от выбора т. O или правила паралл-ма или Δ-ка.

<u>Опр</u> <u>Произведением вектора $\vec{a}$ на число $\alpha \in \mathbb{R}$</u> наз. вектор $\vec{b}$

1) коллинеарный $\vec{a}$, при этом
   $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$ при $\alpha > 0$ и
   $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$ при $\alpha < 0$, и

2) имеющий длину $|\alpha||\vec{a}|$.

Свойства линейных операций

для сложения

1) коммутативность сложения
   $\forall \vec{a}, \vec{b} \quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
2) ассоциативность сложения
   $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \quad (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
3) существование нулевого вектора
   $\exists \vec{0} \quad \forall \vec{a} \quad \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
4) существование противоположного вектора
   $\forall \vec{a} \quad \exists -\vec{a} \quad \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ <u>Зам.</u> $-\vec{a} = (-1)\vec{a}$.

для умнож.

5) умножение на единицу:
   $\forall \vec{a} \quad 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$
6) ассоциативность умножения
   $\forall \vec{a} \quad \forall \alpha, \beta \quad (\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$

для слож. умн.

7) дистрибутивность отн. векторов
   $\forall \vec{a}, \vec{b} \quad \forall \alpha \quad \alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$
8) дистрибутивность отн. чисел
   $\forall \vec{a} \quad \forall \alpha, \beta \quad (\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$

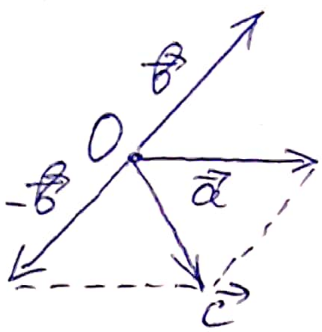
Опр Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ наз. вектор $\vec{c}$:

$\vec{c} = \vec{a} + (-\vec{b})$ — 1-й способ определения

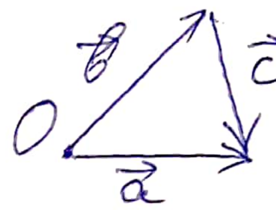
или так:

$\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$ — 2-й способ определения

см.



см.



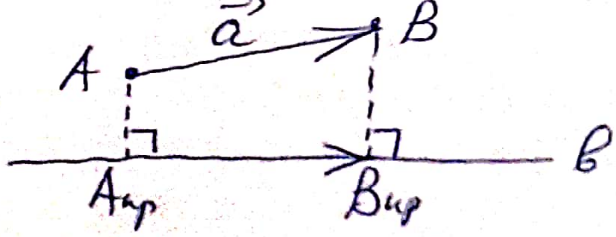
(из конца $\vec{b}$ в конец $\vec{a}$)

Ортогональная проекция вектора на направление (на вектор)

Осью будем называть прямую, на которой выбрано направление.

Опр. Ортогональной проекцией вектора $\vec{a}$ на направление вектора $\vec{b}$ (или на вектор $\vec{b}$) наз. число, вычисленное по след. правилу:

1) отложим $\vec{a}$ от любой т. A, получим $\overrightarrow{AB}$,
2) возьмём любую ось b, направление которой совпадает с направлением $\vec{b}$,
3) ортогонально спроектируем $\overrightarrow{AB}$ на b, получим $\overrightarrow{A_{пр}B_{пр}}$,



4) найдём число $\pm|\overrightarrow{A_{пр}B_{пр}}|$,
где берётся знак $+$, если $\overrightarrow{A_{пр}B_{пр}} \uparrow\uparrow \vec{b}$,
и знак $-$, если $\overrightarrow{A_{пр}B_{пр}} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Обозн. $пр_{\vec{b}}\vec{a}$. Итак, $пр_{\vec{b}}\vec{a} = \pm|\overrightarrow{A_{пр}B_{пр}}|$.

Орт. проекция $\vec{a}$ на $\vec{b}$ не зависит от выбора т. A и оси b.

Теоремы о проекциях
(док-ть самостоятельно)

1) $пр_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$

2) $пр_{\vec{b}}(\vec{a}+\vec{c}) = пр_{\vec{b}}\vec{a} + пр_{\vec{b}}\vec{c}$

3) $пр_{\vec{b}}(\alpha\vec{a}) = \alpha \cdot пр_{\vec{b}}\vec{a}$.