Лекция 10.

Матрицы и их виды

Опр. Матрицей типа $m \times n$ (или размера $m \times n$) наз прямоугольная таблица, элементы которой расположены в m строках и n столбцах

Обозн. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ или $A = (a_{ij})$, где $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

номер строки; номер столбца

Зам. Мы будем в основном рас. матрицы, для которых $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Мн-во таких матриц обозн. $M_{mn}(\mathbb{R})$.

Опр Матрица наз. нулевой, если все её элементы равны нулю, т.е. $a_{ij} = 0 \ \forall i, j$.

Обозн. Θ.

Опр. Матрица наз. квадратной, если число её строк равно числу её столбцов, т.е $m=n$.

Обозн. мн-ва квадр. матриц, сост. из действит. чисел: $M_n(\mathbb{R})$.

Опр. Пусть A – квадратная матрица. Тогда

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

← побочная диагональ

← главная диагональ, её эл-ты $a_{11}, \ldots, a_{nn}$.

Опр. Матрица наз. диагональной, если
1) она квадратная, и
2) все её элементы, стоящие вне главной диагонали, равны нулю, т.е $a_{ij}=0$ при $i \neq j$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Опр. Матрица наз. единичной, если

1) она диагональная, и

2) все элементы её главной диагонали равны 1,

т.е.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i=j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Обозн.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Опр. Матрица наз.

верхней | нижней

треугольной,

если

1) она квадратная, и

2) все её элементы, расположенные

под | над

главной диагональю, равны нулю.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

углы из нулей

<u>Опр.</u> <u>Матрицы наз. равными</u>, если
1) они имеют одинаковый тип, и
2) у них совпадают все соответств. элементы,

т.е. для матриц $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$

$A=B$, если

1) $A, B \in M_{mn}(\mathbb{R})$,
2) $a_{ij}=b_{ij}$ $\forall i,j$.

Линейные операции над матрицами и их свойства

<u>Опр.</u> <u>Суммой матриц</u> $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ одного типа $m\times n$ наз. матрица $C=(c_{ij})$ того же типа $m\times n$ с элементами $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

<u>Обозн.</u> $C=A+B$.

<u>Опр.</u> <u>Произведением матрицы</u> $A=(a_{ij})$ типа $m\times n$ <u>на число</u> $\alpha\in\mathbb{R}$ наз. матрица $C=(c_{ij})$ того же типа $m\times n$ с элементами $c_{ij}=\alpha\cdot a_{ij}$.

<u>Обозн.</u> αA.

Свойства лин. операций над матрицами

1–8 ← те же, что и свойства лин. операций над векторами.
Роль противоположной матрицы для $A=(a_{ij})$ играет матрица
$$-A=(-a_{ij}).$$

<u>Повторите свойства!</u>

Опр. Разностью матриц A и B одного типа $m \times n$ наз. матрица $C = A + (-B)$.

Обозн. $C = A - B$.

Транспонирование матриц

(это не линейная операция)

Опр. Для матрицы $A = (a_{ij})$ типа $m \times n$ её транспонированной матрицей наз. матрица $A^T = (c_{ij})$ типа $n \times m$ с элементами $c_{ij} = a_{ji}$.

Зам. При транспонировании матрицы её строки (столбцы) становятся столбцами (строками) с теми же номерами.

Примеры

1) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$

Свойства операции транспонирования.

1) $(A^T)^T = A$
2) $(A+B)^T = A^T + B^T$
3) $(\alpha A)^T = \alpha \cdot A^T$
4) $(AB)^T = B^T A^T$. Операцию умножение матриц определим позже.

Опр. Матрица наз.

симметрической	если	кососимметрической
$A^T = A$,	т.е.	$A^T = -A$,
$a_{ij} = a_{ji}$		$a_{ij} = -a_{ji}$

Следствие. Для кососимм матриц $a_{ii} = 0 \ \forall i$

Умножение матриц

Опр. Произведением матрицы $A=(a_{ij})$ типа $m\times n$ и матрицы $B=(b_{ij})$ типа $n\times p$ наз. матрица $C=(c_{ij})$ типа $m\times p$ с элементами

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}.$$

$$\begin{array}{c} \\ i \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}\begin{array}{c} j \\ \begin{pmatrix} & b_{1j} & \\ & b_{2j} & \\ & \vdots & \\ & b_{nj} & \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} j \\ \begin{pmatrix} & & \\ & c_{ij} & \\ & & \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ i \\ \\ \end{array}$$

Обозн. $C=AB$.

Свойства умножения матриц.

Замечание. Как правило $AB \neq BA$ (некоммутативность)

Примеры ① $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow AB \neq BA$$

② $\underset{1\times 2}{A} = (1 \ \ 2)$, $\underset{2\times 1}{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\underset{1\times 1}{AB} = (1 \ \ 2)\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = (1\cdot 3 + 2\cdot 4) = (11)$$

$$\underset{2\times 2}{BA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}(1 \ \ 2) = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot 2 \\ 4\cdot 1 & 4\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow AB \neq BA$$

1. Ассоциативность $(AB)C = A(BC)$
2. Дистрибутивность $(A+B)C = AC+BC$

Докажем ниже.

3. $A(\alpha B) = (\alpha A)B = \alpha(AB)$ Если в произведении матриц один множитель умножается на число, то и всё произведение умножается на это число.
4. $(AB)^T = B^T A^T$

Для квадратных матриц:

5. $AE = EA = A$ Умножение на единичную матр.
6. $A\Theta = \Theta A = \Theta$ Умножение на нулевую матр.

Опр. целой неотрицательной степени квадратной матрицы:

1) $A^0 = E$

2) $A^1 = A$, $A^2 = A^1 A \overset{\text{т.е.}}{=} AA$

3) $A^{n+1} = A^n A$

Свойство: $A^n A^m = A^m A^n$

Опр. многочлена степени n от матрицы

Пусть $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$ — многочлен степени n,

A — квадратная матрица.

Тогда $P_n(A) = a_0 A^n + a_1 A^{n-1} + \ldots + a_{n-1} A + a_n E$.

Значением многочлена явл. матрица того же типа, что и матрица A.

Док-во ассоциативности: $\underbrace{(\underbrace{AB}_{\text{обозн. } D})C}_{\text{обозн. } X}=\underbrace{A(\underbrace{BC}_{\text{обозн. } F})}_{\text{обозн. } Y}$.

Док-м, что матрицы X и Y 1) имеют одинак. тип,

2) их соотв. элементы равны: $x_{ij}=y_{ij}$.

1): Рас.

матрицы	типа
$A=(a_{ij})$	$m\times n$
$B=(b_{ij})$	$n\times k$
$D=(d_{ij})$	$m\times k$
$C=(c_{ij})$	$k\times l$
$F=(f_{ij})$	$n\times l$
$X=(x_{ij})$	$m\times l$
$Y=(y_{ij})$	$m\times l$

$\left.\begin{matrix} m\times l \\ m\times l\end{matrix}\right\} \Rightarrow$ X и Y имеют одинак. тип

2):
$$x_{ij}=\sum_{r=1}^{k} d_{ir}c_{rj}=\sum_{r=1}^{k}\left(\sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sr}\right)c_{rj}=$$
$$=\sum_{r=1}^{k}\left(\sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sr}c_{rj}\right)$$

$$y_{ij}=\sum_{s=1}^{n} a_{is}f_{sj}=\sum_{s=1}^{n} a_{is}\left(\sum_{r=1}^{k} b_{sr}c_{rj}\right)=$$
$$=\sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{r=1}^{k} a_{is}b_{sr}c_{rj}\right)=\sum_{r=1}^{k}\left(\sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sr}c_{rj}\right).$$

След., $x_{ij}=y_{ij}$.

ч.т.д.

Док-во дистрибутивности: $\underbrace{\underbrace{(A+B)}_{X}C}_{Y}=\underbrace{AC}_{Z}+\underbrace{BC}_{W}$

Док-ем, что матрицы Y и $Z+W$ 1) имеют одинак. тип,
2) их соотв. элементы равны:
$$y_{ij}=z_{ij}+w_{ij}.$$

1):

Матрицы	тип
$A=(a_{ij})$	$m\times n$
$B=(b_{ij})$	$m\times n$
$X=(x_{ij})$	$m\times n$
$C=(c_{ij})$	$n\times k$
$Y=(y_{ij})$	$m\times k$
$Z=(z_{ij})$	$m\times k$
$W=(w_{ij})$	$m\times k$

$\Rightarrow$ Y и $Z+W$ имеют одинак. тип.

2): $y_{ij} = \sum_{r=1}^{n} x_{ir} c_{rj} = \sum_{r=1}^{n} (a_{ir} + b_{ir}) c_{rj} =$

$= \sum_{r=1}^{n} (a_{ir} c_{rj} + b_{ir} c_{rj}) = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} c_{rj} + \sum_{r=1}^{n} b_{ir} c_{rj} =$

$= z_{ij} + w_{ij}$

ч. т. д.