Лекция 11

Элементарные преобразования матриц

Для строк.

① Умножение строки матрицы на число $\lambda \neq 0$:

$$A = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ & \vdots & \end{pmatrix} \to B = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \lambda a_{i1} & \cdots & \lambda a_{in} \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$

② Перестановка 2х строк:

$$A = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \to C = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

③ Добавление к одной строке матрицы другой строки умноженной на число

$$A = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \to D = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+\lambda a_{k1} & \cdots & a_{in}+\lambda a_{kn} \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

Каждое элемент. преобразование строк можно рас. как умножение матрицы A слева на специальные матрицы. А именно:

рас. $E_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 \\ & & & \lambda & \\ & 0 & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$ ← λ стоит вместо 1 в i-й строке

$$F_{ik} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & & 1 & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & 1 & & & & 0 & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

← i-я, ← k-я строки; ост. эл-ты — нули

$$G_{ik}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & \lambda & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

← i-я, ← k-я строки; ост. эл-ты — нули

Тогда $B = E_i(\lambda) A$, $C = F_{ik} \cdot A$, $D = G_{ik}(\lambda) \cdot A$.

Аналог. для столбцов (только умножение справа).

Опр. Матрица наз. ступенчатой, если

1) все нулевые строки расположены под ненулевыми строками,

2) 1й ненулевой элемент любой строки расположен левее 1го ненулевого элемента строки, которая наход. ниже.

Пример.

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Теорема Любую матрицу можно привести к ступенчатому виду элементарными преобразованиями строк.

Обратная матрица

Опр. Пусть A – квадратная матрица порядка n. Матрица B наз. обратной к матрице A, если
1) она того же порядка n,
2) $AB = BA = E$, где E – единичная матрица.

Обозн. A^{-1}.

Опр. целой отрицательной степени матрицы A:

$$A^{-n} = (A^{-1})^n, \text{ если } A^{-1} \text{ сущ.}$$

Теорема о единственности обратной матрицы

Если для матрицы A $\exists$ обратная матрица A^{-1}, то она единственная.

Когда для квадратной матрицы A существует обратная матрица A^{-1}?

Опр Матрица A наз. невырожденной, если её определитель $\det A \neq 0$.

Теорема (Критерий существования обратной матрицы)

Для квадратной матрицы A $\exists$ обратная матрица A^{-1} $\Longleftrightarrow$ $\det A \neq 0$ (т.е. когда A - невырожденная матрица).

Доказательство критерия.

($\Rightarrow$) Необходимость.

Пусть $\exists A^{-1}$. Докажем, что $\det A \neq 0$.

По опр. обратной матрицы

$$AA^{-1} = E.$$

Возьмём det от левой и правой части рав-ва:

$$\det(AA^{-1}) = \det E$$

По свойствам det:

$$\det A \cdot \det(A^{-1}) = 1$$

(произведение чисел $= 1$).

След, $\det A \neq 0$; $\det A^{-1} \neq 0$.

Напоминание

M_{ij} – дополнительные миноры к элементам a_{ij}

$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ – алгебраические дополнения к a_{ij}

$\det A=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}$ – разложение определителя по i-й строке.

($\Leftarrow$) Достаточность.

Пусть $\det A\neq 0$. Построим матрицу A^{-1}.

① Найдём все алгебр. дополнения A_{ij} и составим из них матрицу

$$(A_{ij}).$$

② Транспонируем матрицу (A_{ij}):

$$(A_{ji}) = (A_{ij})^T.$$

③ Рас. матрицу $B = (b_{ij})$, где $b_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det A}$,

т.е. $B = \frac{1}{\det A}(A_{ji})$.

2) Проверим, что построенная матрица B и будет A^{-1}.

В самом деле,
B – квадратная и осталось проверить, что $AB = E$ (и $BA = E$).

Обозначим AB через $C=(c_{ik})$

Найдём $\boxed{c_{ik}} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{A_{kj}}{\det A} =$

$$= \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{kj} = \boxed{\begin{cases} 1, & \text{если } i=k \\ 0, & \text{если } i \neq k, \end{cases}}$$

т.к. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{kj} = \begin{cases} \det A, & \text{если } i=k \\ 0, & \text{если } i \neq k \end{cases}$ ← т.к. это разложение по i-й строке определителя, у которого совпадают i-я и k-я строки, т.е. $a_{ij} = a_{kj}$ для i-й и k-й строк.

След, $C=E$.

Аналог. пок., что $BA=E$.

Из 1), 2) $\Rightarrow$ B явл. A^{-1} для матрицы A.

ч.т.д.

Сканировано с CamScanner

Свойства обратной матрицы

1) Если квадратные матрицы A и B одного порядка имеют обратные матрицы A^{-1} и B^{-1}, то их произведение AB имеет обратную матрицу $(AB)^{-1}$, причём $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

2) Если квадратная матрица A обратную матрицу A^{-1}, то транспонированная матрица A^T тоже имеет обратную матрицу $(A^T)^{-1}$, причём $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

3) $\det A$ и $\det(A^{-1})$ явл. взаимно обратными числами, т.е. $\det A \cdot \det(A^{-1}) = 1$.

Способы вычисления обратной матрицы.

I способ. **Метод присоединенной матрицы.**

(по плану построения A^{-1} в критерии)

Опр. **Присоединенной матрицей** для квадратной матрицы A наз. матрица $A^* = (A_{ji})$,

где (A_{ij}) - матрица из алгебр. дополнений.

Формула для вычисления обратной матрицы:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*}$$

II способ. **Метод элементарных преобразований**

Записать $(A \mid E) \sim$ элем. преоб-я $\sim (E \mid B)$.

Тогда $B = A^{-1}$.

Решение матричных уравнений

Пусть $\det A \neq 0$.

Рас. ур-я

$AX = B$ $\qquad$ $XA = B$

Найдём X.

I способ. С помощью обратной матрицы A^{-1} для A.

1) Найдём A^{-1}
2) Умножим уравнение на A^{-1}

слева:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$
$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B$$
$$E\,X = A^{-1}B$$
$$\boxed{X = A^{-1}B}$$

справа:

$$(XA)A^{-1} = BA^{-1}$$
$$X(AA^{-1}) = BA^{-1}$$
$$X\,E = BA^{-1}$$
$$\boxed{X = BA^{-1}}$$

II способ. С помощью элементарных преобразований

Запишем $(A|B) \sim$ элементарные преобр-я $\sim$
$\sim (E|A^{-1}B)$

След., $A^{-1}B = X$

1) Транспонируем обе части уравнения:

$$(XA)^T = B^T$$

$$A^T X^T = B^T$$

2) Запишем $(A^T|B^T) \sim$ элементарные преобр-я $\sim$
$\sim (E|(A^T)^{-1}B^T)$

След., $(A^T)^{-1}B^T = (A^{-1})^T B^T =$
$= (BA^{-1})^T = X^T \Rightarrow$ опять транспонируем $\Rightarrow X = BA^{-1}$.

Доказательство (Обоснование II-го способа решения матричных ур-ий — метода элементарных преобразований).

Рас. ур-е $AX=B$.

Справа от уравнение будем писать соответствующую ему матрицу $(A|B)$.

Будем умножать обе части ур-я слева на матрицы спец. вида, соответствующие элементарным преобразованиям матриц A. Цель элем. преоб-ий: получить E из A.

Результатом k-го умножения будет ур-е

$$A_k X = B_k,$$

ему соотв. матрица $(A_k|B_k)$.

Начинаем умножение:

$$AX=B \qquad (A|B)$$
$$A_1X=B_1 \qquad (A_1|B_1)$$
$$A_2X=B_2 \qquad (A_2|B_2)$$
$$\vdots$$

и, наконец, на некотором s-м шаге.

$$\underbrace{A_sX}_{EX=X}=B_s, \text{ где } A_s=E \qquad (E|B_s)$$

Последнее ур-е означает, что в итоге

мы умножим уравнение

$$AX = B$$

слева на матрицу A^{-1}.

Равенство $X = B_S$ озн., что $B_S = A^{-1}B$ (т.к. мы знаем, что решение исходного матричного ур-я — это $X = A^{-1}B$).

Итак, правая часть матрицы

$$(E \mid B_S) \ominus$$

явл. решением исходного ур-я, т.е.

$$\ominus (E \mid A^{-1}B).$$

ч.т.д.

<u>Следствие</u>. (<u>Обоснование II-го способа нахождения обратной матрицы — метода элем. преобразований</u>).

Рас. ур-е $AX = E$.

(вместо матрицы B здесь рас. мат. E)

Его решением (по опр. обратной мат.) явл. A^{-1}. Решим это ур-е методом элем. преобр-ий. Получим на 5-м шаге:

$A_s X = B_s$, где $A_s = E \Rightarrow B_s = A^{-1}B = A^{-1}E = A^{-1}$.

Соответствующая последнему ур-ю матрица будет $(E|A^{-1})$.

Ч.т.д.