Минор и окаймляющий минор матрицы.

Опр. Минором порядка k матрицы A типа $m \times n$ наз. определитель, который составлен из элементов этой матрицы, стоящих на пересечении любых k строк и k столбцов с сохранением порядка этих строк и столбцов.

Обозн. $M_{i_1 \ldots i_k}^{j_1 \ldots j_k}$. Этот минор составлен из элементов, расположенных на пересечении строк $i_1, \ldots, i_k$ и столбцов $j_1, \ldots, j_k$,

причём $i_1 < \ldots < i_k$, $j_1 < \ldots < j_k$.

Пример.

Рас. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Выпишем все миноры матрицы A.

9 миноров 1-го пор: $M_1^1 = a_{11}$, $M_1^2 = a_{12}$, $M_1^3 = a_{13}$, ...

9 миноров 2-го пор:

$$M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad M_{12}^{13} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad M_{12}^{23} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \ldots$$

($\exists$ 3 способа выбрать 2 строки из $3^х$ и
3 способа выбрать 2 столбца из $3^х$; $3 \cdot 3 = 9$)

1 минор 3-го пор:

$$M_{123}^{123} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \det A.$$

<u>Опр.</u> Минор M' матрицы A наз. <u>окаймляющим для минора M</u>,
если он получается из M добавлением одной <u>новой</u> строки и одного <u>нового</u> столбца.

Если порядок минора M равен k,
то порядок его любого окаймляющего минора M' равен $k+1$.

Пример. Напишем окаймляющие миноры для миноров из пред. примера.

Для <u>всех</u> миноров порядка 2 окаймляющим будет минор 3-го порядка $M_{123}^{123} = \det A$. Он единственный.
Для минора $M_1^2 = a_{12}$ (например) порядка 1 окаймляющими минорами будут M_{12}^{12}, M_{12}^{23}, M_{13}^{12}, M_{13}^{23}. Для M_1^2 таких миноров четыре.

Ранг матрицы.

Опр. Рангом матрицы наз. число, равное максимальному порядку среди её ненулевых миноров.

Обозн. $\mathrm{Rg}\,A$, $\mathrm{Rang}\,A$, $\mathrm{rg}\,A$, $\mathrm{rang}\,A$.

Свойства ранга матрицы

① Если $\mathrm{rg}\,A = r$, то
1) матрица A имеет хотя бы один минор порядка r, который $\neq 0$,
2) все миноры порядка больше r равны 0.

② $\mathrm{rg}\,\Theta = 0$, $\mathrm{rg}\,E = n$.

3. Если A - квадратная матрица порядка n и

$\det A \neq 0$,		$\det A = 0$,
	то	
$rg A = n$		$rg A < n$.

Теоремы о ранге матрицы

Об инвариантности ранга

$\boxed{1}$ при транспонировании матрицы	$\boxed{2}$ при элементарных преобразованиях матрицы
При транспонировании матрицы	При элементарных преобразованиях матрицы

её ранг не меняется.

Базисный минор матрицы

Опр. Минор M матрицы A наз. базисным, если 1) он $\neq 0$,
2) его порядок равен $rg\, A$.

Матрица может иметь несколько базисных миноров.

Опр. Строки и столбцы наз. базисными, если в них расположен выбранный базисный минор.

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$\det A = 0 \Rightarrow rg\, A < 3$.

Базисный минор, напр.,

$M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ 1-я, 2-я строки и 1-й, 2-й столбец базисные

Линейная зависимость и независимость строк и столбцов матрицы.

Для матрицы типа $m \times n$
её строки — это матрицы типа $1 \times n$,
её столбцы — это матрицы типа $m \times 1$.
След., их можно складывать и умножать на числа.

Опр. Строки (столбцы) $A_1, \ldots, A_s$ матрицы A наз.

линейно завис.	линейно независ.,
если $\exists\, \alpha_1, \ldots, \alpha_s \in \mathbb{R}$, не все равные нулю: $\alpha_1 A_1 + \ldots + \alpha_s A_s = \Theta$,	если $\alpha_1 A_1 + \ldots + \alpha_s A_s = \Theta$ только с нулевыми $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$,

где Θ — нулевая строка (столбец)

Теорема (Критерий линейной зависимости (независимости) строк (столбцов) матрицы) 8

Строки (столбцы) матрицы A явл.

линейно завис.	линейно независ.
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
хотя бы одна из них явл. линейной комбинацией остальных	ни одна из них не является линейной комбинацией остальных.

Зам. Эта теорема аналог. теореме о линейной зависимости (независимости) системы векторов.

Теорема о базисном миноре.

1. Базисные строки (столбцы) матрицы A, соответствующие любому базисному минору M, линейно независимы.
2. Любые строки (столбцы) матрицы A, не входящие в базисный минор M, являются линейными комбинациями базисных строк (столбцов).

Доказательство для строк.

Пусть матрица $A = (a_{ij})$ имеет тип $m \times n$,
пусть $\operatorname{rg} A = r$ и
пусть M — базисный минор матрицы A.

Рас. строки, на которых построен M. Это базисные строки матрицы A.

1. Док-м, что баз. строки лин. независимы.

Пусть от противного они лин. зависимы $\Rightarrow$ по критерию $\Rightarrow$ хотя бы одна строка из них в матриц A явл. линейной комбинацией остальных $\Rightarrow$ в миноре M хотя бы одна строка явл. лин. комбинацией остальных $\xRightarrow{\text{по свойству det}}$ $\det M = 0$

Противоречие, т.к. M - базисный минор.

2. Док-м, что любая строка матрицы A, не входящая в базисный минор M, явл. лин. комбинацией базисных строк.

Пусть базисный минор M расположен в верхнем левом углу матрицы A:

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix}$$

(в остальных сл. аналогично)

Добавим к M <u>любую</u> i-ю <u>не базисную</u> строку и $\boxed{\text{любой}}$ j-й столбец (возможно даже базисный):

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1j} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & \dots & a_{ir} & a_{ij} \end{vmatrix}$$

Порядок Δ_j равен $r+1 \Rightarrow \Delta_j = 0$.

Разложим Δ_j по последнему столбцу:

$$\Delta_j = a_{1j} A_{1j} + \ldots + a_{rj} A_{rj} + a_{ij} A_{ij} = 0$$

, где A_{kj} — это алгебр. дополнение эл-в a_{kj} в Δ (в $\overset{\text{не}}{A}$)

Заметим, что

1) эти алгебр. дополнения A_{kj} не зависят от номера j, т.к. при их вычислении j-й столбец вычеркивается

2) $A_{ii} = (-1)^{(r+1)+(r+1)} M = (-1)^{2(r+1)} M = M \neq 0.$

Выразим элемент a_{ij}:

$$a_{ij} = \underbrace{-\frac{A_{1j}}{M}}_{\text{обозн. } =b_1} a_{1j} - \ldots \underbrace{-\frac{A_{rj}}{M}}_{=b_r} a_{rj}$$

, т.е.

$$a_{ij} = b_1 a_{1j} + \ldots + b_r a_{rj}$$

, где $b_1, \ldots, b_r$ не зависят от j.

Если поставить на место j-го столбца в Δ_j его 1ый столбец, то получим

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{11} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & & a_{rr} & a_{r1} \\ a_{i1} & & a_{ir} & a_{i1} \end{vmatrix} = 0$$

и $\Delta_1 = a_{11}A_{1j} + \ldots + a_{r1}A_{rj} + a_{i1}A_{ij}$. Выразим

$$a_{i1} = -\frac{A_1}{M}a_{11} - \ldots - \frac{A_{rj}}{M}a_{r1}, \text{ т.е.}$$

$a_{i1} = b_1 a_{11} + \ldots + b_r a_{r1}$ (с теми же коэфф-ми $b_1, \ldots, b_r$)

Аналог. ставим на место j-го столбца в Δ остальные столбцы по-очереди и будем получать аналог равенства. В частности,

$$a_{ir} = b_1 a_{1r} + \ldots + b_r a_{rr}.$$

След., вся i-я строка матрицы A является линейной комбинацией её первых r строк (базисных) с коэф-ми $b_1, \dots, b_r$.

ч.т.д.

Следствия из теоремы о базисном миноре.

1) Квадратная матрица явл. невырожденной (т.е. $\det A \neq 0$) $\Leftrightarrow$ её строки (столбцы) явл. лин. независ.

<u>Зам.</u> ($\Rightarrow$) сразу ~~следует~~ из т-мы о баз. миноре

2) $\mathrm{rg} A$ равен максимальному кол-ву её линейно независ. строк (столбцов).

3) Макс. кол-во линейно независ. строк матрицы = = макс. кол-ву её линейно независ. столбцов.

<u>Теорема</u> Линейно независимые строки (столбцы) матрицы, кол-во которых равно рангу матрицы, являются базисными.

Способы вычисления ранга матрицы и нахождения её какого-нибудь баз. минора

I сп. Метод окаймляющих миноров

1) Найти минор k-го порядка, который $\neq 0$.

↓

Можно ли составить окаймляющий минор $(k+1)$-го порядка?

Нет → $rg A = k$

Да → Вычислить окаймляющие миноры $(k+1)$-го порядка. Среди них есть хотя бы один $\neq 0$?

Нет → $rg A = k$

Да → $k := k+1$

2) Базисный минор — тот, который $\neq 0$ и имеет макс. порядок.

Т.е. если для некоторого ненулевого минора <u>все</u> окаймляющие его миноры $=0$, то он явл. <u>базисным</u>

II сп. Метод элементарных преобразований срок
(аналог. для столбцов)

1) Привести матрицу A к ступенчатому виду A′ с помощью элемент. преобразований срок. (при этом $rg A = rg A'$, т.е. ранг не изменится).

2) Найти ранг ступенчатой матрицы A′, он равен количеству ненулевых строк.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{14} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{41} & \dots & a_{44} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{срок}]{\text{элем. преобр.}} A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & a'_{14} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ 0 & 0 & 0 & a'_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$rg A' = 3 \Rightarrow rg A = 3.$$

Сканировано с CamScanner

Базисные миноры для A и для A' будут расположены в одинаковых столбцах:

$$M^{j_1 \dots j_k}_{i_1 \dots i_k} \text{ для } A \text{ и } (M')^{j_1 \dots j_k}_{i'_1 \dots i'_k} \text{ для } A'.$$

Но базисные миноры для A и для A' могут быть расположены в разных строках.

Для матрицы A' строками $i'_1, \dots, i'_k$ минора M' явл. ненулевые строки ступенчатой матрицы A'.

Для матрицы A строки $i_1, \dots, i_k$ минора M надо найти. Это можно сделать, например, перебрав все миноры пор. k, расположенные в столбцах $j_1 \dots j_k$. Любой ненулевой минор из них явл. базисным.

Значения базисных миноров матриц A и A' тоже могут быть разными:

$$M_{i_1\ldots i_k}^{j_1\ldots j_k} \neq (M')_{i_1\ldots i_k}^{j_1\ldots j_k}.$$

Продолжение примера.

Для ступенчатой матрицы A' базисным минором явл. $M_{123}^{124} \Rightarrow$
$\Rightarrow$ для матрицы A базисным минором явл. $M_{i_1 i_2 i_3}^{124}$.

Вычислим $M_{123}^{124}, M_{124}^{124}, M_{134}^{124}, M_{234}^{124}$. Любой из них, который $\neq 0$, явл. базисным.