Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и их различные формы записи.

Опр. Системой лин. алгебр. уравнений наз. система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \text{ где } a_{ij}; b_i, x_i \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Числа a_{ij} наз. коэффициентами системы, числа b_i наз. свободными членами.

Формы записи СЛАУ.

1) координатная : это (1) ;

② векторная:

$$x_1\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix}+\ldots+x_n\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$$ подробно,

$$x_1\vec{a}_1+x_2\vec{a}_2+\ldots+x_n\vec{a}_n=\vec{b}$$ кратко;

③ матричная:

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\ldots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\ldots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\ldots&a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$$ подробно,

$$AX=B \quad (\text{или } A\vec{x}=\vec{b})$$ кратко.

Замечание. В учебниках пишут: $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$. жирным шрифтом

Опр. СЛАУ наз.

совместной | **несовместной**

если она

имеет | не имеет

решение.

Совместная СЛАУ наз.

определённой | **неопределённой**

если она имеет

единственное | неединственное

решение.

СЛАУ наз.

однородной | **неоднородной**

если

все b_i равны 0. | хотя бы один из b_i не равен 0.

Зам. Однородная СЛАУ всегда совместна, т.к. $x_1=0, \dots, x_n=0$ явл. её решением.

Когда совместна произвольная СЛАУ?

Опр **Матрицей** | **Расширенной матрицей** СЛАУ наз. матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Теорема (**Критерий Кронекера-Капелли совместности СЛАУ**)

Система $AX=B$ совместна $\Longleftrightarrow$ ранг расширенной матрицы = рангу матрицы, т.е. $rg(A|B) = rg A$.

Доказательство критерия Кронекера-Капелли

($\Rightarrow$). Пусть система $AX=B$ совместна.
Докажем, что $rg(A|B) = rg A$.

1) Столбцы матрицы A явл. столбцами матрицы $(A|B)$
$\Rightarrow rg A \le rg(A|B)$

2) Док-м, что $rg A \geq rg(A|B)$.
Т.к. система $AX=B$ совместна, то $\exists$ её решение $x_1, \dots, x_n$:

$$x_1 \vec{a}_1 + \dots + x_n \vec{a}_n = \vec{b}.$$

Пусть $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ – базисные столбцы в матрице A $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ по теореме о базисном миноре столбцы $\vec{a}_{k+1}, \dots, \vec{a}_n$ выражаются через столбцы $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ столбец $\vec{b}$ выражается через $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ – базисные столбцы в матрице $(A|B)$.
Это озн., что число баз. столбцов в матрице $(A|B)$ не может быть больше числа баз. столбцов в матрице $A \Rightarrow rg(A|B) \le rg A$.

Из 1), 2) $\Rightarrow rg(A|B) = rg A$.

($\Leftarrow$). Пусть $rg(A|B) = rg A$.
Док-м, что система $AX=B$ совместна.

Пусть M – базисный минор в A ($M \neq 0$ и макс. порядка) $\Rightarrow$ M будет базисным минором в $(A|B)$.
Пусть M расположен в столбцах $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k$ в A $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k$ будут базисными столбцами и в A, и в $A|B$.

Выразим через них столбец $\vec{b}$ (это можно сделать по теореме о базисном миноре):

$$x^0 \vec{a}_1 + \ldots + x_k^0 \vec{a}_k = \vec{b} \quad (\text{с какими-то } x_1^0, \ldots, x_k^0).$$

Дополним это равенство:

$$x_1^0 \vec{a}_1 + \ldots + x_k^0 \vec{a}_k + 0\vec{a}_{k+1} + \ldots + 0\vec{a}_n = \vec{b}.$$

Эта запись явл. векторной записью СЛАУ $AX=B$; она означает, что

$$x_1 = x_1^0, \ldots, x_k = x_k^0, x_{k+1} = 0, \ldots, x_n = 0$$

явл. решением СЛАУ $AX=B$, т.е. система совместна.

ч.т.д.

Формулы Крамера.

Теорема СЛАУ $AX=B$, где A – квадратная и $\det A \neq 0$, имеет единственное решение, причём

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \ldots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \text{ где } \Delta = \det A,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n-1} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn-1} & b_n \end{vmatrix}.$$

Доказательство. 1) СЛАУ $AX=B$, где $A-(n\times n)$, $X-(n\times 1)$, $B-(n\times 1)$, явл. частным случаем матричного ур-я. По усл. $\det A \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} \Rightarrow$ решение матричного ур-я однозначно находится: $X = A^{-1}B$.

2) Распишем нахождение решения X более подробно:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^{*}=\frac{1}{\Delta}(A_{ji})$$, где A^{*} – присоединённая матрица.

$$X=A^{-1}B \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11}b_1+A_{21}b_2+\dots+A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1+A_{22}b_2+\dots+A_{n2}b_n \\ \vdots \\ A_{1n}b_1+A_{2n}b_2+\dots+A_{nn}b_n \end{pmatrix}.$$

След.,

$$x_1=\frac{b_1A_{11}+b_2A_{21}+\dots+b_nA_{n1}}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{\Delta_1}{\Delta}$$

$$x_2=\frac{b_1A_{12}+b_2A_{22}+\dots+b_nA_{n2}}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{\Delta_2}{\Delta}$$

и т.д. $x_n=\dfrac{\Delta_n}{\Delta}$.

ч.т.д.

Следствие из формул Крамера:

СЛАУ $AX = \Theta$, где A квадратная и $\det A \neq 0$, имеет единственное решение $X = \Theta$, т.е. $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

Доказательство.

По теореме о формулах Крамера система имеет единственное решение. Найдём его. Определители Δ_i имеют нулевые столбцы i-е $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ все $\Delta_i = 0$ $\Rightarrow$ $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} = \frac{0}{\Delta} = 0$.

ч.т.д.

Далее мы рассмотрим СЛАУ с любыми (не обязательно квадратными) матрицами A. Мы будем рас. такие СЛАУ с нулевыми и ненулевыми своб. членами $b_1, \ldots, b_n$.

Однородные СЛАУ.

Опр. Однородными СЛАУ наз. такие СЛАУ, у которых все свободные члены равны нулю.

В матричном виде: $AX = \Theta$ или $\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$

Однородная СЛАУ всегда совместна, т.к. $rg(A|\Theta) = rg A$.
Действительно, она всегда имеет нулевое решение: $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$

Имеет ли однородная СЛАУ другие ненулевые решения? Какие для этого должны выполняться условия? Как устроено множество всех решений однородной СЛАУ, если решение не единственное (т.е. не только нулевое)?

Теорема о свойствах решений однородной СЛАУ

Если $X^{(1)}, \ldots, X^{(s)}$ — решения однородной СЛАУ, то любая их линейная комбинация $X = \lambda_1 X^{(1)} + \ldots + \lambda_s X^{(s)}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, тоже явл. решением.

Доказательство т-мы о свойствах решений однор. СЛАУ (не входит в РК).

Т.к. $X^{(1)},\dots,X^{(s)}$ – решения системы $AX=\Theta$, то $AX^{(1)}=\Theta,\dots,AX^{(s)}=\Theta$.

Рас. линейную комбинацию этих решений:

$$X=\lambda_1X^{(1)}+\dots+\lambda_sX^{(s)}$$

Подставим в систему $AX=\Theta$ (исп. св-ва умнож. матриц)

$$A(\lambda_1X^{(1)}+\dots+\lambda_sX^{(s)})=\Theta$$

$$A(\lambda_1X^{(1)})+\dots+A(\lambda_sX^{(s)})=\Theta$$

$$\lambda_1(AX^{(1)})+\dots+\lambda_s(AX^{(s)})=\Theta$$

$$\lambda_1\cdot\Theta+\dots+\lambda_s\cdot\Theta=\Theta$$

$$\Theta+\dots+\Theta=\Theta \quad \text{верно}$$

Исп. св-во: $A(\alpha B)=(\alpha A)B=\alpha(AB)$, где $\alpha\in\mathbb{R}$.

След., $X=\lambda_1X^{(1)}+\dots+\lambda_sX^{(s)}$ явл. решением однор. системы.

Ч.т.д.

Следствие. Если однородная СЛАУ имеет ненулевое решение X, то она имеет бесконечно много решений λX, $\lambda\in\mathbb{R}$.