Фундаментальная система решений однородной СЛАУ

Опр. Пусть дана однородная СЛАУ $AX=\Theta$ с n неизвестными $x_1, \ldots, x_n$, и пусть $\operatorname{rg} A = r$.
Фундаментальной системой решений (ФСР) однородной СЛАУ $AX=\Theta$ наз. любой набор из $k=n-r$ линейно независимых столбцов $X^{(1)}, \ldots, X^{(k)}$, являющихся решениями этой системы.

Теорема о существовании ФСР однородной СЛАУ.

Пусть дана однородная СЛАУ $AX=\Theta$ с n неизвестными $x_1, \ldots, x_n$, и пусть $\operatorname{rg} A = r < n$.
Тогда для неё $\exists$ ФСР (т.е. $\exists$ набор из $k=n-r$ линейно независимых решений $X^{(1)}, \ldots, X^{(k)}$ этой СЛАУ)

<u>Опр.</u> Пусть в матрице A найден базисный минор M. Столбцы матрицы A, в которых расположен M, наз. <u>базисными столбцами</u>.

Неизвестные x_i, соответствующие базисным столбцам, наз. <u>базисными неизвестными</u> (или <u>зависимыми неизвестными</u>);

остальные неизвестные x_i наз. <u>свободными неизвестными</u> (или <u>независимыми неизвестными</u>).

<u>Пример.</u> Рас. однородную СЛАУ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{14}x = 0 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{24}x = 0 \\ a_{31}x_1 + \ldots + a_{34}x = 0 \end{cases}$$

В матричном виде:

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1) Пусть M_{12}^{12} – базисный минор $\Rightarrow$ 1-й и 2-й столбцы базисные $\Rightarrow$
$\Rightarrow x_1, x_2$ – базисные (завис.) неизвестные,
x_3, x_4 – свободные (независ.) неизвестные

Ниже мы покажем, что x_1, x_2 можно выразить через x_3, x_4.

Сканировано с CamScanner

2) Пусть в системе

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & \; x_2 & \; x_3 & \; x_4 \end{matrix} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}}_{A} \end{array} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

матрица A имеет базисный минор ^{A} $M_{13}^{24} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ 2-й и 4-й столбцы базисные $\Rightarrow$

$\Rightarrow x_2 \;\; x_4$ – базисные (завис.) неизвестные,

x_1, x_3 – свободные (независ.) неизвестные.

Ниже мы покажем, что x_2, x_4 можно выразить через x_1, x_3.

3) M_{123}^{134} – базисный минор $\Rightarrow$

$\Rightarrow x_1, x_3, x_4$ – базисные (завис.) неизвестные,

x_2 – свободная (независ.) неизвестная.

Ниже мы покажем, что x_2 можно выразить через x_1, x_3, x_4.

Зачем нужны ФСР?

Теорема о структуре общего решения однородной СЛАУ.

Пусть $X^{(1)}, \ldots, X^{(k)}$ – любая ФСР однородной СЛАУ $AX = \Theta$.

Тогда любое решение X этой системы можно представить как линейную комбинацию ФСР:

$$\boxed{X = c_1 X^{(1)} + \ldots + c_k X^{(k)}}, \text{ где } c_i \in \mathbb{R}.$$

Док-во т-мы о $\exists$ ФСР однородной СЛАУ

(1) Построение ФСР

1) Дана система $AX=\Theta$ с n неизв. $x_1,\dots,x_n$, и $\operatorname{rg}A=r<n$.
Можно считать, что баз. минором порядка r явл. $M_{1\dots r}^{1\dots r}$

$\Downarrow$ по т. о баз. миноре

строки $(r+1)$-я, ..., n-я матрицы A явл. лин. комб. базисных строк 1-й, ..., r-й $\Rightarrow$ уравнения $(r+1)$-е, ..., n-е можно отбросить.

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\dots+a_{1r}x_r+a_{1r+1}x_{r+1}+\dots+a_{1n}x_n=0 \\ \vdots \\ a_{r1}x_1+\dots+a_{rr}x_r+a_{rr+1}x_{r+1}+\dots+a_{rn}x_n=0 \end{cases}$$

2) Переменные $x_1,\dots,x_r$ базисные, $x_{r+1},\dots,x_n$ – свободные.
Выразим базисные через свободные:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\dots+a_{1r}x_r=-a_{1r+1}x_{r+1}-\dots-a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{r1}x_1+\dots+a_{rr}x_r=-a_{rr+1}x_{r+1}-\dots-a_{rn}x_n \end{cases}$$

$\forall$ набора $x_{r+1},\dots,x_n$ получим СЛАУ из r уравнений с r неизв. $x_1,\dots,x_r$, $\det$ системы $=M_{1\dots r}^{1\dots r}\neq 0\Rightarrow$

$\Rightarrow$ по теореме Крамера эта система имеет единственное решение.

Сканировано с CamScanner

3) Будем придавать своб. переменным разл. значения:

$x_{r+1}=1,\ x_{r+2}=0,\ \dots,\ x_n=0;$

$x_{r+1}=0,\ x_{r+2}=1,\ \dots,\ x_n=0;$

$\vdots$

$x_{r+1}=0,\ x_{r+2}=0,\ \dots,\ x_n=1.$

Для каждого набора значений своб. перем. найдем базисные, получим решения системы:

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ \vdots \\ x_r^{(1)} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ \vdots \\ x_r^{(2)} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ \vdots \\ x_r^{(k)} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$ Обозначим их $X^{(1)}, \dots, X^{(k)}$, где $k=n-r$.

(2) Док., что мы построили именно ФСР.

$X^{(1)}, \dots, X^{(k)}$ — решения (по построению), их $k=n-r$.

Осталось док., что $X^{(1)}, \dots, X^{(k)}$ лин. независимы.

Рас. лин. комбинацию $\alpha_1 X^{(1)} + \dots + \alpha_k X^{(k)} = \Theta$. Из последних строк имеем: из $(r+1)$-й строки: $\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 0 + \dots + \alpha_k \cdot 0 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$

из $(r+2)$-й строки: $\alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 1 + \dots + \alpha_k \cdot 0 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0$

из n-й строки: $\alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \dots + \alpha_k \cdot 1 = 0 \Rightarrow \alpha_k = 0$

След., $X^{(1)}, \dots, X^{(k)}$ лин. независимы. Мы постр. ФСР. ч.т.д.

Замечание. ФСР, построенная в док-ве теоремы, наз. **нормальной**.

Док-во теоремы о структуре общего решения однор СЛАУ в частном случае – для нормальных ФСР.

Пусть $X^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ \vdots \\ x_r^{(1)} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, X^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ \vdots \\ x_r^{(k)} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ – норм. ФСР системы $AX = \Theta$, где $k = n - r$, $r = rg\,A$.

Пусть $X = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \\ y_{r+1} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ – любое решение системы, $y_1, \dots, y_r$ – базисные неизвестные, $y_{r+1}, \dots, y_n$ – свободные (их $k = n - r$ штук).

Рас. $Y = y_{r+1} X^{(1)} + \dots + y_n X^{(k)} =$

$$= \begin{pmatrix} y_{r+1} x_1^{(1)} + \dots + y_n x_1^{(k)} \\ \vdots \\ y_{r+1} x_r^{(1)} + \dots + y_n x_r^{(k)} \\ y_{r+1} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Тогда 1) Y – решение системы как лин. комбинация её решений,

2) Y и X имеют одинаковые наборы свободных неизвестных ⟹ имеют одинак. наборы базисных (базисные вычисляются по свободным однозначно для столбцов, которые явл. решениями системы).

След., X = Y, т.е. X явл. лин. комб. норм. ФСР.

Ч.т.д.

Критерий $\exists$-я ненулевого решения однородной СЛАУ

Однородная СЛАУ $AX=\Theta$ имеет ненулевое решение $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rg} A < n$.

Док-во.

($\Leftarrow$) Следует из т-мы о существовании ФСР однор. СЛАУ

($\Rightarrow$) Пусть от противного $\operatorname{rg} A = n \Rightarrow A$ - квадратная и $\det A \neq 0 \Rightarrow$ по сл. из т-мы Крамера решение системы $\exists$ и только нулевое. Противоречие. След., $\operatorname{rg} A < n$.

ч.т.д.

Сл. 1. Однородная СЛАУ $AX=\Theta$ с прямоугольной матрицей A типа $m \times n$, $m<n$, всегда имеет ненулевое решение.

Сл. 2 Критерий $\exists$-я ненулевого решения однор. СЛАУ с квадратной матрицей.

Однородная СЛАУ $AX=\Theta$ с квадратной матрицей A имеет ненулевое решение $\Leftrightarrow \det A = 0$.

Док-во. Для квадр. матрицы A $\operatorname{rg} A < n \Leftrightarrow \det A = 0$.

Док-во теоремы о структуре общего решения однор. СЛАУ в общем случае.

Рас. матрицу B, состоящую из столбцов X и $X^{(1)}, \ldots, X^{(k)}$:

$$B = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc} x_1 & x_1^{(1)} & \cdots & x_1^{(k)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_r & x_r^{(1)} & \cdots & x_r^{(k)} \\ x_{r+1} & x_{r+1}^{(1)} & \cdots & x_{r+1}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & x_n^{(1)} & \cdots & x_n^{(k)} \end{array} \right) \begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{баз. неизв.} \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{своб. неизв.} \end{array} \\ \begin{array}{cccc} X & X^{(1)} & \quad & X^{(k)} \end{array} \end{array}$$

Напомним, что в системе $AX = \Theta$ $\mathrm{rg}\, A = r$,
$x_1, \ldots, x_r$ – баз. неизв.
$x_{r+1}, \ldots, x_n$ – свободные

Докажем, что $\mathrm{rg}\, B = k$.

Тогда, т.к. столбцы $X^{(1)}, \ldots, X^{(k)}$ по опр. ФСР лин. независ. и их k штук, по следствию 2 из т-мы о базисном миноре (rg матр. равен макс. кол-ву её лин. независ. столбцов (строк)) столбцы $X^{(1)}, \ldots, X^{(k)}$ явл. базисными. След., по п. 2 т-мы о базисном миноре столбец X явл. их лин. комбинацией.

1) $\operatorname{rg} B \geq k$, т.к. по сл. 2 из т-мы о базисном миноре $\operatorname{rg} B$ равен макс. кол-ву лин. независ. столбцов (строк) матрицы,
а мы знаем, что столбцов матрицы B лин. независимы

2) Док, что $\operatorname{rg} B \leq k$.
Для этого с помощью элем. преобразований получим из B матрицу B' вида

$$B \sim B' = \begin{array}{c} \left(\begin{matrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & \cdots & * \end{matrix}\right) \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\ \vdots \\ 0\end{matrix}}\right\} r \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}*\\ \vdots \\ *\end{matrix}}\right\} n-r=k \end{matrix} \end{array} \Rightarrow \operatorname{rg} B = \operatorname{rg} B' \leq k$$

Как получить матрицу B'?
Базисные неизвестные (первые r штук) однозначно выражаются через свободные (последние $n-r=k$ штук).
След., в матрице B вся 1-я строка явл. лин. комб. последних k строк. Вычтем из 1й строки лин. комб. к последних. Получим нулевую строку.

Аналогично, в матрице B вся 2-я строка явл. лин. комб. последних k строк. Вычтем из 2й строки лин. комб. k последних. Получим нулевую строку.

И т.д. по r-й строки матрицы B.

Получим матрицу B'.

Зам. Мы считаем, что в системе $AX = \Theta$ неизвестные $x_1, \dots, x_r$ базисные, а неизвестные $x_{r+1}, \dots, x_n$ свободные.

Из 1), 2) $\Rightarrow$ $\operatorname{rg} B = k$.

Ч.т.д.

Решение однородной системы $AX=\Theta$ методом Гаусса и нахождение её ФСР

① Выпишем матрицу A из коэф-в системы и приведём её к ступенчатому виду A'.

1) Найдём $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A' = r$; сравним с числом неизвестных n.
Если $r=n$, то решение только $x_1=0, \ldots, x_n=0$.
Если $r<n$, то ищем другие решения, кроме нулевого.

2) Выберем базисный минор в A' $\Rightarrow$
Выберем базисные (их r штук) и свободные (их $k=n-r$) неизв.

3) Кол-во ФСР: их $k=n-r$ штук

② Выпишем эквивалентную систему с матрицей A'

1) Выразим базисные неизвестные через свободные.

2) Переобозначим своб. неизвестные через c_i, $c_i \in \mathbb{R}$.
и выпишем общее решение в коорд. виде.

I сп. 3) Выпишем общее решение в вект. виде: $X=E_1c_1+\ldots+E_kc_k$, $c_i \in \mathbb{R}$

4) Выпишем ФСР.

II сп. 3) Подст. в коорд. решение $c_1=1, c_2=\ldots=c_k=0$. Получим E_1,
$c_1=0, c_2=1, c_3=\ldots=c_k=0$. Получим E_2 и т.д.
Выпишем ФСР

4) Выпишем общее решение в вект. виде $X=E_1c_1+\ldots+E_kc_k$, $c_i \in \mathbb{R}$.