Неоднородные СЛАУ

Опр. Неоднородными СЛАУ наз. такие СЛАУ, у которых не все свободные члены равны нулю.

В матричном виде кратко: $AX=B$, где $B\neq\Theta$

С каждой неоднородной СЛАУ $AX=B$ связана однородная СЛАУ $AX=\Theta$ с той же матрицей A.

Однородная СЛАУ всегда совместна,	Неоднородная СЛАУ не всегда совместна,
т.к. условие $rg(A\|B)=rg A$	
всегда вып.	не всегда вып.

Рас. совместные неоднородные СЛАУ.

Теорема о связи решений неоднородной и соответствующей однородной СЛАУ.

Пусть X^0 – некоторое решение неоднородной СЛАУ $AX=B$.

Тогда

X – решение этой же СЛАУ $AX=B \iff$

$\iff X = X^0 + Y$, где Y – некоторое решение соответствующей однородной СЛАУ $AX=\Theta$.

Док-во.

$(\Rightarrow)$. Пусть X, X^0 – решения неоднородной СЛАУ $AX=B$.

Рас. $Y = X - X^0$ и найдём AY:

$AY = A(X-X^0) = AX - AX^0 = B - B = \Theta$. След., Y – решение однородной СЛАУ $AX=\Theta$, и $X = X^0 + Y$.

($\Leftarrow$) Пусть X^0 - решение неоднородной СЛАУ $AX=B$ ($AX^0=B$), а Y - решение однородной СЛАУ $AX=\Theta$ (т.е. $AY=\Theta$).

Рас. $X=X^0+Y$ и найдём AX:

$AX=A(X^0+Y)=AX^0+AY=B+\Theta=B$. След., X-решение неоднородной СЛАУ $AX=B$.

ч.т.д.

Пред. теорема – о связи частных решений соответствующих неоднородной и однородной систем.

След. теорема – о связи множеств всех решений соответствующих неоднородной и однородной систем.

Теорема о структуре общего решения неоднородной СЛАУ.

Пусть X^0 – некоторое решение неоднородной СЛАУ $AX=B$,

$X^{(1)}, \dots, X^{(k)}$ – ФСР соответствующей однородной СЛАУ $AX=\Theta$.

Тогда любое решение X неоднородной СЛАУ $AX=B$ можно представить в виде:

$$X = X^0 + c_1 X^{(1)} + \dots + c_k X^{(k)},$$

где $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$.

Док-во.

Пусть X^0 - некоторое решение неоднородной СЛАУ $AX=B$, X - любое решение той же системы.

Тогда по т-ме о связи решений неоднор. и соотв. однородной СЛАУ $AX=\Theta$

$$X = X^0 + Y,$$

где Y - некоторое решение соотв. однор. СЛАУ.

По теореме о структуре общего решения однородной СЛАУ

$$Y = c_1 X^{(1)} + \ldots + c_k X^{(k)},$$ где $X^{(1)}, \ldots, X^{(k)}$ - ФСР однородной СЛАУ, $c_i \in \mathbb{R}$.

След., $X = X^0 + c_1 X^{(1)} + \ldots + c_k X^{(k)}$.

Ч.т.д.

Обсуждение (геом. интерпретация):

Однородные СЛАУ $AX=\Theta$ | **Неоднородные СЛАУ $AX=B$**

① Рас. $k=1$, где $k=n-r$.
Пусть $n=3$, $r=2$.

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z=-D_1 \\ A_2x+B_2y+C_2z=-D_2 \end{cases}$$

и (A_1,B_1,C_1) не пропорц. (A_2,B_2,C_2).

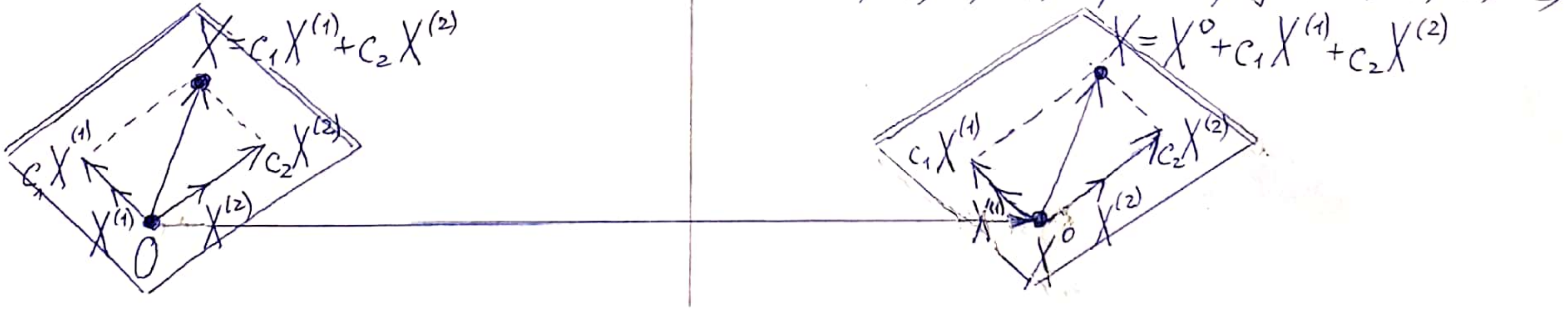
② Рас. $k=2$, где $k=n-r$.
Пусть $n=3$, $r=1$.

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z=0 \end{cases}$$

и (A_1,B_1,C_1) пропорц. (A_2,B_2,C_2)

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z=-D_1 \\ A_2x+B_2y+C_2z=-D_2 \end{cases}$$

и (A_1,B_1,C_1,D_1) пропорц. (A_2,B_2,C_2,D_2)



Решение неоднородной системы $AX=B$ методом Гаусса

① Выпишем матрицу $(A|B)$ из коэф-в системы и приведём её к ступенчатому виду $(A'|B')$

1) Найдём $rg(A|B)=rg(A'|B')$ и $rg\,A=rg\,A'$, сравним их.

Если $rg(A|B)\neq rg\,A$, то система не имеет решений.

Если $rg(A|B)=\underset{r}{\underset{\parallel\text{ обозн.}}{rg\,A}}$, то система имеет решения. Найдём их.

Сравним r с числом неизвестных n.

Если $r=n$, то решение единственное

Если $r<n$, то решений бесконечно много.

2) Выберем базисный минор в A' $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ выберем базисные (их r штук) и свободные (их $k=n-r$ штук) неизвестные.

3) Кол-во ФСР соответствующей однородной системы $AX=\Theta$ равно $k=n-r$.

Приведём $(A'|B')$ к такому ступенчатому виду $(A''|B'')$, чтобы в уголках ступенек стояли 1, а над ними – 0.

2 Выпишем эквивалентную систему с матрицей A'':

$$A''X = B''.$$

1) Выразим базисные неизвестные через свободные
2) Переобозначим свободные неизвестные через c_i, $c_i \in \mathbb{R}$, и выпишем общее решение в координатном виде
3) Выпишем общее решение в векторном виде:

$$X = B'' + X^{(1)}c_1 + \dots + X^{(k)}c_k, \quad c_i \in \mathbb{R}$$

это X^0 – частное решение неоднор. системы

это ФСР однородн. системы (в задачнике они обозначены через $E_1, \dots, E_k$).

Пояснение: почему B'' явл. частным решением неоднородной СЛАУ $AX=B$.

$(A|B) \sim (A'|B') \sim (A''|B'')$, где A'' – такая ступенчатая матрица, что в уголках ступенек стоят 1, а над ними 0.

A' – ступенчатая

Выпишем экв. систему с матрицей A'':

$$\begin{array}{c} r\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right. \\ k\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right. \end{array}
\left(\begin{array}{ccccc|ccc}
1 & 0 & \dots & 0 & 0 & * & \dots & * \\
0 & 1 & \dots & 0 & 0 & * & \dots & * \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 1 & 0 & * & \dots & * \\
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * \\
\hline
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & & & & & & & \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0
\end{array}\right)
\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{r-1} \\ x_r \\ \hline x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X}
=
\underbrace{\begin{pmatrix} b''_1 \\ b''_2 \\ \vdots \\ b''_{r-1} \\ b''_r \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{B''}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{r}\ \underbrace{\qquad\qquad}_{k}$$

Подставив в систему столбец B'' вместо столбца X, получим верн. е равенство. След., B'' – решение системы $A''X=B''$.