Комплексные числа, их различные формы записи. Действия с комплексными числами.

Опр. Комплексным числом наз. выражение

$$\boxed{z = x + iy}, \text{ где} \qquad (1)$$

$x, y \in \mathbb{R}$, i – мнимая единица (определяемая равенством $i^2 = -1$)

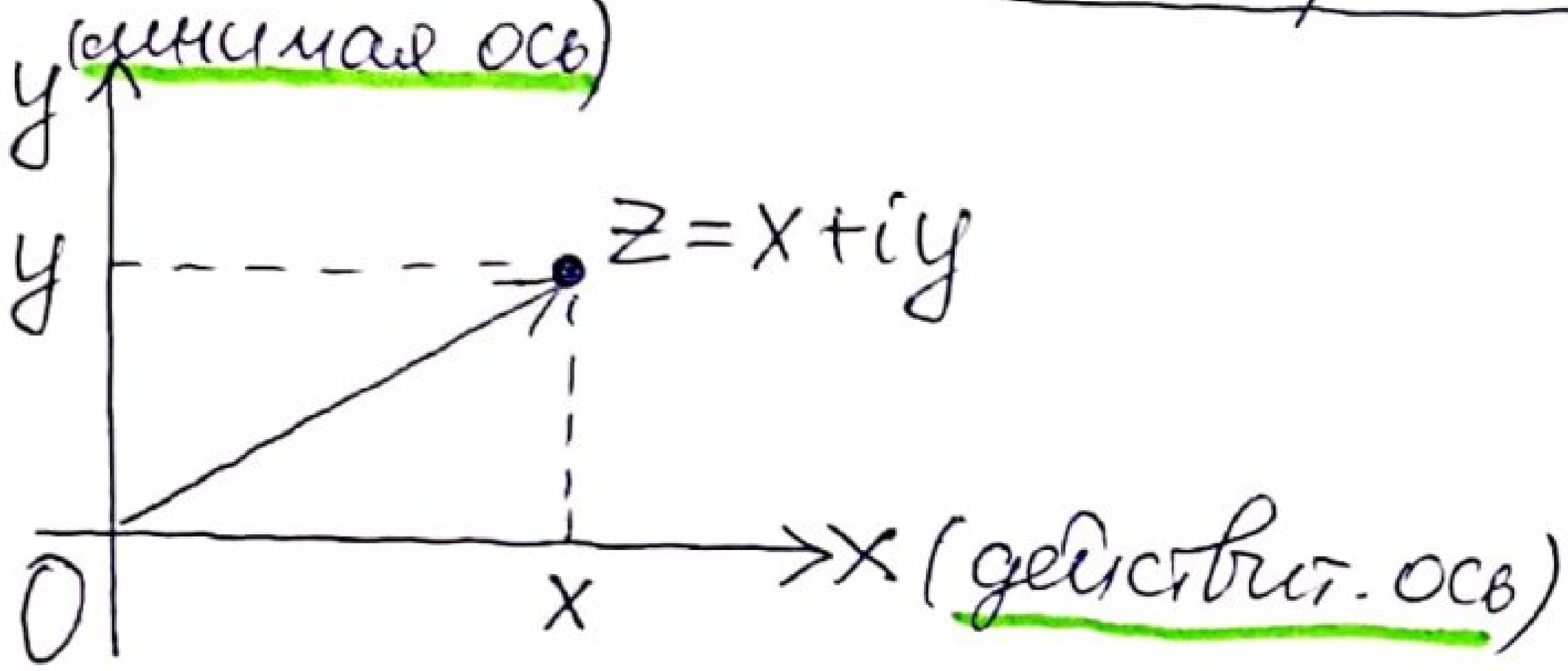
Число x наз. действительной частью числа z.

Число y наз. мнимой частью числа z.

Обозн. $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$.

Поэтому $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$.

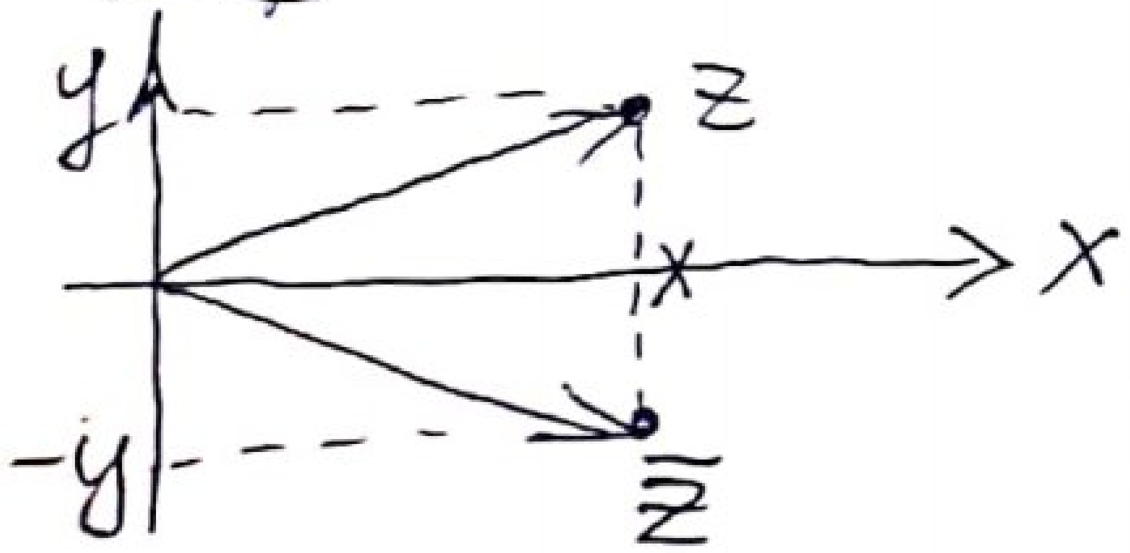
Геометрически компл. числа изображают точками плоскости или векторами (из начала коорд-т):



$z=x+iy \Longleftrightarrow$ точка (x,y) плоскости

Действит. числа явл. частным случаем комплексных чисел $z=x+iy$ при $y=0$.

Опр Числа $z=x+iy$ и $\bar{z}=x-iy$ наз. сопряженными

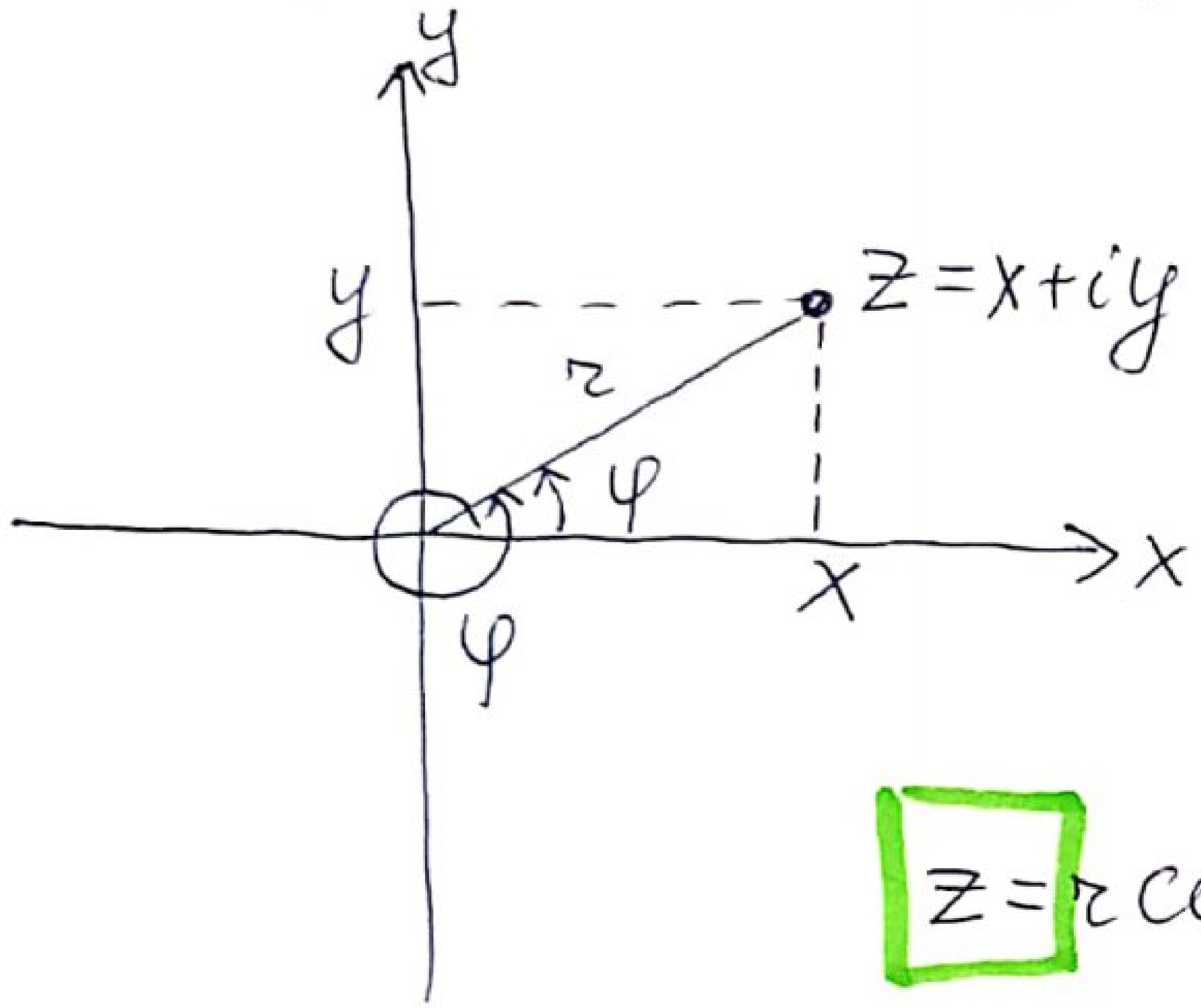


Опр Числа $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2$ наз. равными $\Leftrightarrow x_1=x_2,\ y_1=y_2$.

Опр. Число $z=x+iy=0 \Leftrightarrow x=0, y=0$. Также пишут $0+i0$.

Сканировано с CamScanner

Пусть на пл. заданы прямоугольные (x,y) и полярные (r,φ) координаты.



Тогда $z=x+iy \leftrightarrow (r,\varphi)$,

где $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$.

След., можно записать

$$\boxed{z=} r\cos\varphi + i r\sin\varphi = \boxed{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} \quad (2)$$

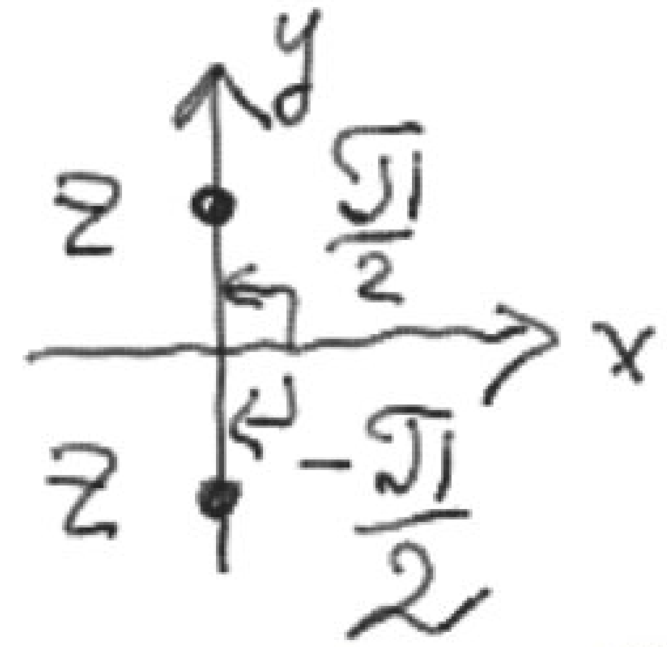
Опр Модулем комплексного числа $z=x+iy$ наз. число $r=\sqrt{x^2+y^2}$. Обозн. $|z|$.

Аргументом комплексного числа $z=x+iy\neq 0$ наз угол между положит. направлением оси Ox и радиус-вектором точки (x,y). Угол считается $+$ $(-)$, если отсчёт ведётся по (против) час. стрелке (стрелки).

Аргумент определён неоднозначно: это мн-во углов, отлич. на $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Обозн. $\operatorname{Arg} z$.

Главным значением аргумента наз. угол $\in(-\pi;\pi]$ (или $\in[0;2\pi)$). Обозн. $\arg z$.

След., $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.



Для $z = x+iy$, где $x>0$

$\arg z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$

Для $z = iy$

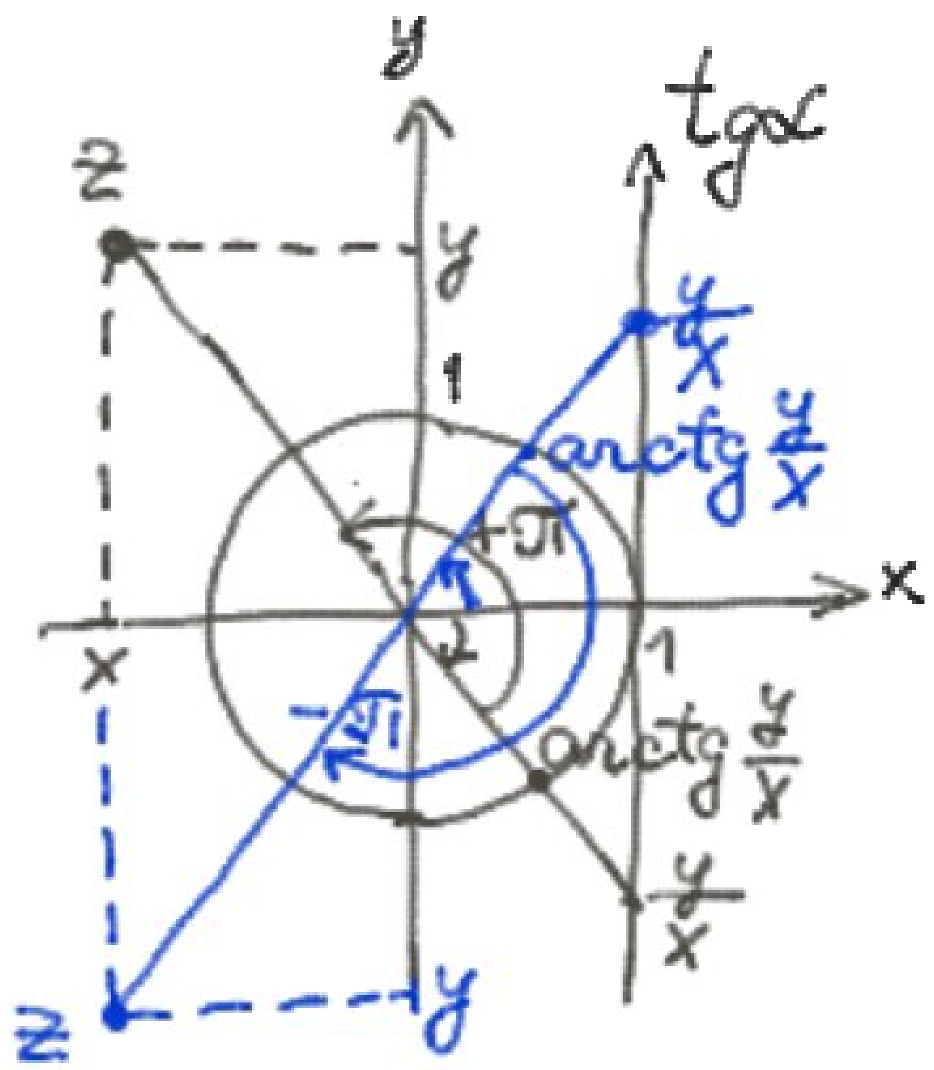
$\arg z = \frac{\pi}{2}$ или $-\frac{\pi}{2}$ (или $\frac{3\pi}{2}$)

Для $z=0$

$\arg z$ не определён.

Для $z = x+iy$, где $x<0$

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \pi & \text{при } y \geq 0 \\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \pi & \text{при } y<0 \end{cases}$$

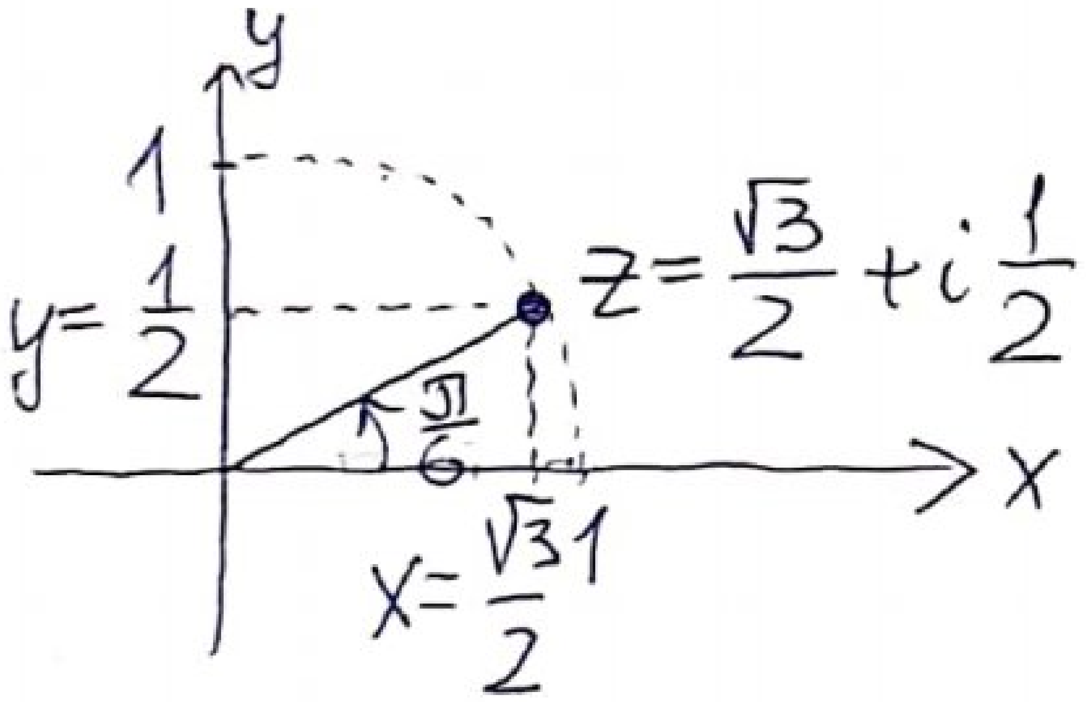


Опр. Определим $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ (формула Эйлера)

Тогда $\boxed{z} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \boxed{= re^{i\varphi}}$ (3)

Опр. Записи (1), (2), (3) наз. алгебраической, тригонометрической, показательной (экспоненциальной) формами записи комплексного числа соотв-но.

Пр.



$z = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} = 1\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{6}}$

Сл. из формулы Эйлера $\cos\varphi = \dfrac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}$, $\sin\varphi = \dfrac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}$.

Сканировано с CamScanner

Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$.

Опр.

Суммой	Произведением
z_1 и z_2 наз. число	
$z = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$	$z = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$ (4)
Разностью	**Частным**
z_1 и z_2 наз. число z:	
$z + z_2 = z_1$	$z \cdot z_2 = z_1$

Можно показать, что

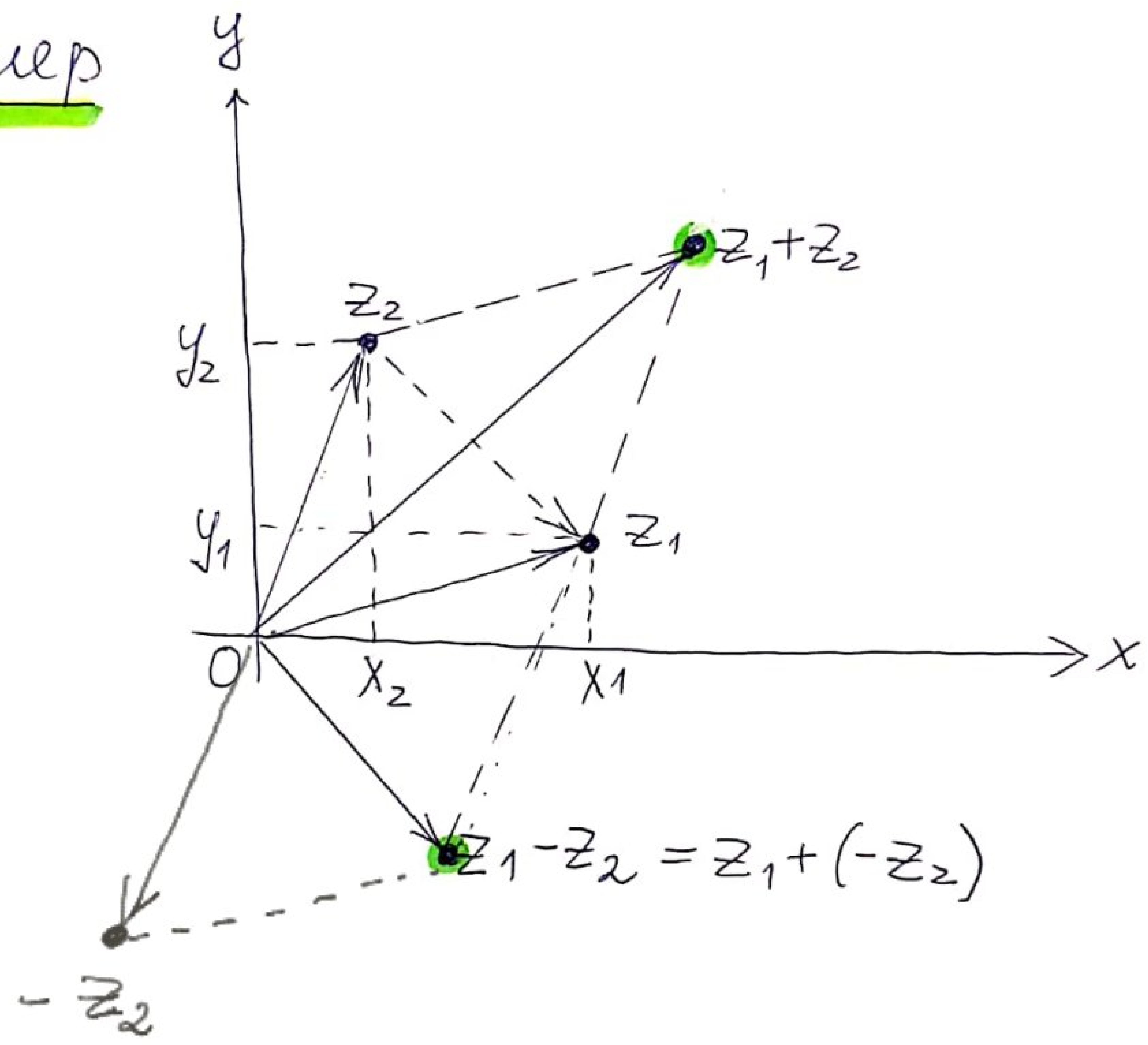
$z = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$	$z = \dfrac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \dfrac{-x_1 y_2 + x_2 y_1}{x_2^2 + y_2^2}$ (5)

Формулы (4) и (5) практически выводят так:

(4): $z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + i x_1 y_2 + i y_1 x_2 + i^2 y_1 y_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$

(5): $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \dfrac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \dfrac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(-x_1 y_2 + x_2 y_1)}{x_2^2 + y_2^2} = \dfrac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_1^2 + y_2^2} + i \dfrac{-x_1 y_2 + x_2 y_1}{x_2^2 + y_2^2}$

Пример сложения и вычитания.

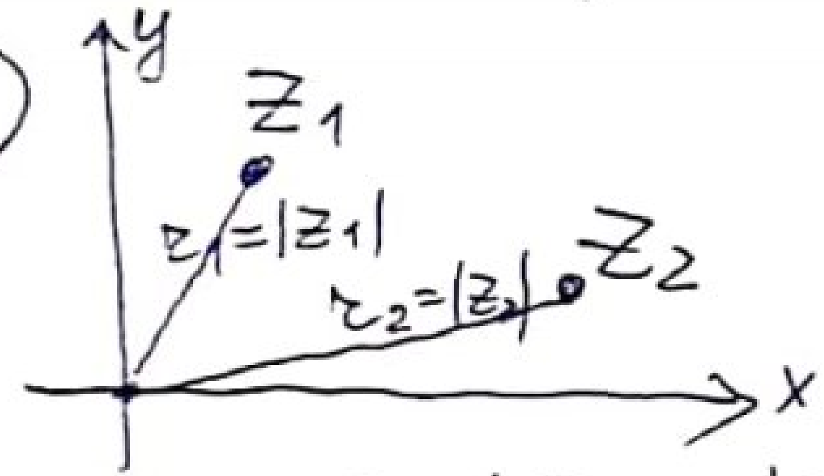


Сложение и умножение компл. чисел явл. основными операциями, вычитание и деление с помощью их определяются.

Св-ва сложения и умножения компл. чисел аналогичны св-в сложения и умножения действ. чисел.

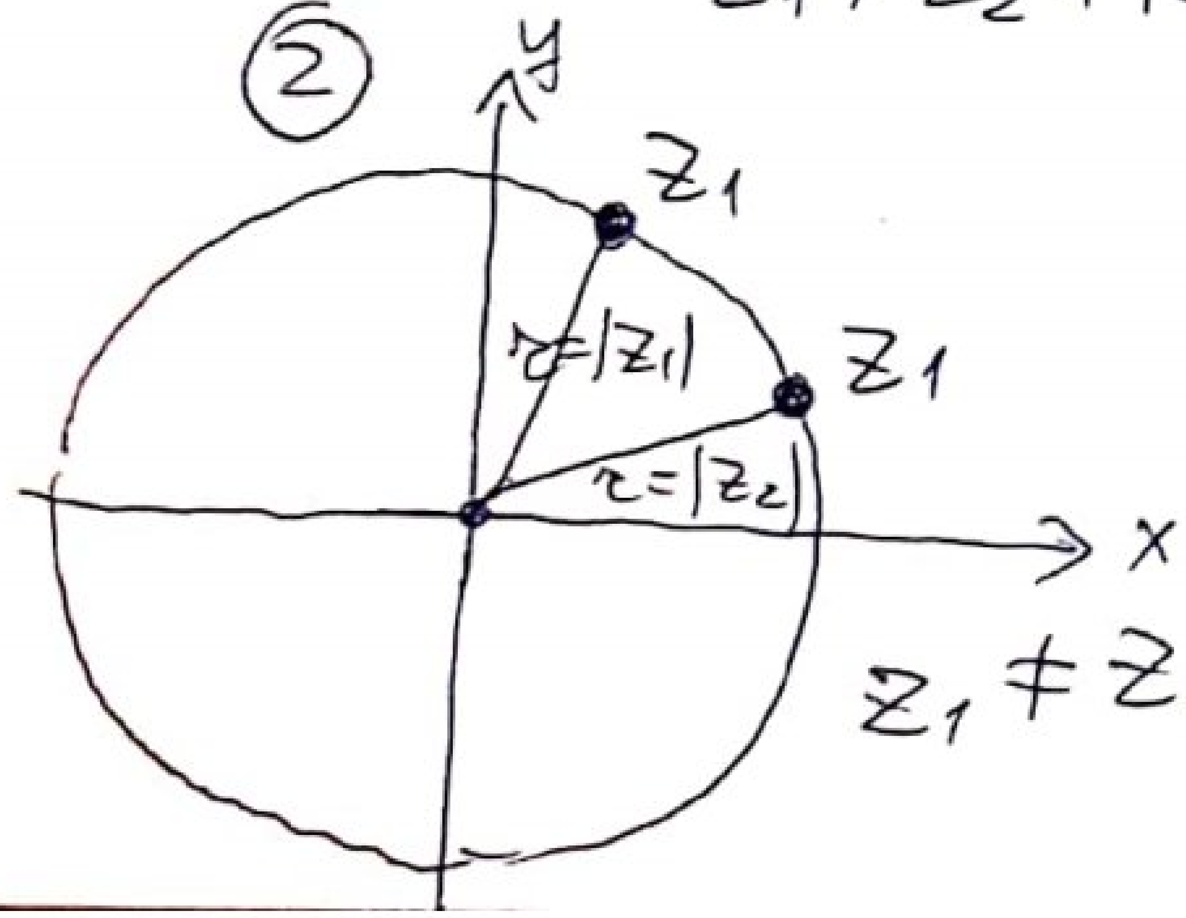
Но сравнение компл. чисел (>, <) не определено. Можно сравнивать только их модули и говорить о равенстве или неравенстве компл. чисел.

Пр. 1



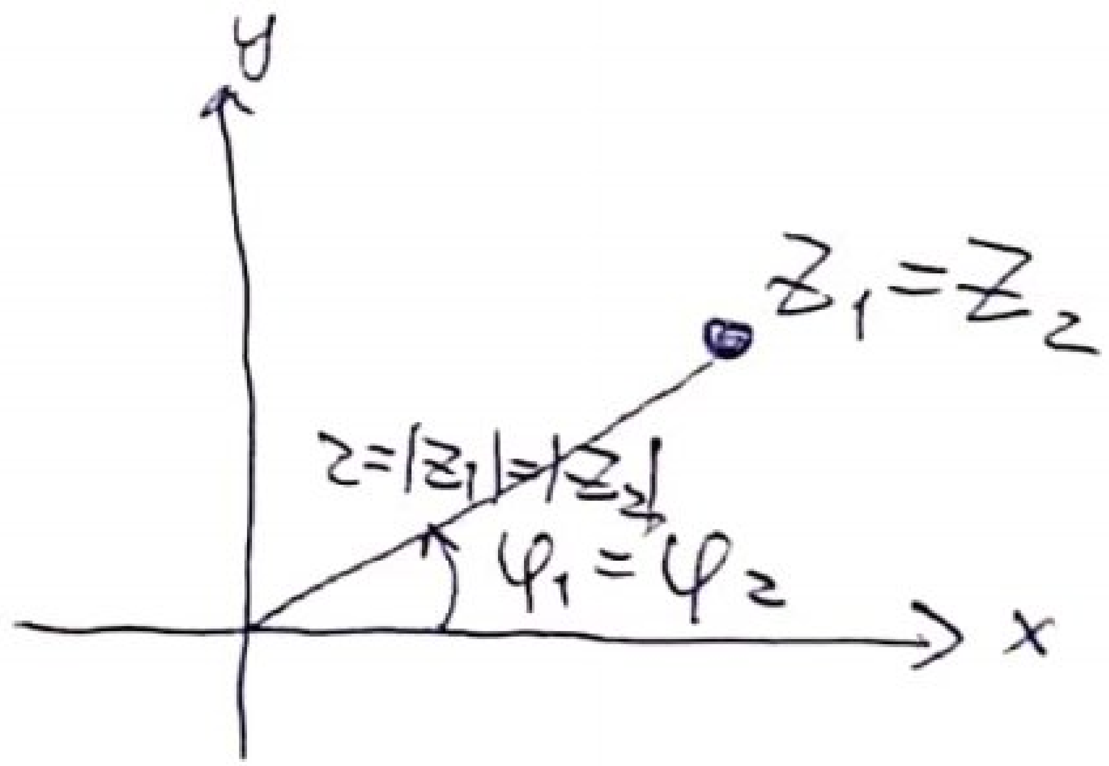
$z_1 \neq z_2$ и $|z_1| \neq |z_2|$

2



$z_1 \neq z_2$, но $|z_1| = |z_2|$.

3



Мн-во компл. чисел с определёнными на нём операциями + и × обозн. $\mathbb{C}$.

$$\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}}$$

Т-ма. об умножении и делении компл. чисел, заданных в триг. и показат. форме.

Пусть $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = r_1 e^{i\varphi_1}$

$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_2 e^{i\varphi_2}$

Тогда

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)) = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)) = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$$

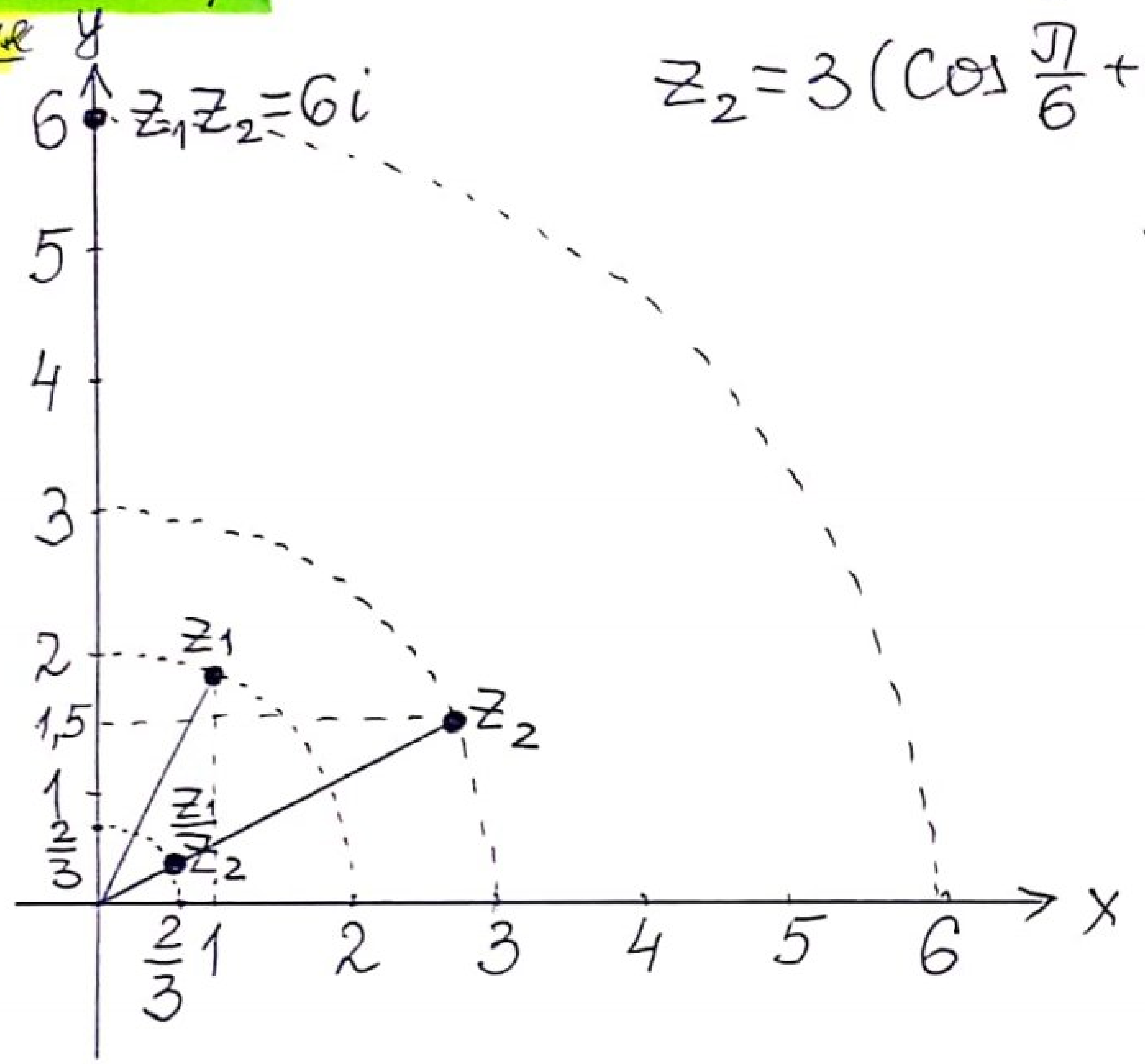
Док-во.

1) $z_1 z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$
$= r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 i\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \overbrace{i\sin\varphi_1 i\sin\varphi_2}^{-\sin\varphi_1\sin\varphi_2}) =$
$= r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)) =$
$= r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$ 2) Попробуйте! ч.т.д.

Сканировано с CamScanner

Пример.

умножения и деления.



$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$z_1 z_2 = 2\cdot 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= 6\left(\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0} + i\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1}\right) = 6i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

Сканировано с CamScanner

Опр. корня нат. степени из компл. числа

$\sqrt[n]{z} = w$ такое, что $w^n = z$.

След., $w_1 = 2$ и $w_2 = -2$ являются $\sqrt{4}$,

т.к. $w_1^2 = 2^2 = 4$ и $w_2^2 = (-2)^2 = 4$.

Сравним с опр. арифм. квадр. корня (из действит. числа)

$\sqrt{x} = y$ такое, что $y^2 = x$ и $y \geq 0$.

Формулы Муавра

(возведение компл. числа в нат. степень и извлечение корня нат. степени из компл. числа).

1. Пусть $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi} \Rightarrow$

$$\Rightarrow z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r^n e^{in\varphi}$$

2. Пусть $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),$$

где $k=0,1,\ldots,n-1$. Это n чисел $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$.

Док-во (2). Пусть $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Обозначим $\sqrt[n]{z} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$.

Тогда по опр. корня n-й степени $(\sqrt[n]{z})^n = z$,

т.е. $\rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Это возможно $\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^n = r \\ n\psi = \varphi + 2\pi k, \; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \psi = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}, \; k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$.

Выясним, сколько различных корней n-й степени мы получили.

При $k=0 \Rightarrow \psi = \frac{\varphi}{n} \Rightarrow z_0 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$

$k=1 \Rightarrow \psi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n} \Rightarrow z_1 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right)\right)$

$\vdots$

$k=n-1 \Rightarrow \psi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}(n-1) \Rightarrow z_{n-1} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}(n-1)\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}(n-1)\right)\right)$

Пусть $k=n \Rightarrow \psi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}n = \frac{\varphi}{n} + 2\pi \Rightarrow z_n = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi\right)\right) =$

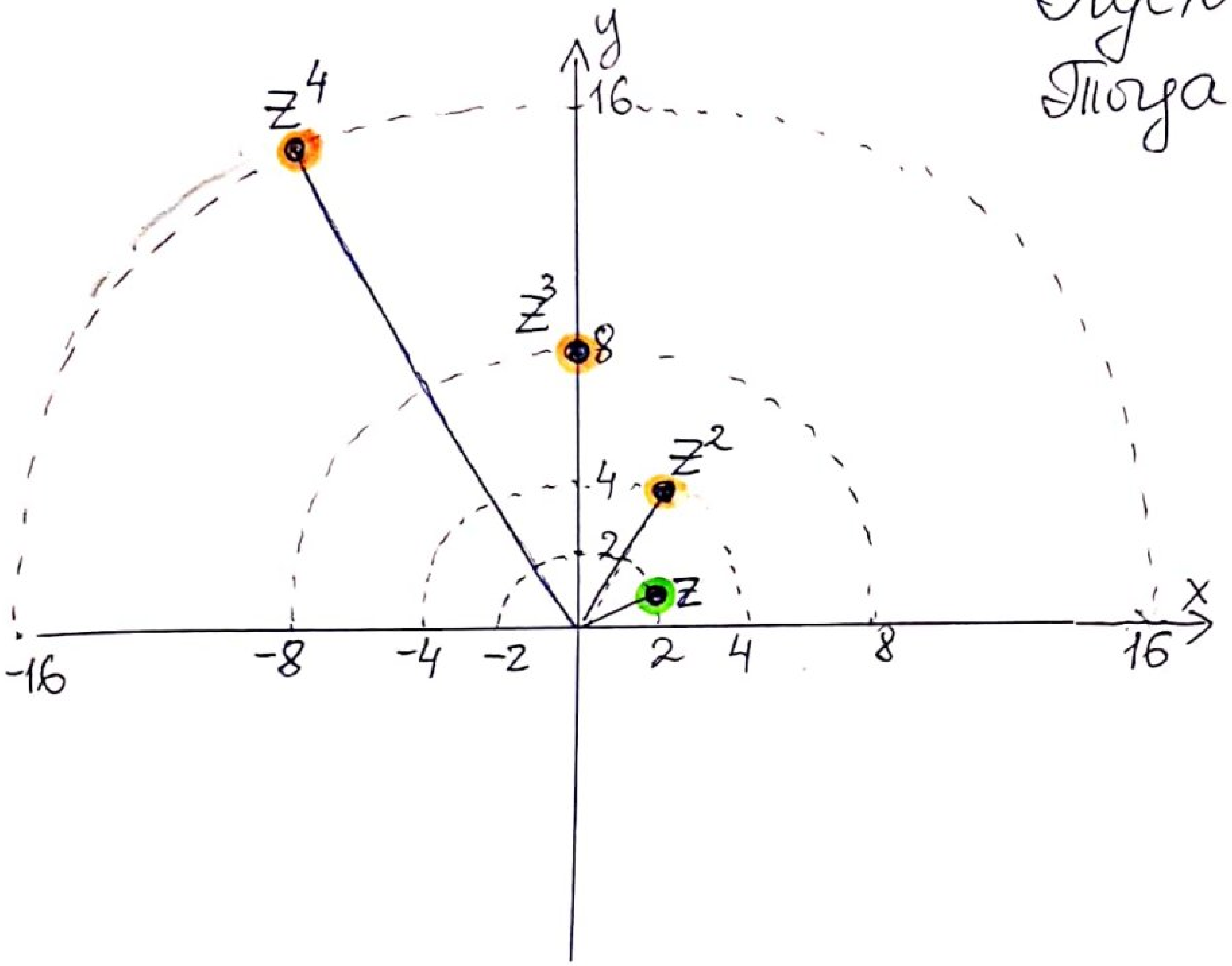
$= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right) = z_0$.

и т.д.

Ч.т.д.

Сканировано с CamScanner

Пример возведения в степень



Пусть $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

Тогда

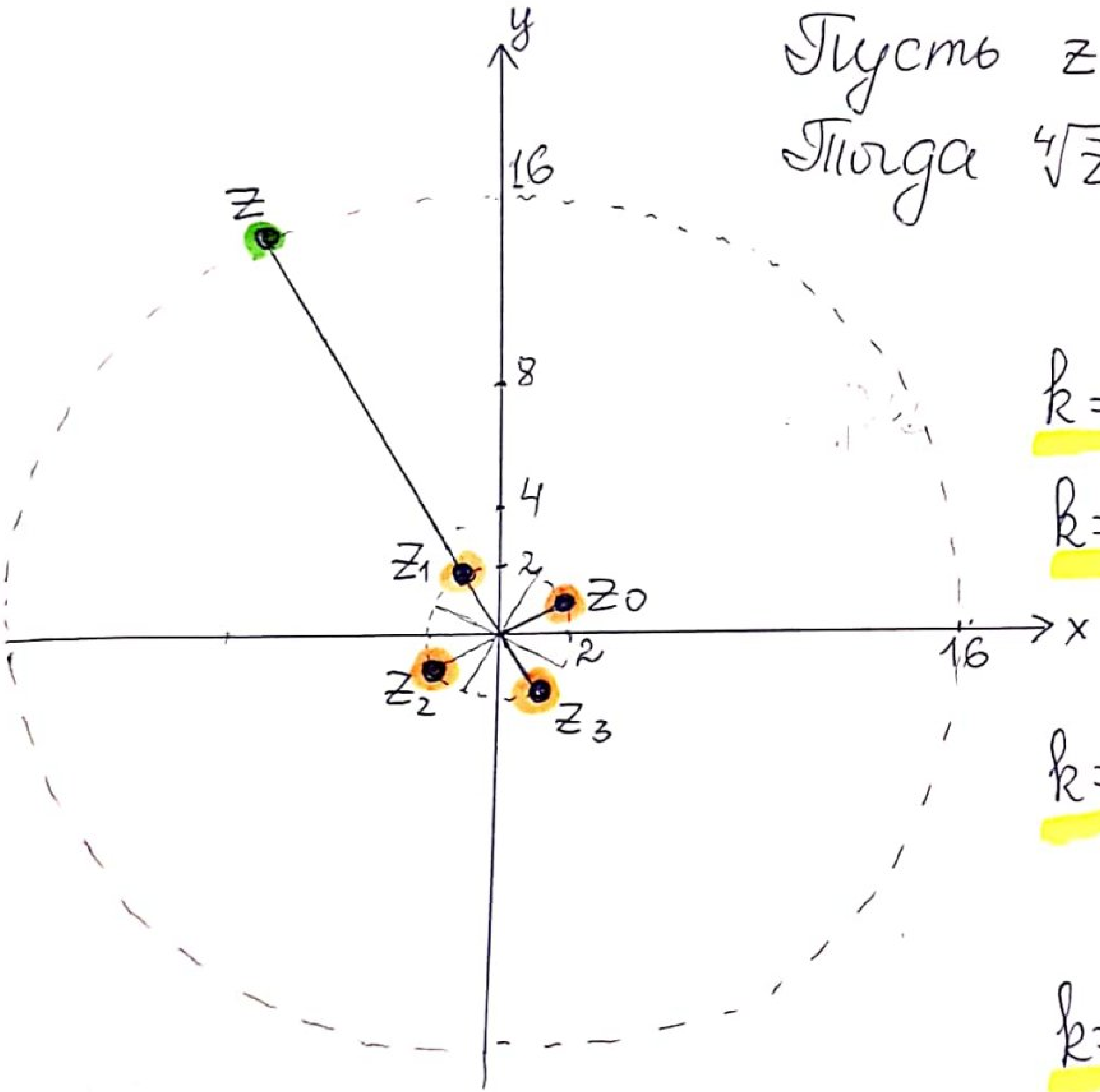
$$z^2 = 2^2\left(\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{6}\right)\right) = \\ = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$z^3 = 2^3\left(\cos\left(3\cdot\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(3\cdot\frac{\pi}{6}\right)\right) = \\ = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$z^4 = 2^4\left(\cos\left(4\cdot\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(4\cdot\frac{\pi}{6}\right)\right) = \\ = 16\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

и т.д.

Пример извлечения корня



Пусть $z=16\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

Тогда $\sqrt[4]{z}=\sqrt[4]{16}\left(\cos\left(\frac{\frac{2\pi}{3}}{4}+\frac{2\pi}{4}k\right)+i\sin\left(\frac{\frac{2\pi}{3}}{4}+\frac{2\pi}{4}k\right)\right)=$

$=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}k\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}k\right)\right),$

$k=0 \Rightarrow z_0=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$k=1 \Rightarrow z_1=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)\right)=$

$=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$k=2 \Rightarrow z_2=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)\right)=$

$=2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

$k=3 \Rightarrow z_3=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{3\pi}{2}\right)\right)=$

$=2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

Сканировано с CamScanner

Ещё примеры.

1. $\sqrt{-1} = \left[\begin{array}{l} i \\ -i \end{array}\right.$ (два корня; $i^2 = -1$ по опр.
$(-i)^2 = (-1)^2 i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$)

2. $\sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot (-1)} = \sqrt{4}\sqrt{-1} = 2\sqrt{-1} = \left[\begin{array}{l} 2i \\ -2i \end{array}\right.$ (два корня;
$(2i)^2 = -4$
$(-2i)^2 = -4$)

3. $\boxed{x^2 - 6x + 10 = 0 \quad \text{Решить ур-е.}}$

$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 36 - 40 = -4$

$\sqrt{D} = \sqrt{-4} = \pm 2i$

$x_{1,2} = \dfrac{6 \pm 2i}{2} = 3 \pm i$

Ответ: $3 \pm i$

Корень n-й степени из компл. числа (действит. числа — частный случай комплексных) имеет n различных значений.

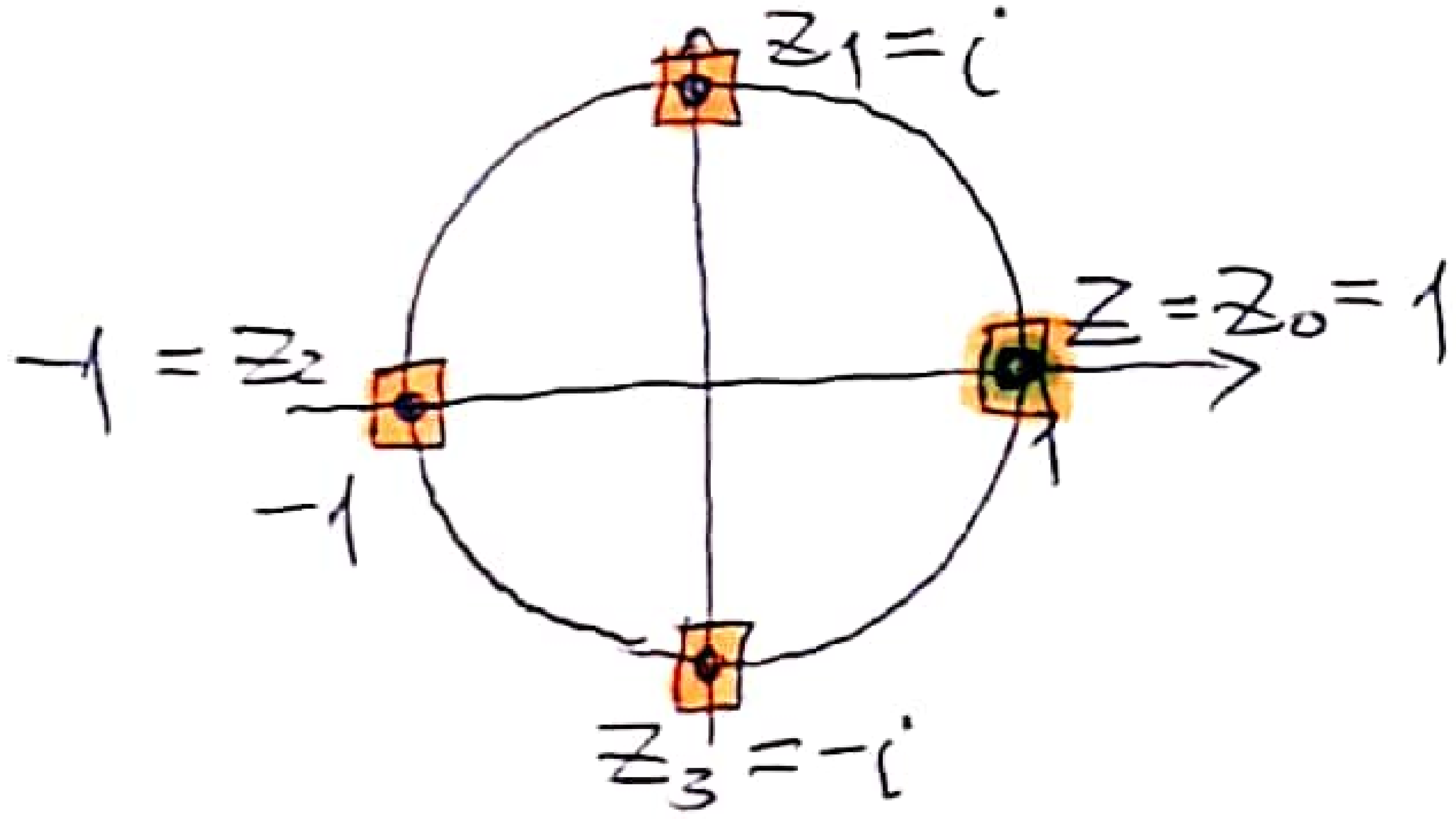
4 $x^4 = 1 \Rightarrow x = \sqrt[4]{1}$

Запишем $1 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$

Тогда $z = \sqrt[4]{1} =$

$= \sqrt[4]{1}\left(\cos\left(\frac{0}{4} + \frac{2\pi}{4}k\right) + i\sin\left(\frac{0}{4} + \frac{2\pi}{4}k\right)\right) =$

$= 1\left(\cos\frac{\pi}{2}k + i\sin\frac{\pi}{2}k\right)$



$k=0 \Rightarrow z_0 = 1(\cos 0 + i\sin 0) = 1$

$k=1 \Rightarrow z_1 = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = i$

$k=2 \Rightarrow z_2 = 1(\cos\pi + i\sin\pi) = -1$

$k=3 \Rightarrow z_3 = 1\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -i$

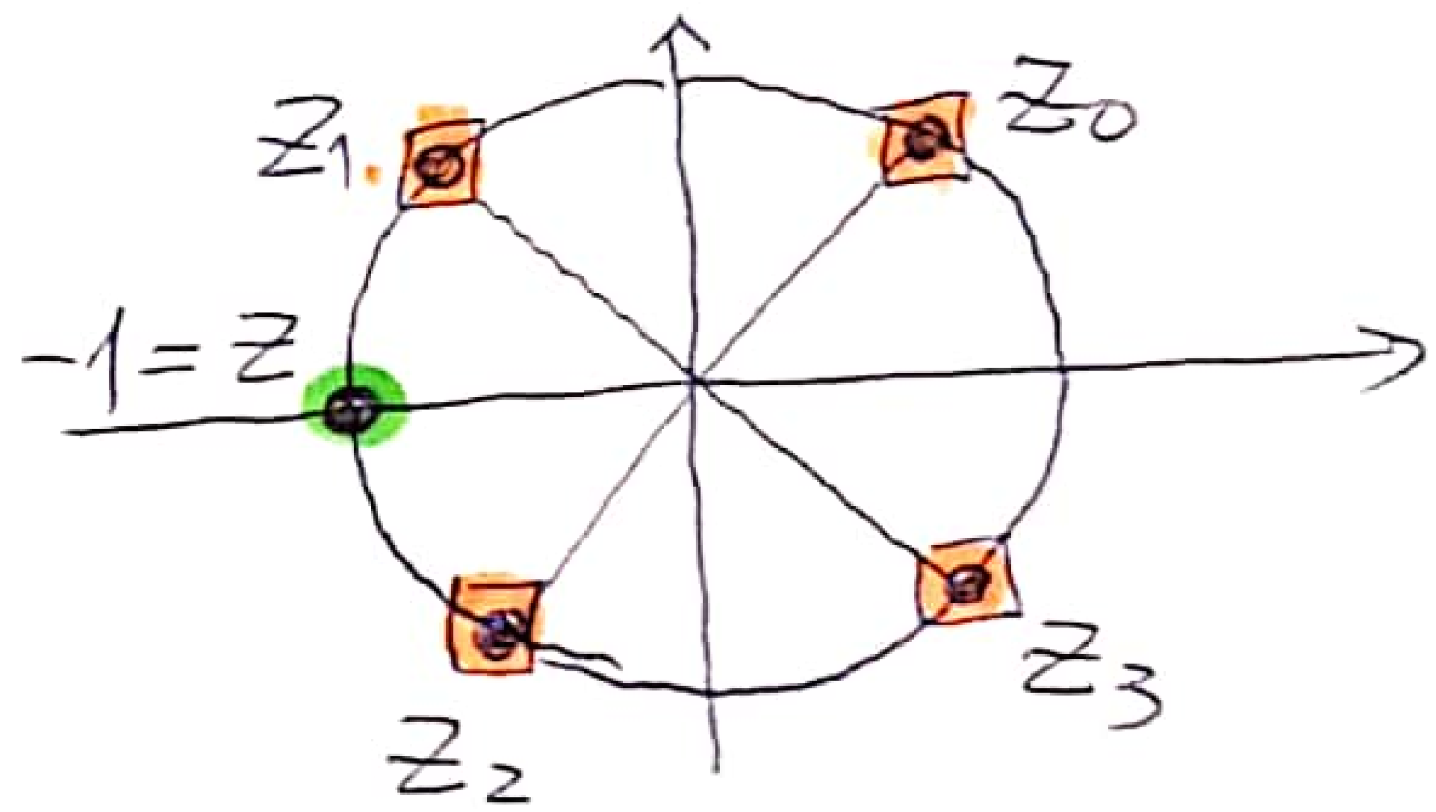
5 $x^4 = -1 \Rightarrow x = \sqrt[4]{-1}$

Запишем $-1 = 1(\cos\pi + i\sin\pi)$

Тогда $z = \sqrt[4]{-1} =$

$= \sqrt[4]{1}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4}k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4}k\right)\right) =$

$= 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k\right)\right)$



$k=0 \Rightarrow z_0 = 1\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$k=1 \Rightarrow z_1 = 1\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$k=2 \Rightarrow z_2 = 1\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$k=3 \Rightarrow z_3 = 1\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$