Многочлены и алгебраические уравнения

Опр **Многочленом** (полиномом или целой рациональной функцией) **n-й степени** наз. функция вида

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 \cdot z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n,$$

где $z \in \mathbb{C}$, $a_0, \ldots, a_n$ - коэффициенты (возможно, $\in \mathbb{C}$), причём $a_0 \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Алгебраическим уравнением n-й степени наз. уравнение

$$P_n(z) = 0.$$

Корнем многочлена $P_n(z)$ или уравнения $P_n(z)=0$ наз. такое число z_0, для которого

$$P_n(z_0) = 0$$

Теорема Гаусса (основная теорема алгебры).

Всякий многочлен ненулевой степени имеет по крайней мере один корень (вообще говоря, комплексный).

Утв. Число z_0 явл. корнем многочлена $P_n(z)$ $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ $P_n(z)$ делится без остатка на $z-z_0$, т.е.

$$P_n(z)=(z-z_0)\,Q_{n-1}(z),$$

где $Q_{n-1}(z)$ – многочлен $(n-1)$-й степени.

Опр. Число z_0 наз. корнем многочлена $P_n(z)$ кратности k, $k\geq 1$, если $P_n(z)$ делится без остатка на $(z-z_0)^k$, но не делится на $(z-z_0)^{k+1}$.

Утв. Число z_0 явл. корнем $P_n(z)$ кратности k $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ $P_n(z)=(z-z_0)^k\,Q_{n-k}(z)$, где $Q_{n-k}(z_0)\neq 0$.

Следствие из т. Гаусса:

Многочлен n-й степени имеет ровно n корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность, т.е.

$$\mathcal{P}_n(z) = a_0(z-z_1)^{k_1}(z-z_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(z-z_m)^{k_m}, \quad (*)$$

где $z_i \in \mathbb{C}$, $k_1+\ldots+k_m = n$.

Далее рас. многочлены с действительными коэффициентами.

Теорема о сопряженных корнях многочлена с действит. коэффициентами.

Пусть $P_n(z)$ – многочлен с действит. коэф-ми,
Тогда если $z_0 = x_0 + iy_0$ – корень $P_n(z)$ кратности k,
то $\overline{z}_0 = x_0 - iy_0$ – корень $P_n(z)$ той же кратности k.

Объяснение.

$$P_n(z_0) = P_n(x_0 \pm iy_0) = A(x_0, y_0) \pm iB(x_0, y_0)$$

$$P_n(z_0) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} A(x_0, y_0) = 0 \\ B(x_0, y_0) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow P_n(\overline{z}_0) = 0$$

Объединим в (*) скобки вида $z-z_0$ и $z-\bar{z}_0$:

где $z_0 = x_0 + iy_0$:

$$(z-z_0)(z-\bar{z}_0) = z^2 - z\bar{z}_0 - z_0 z + z_0\bar{z}_0 =$$

$$= z^2 - (\bar{z}_0 + z_0) + |z_0|^2 =$$

$$= z^2 \underbrace{- 2x_0}_{p} z + \underbrace{(x_0^2 + y_0^2)}_{q} =$$

$$= z^2 + pz + q. \leftarrow$$ не имеет действит. корней

Получим для $\mathcal{P}_n(z)$ с действит. коэф-ми:

$$\mathcal{P}_n(z) = c_0(z-z_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (z-z_r)^{k_r}(z^2+p_1 z+q_1)^{l_1} \cdot \ldots \cdot (z^2+p_s z+q_s)^{l_s},$$

где $z_1, \ldots, z_r \in \mathbb{R}$, $p_i, q_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, s)$,

$$k_1 + \ldots + k_r + 2l_1 + \ldots + 2l_s = n.$$

Множители $z - z_i$ $(z_i \in \mathbb{R})$ и $z^2 + p_i z + q_i$ $(p_i^2 - 4q_i < 0)$ наз. неприводимыми

В привычных обозначениях

$$P_n(x) = a_0(x-x_1)^{k_1}\dots(x-x_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\dots(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}, \quad (**)$$

где $k_1+\dots+k_r+2l_1+\dots+2l_s=n$,

т.е. любой многочлен $P_n(x)$ с действит. коэфф-ми можно разложить на неприводимые множители.

Пример.

$P_3(x) = a_0(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ или

$P_3(x) = a_0(x-x_1)(x^2+px+q)$, где $D=p^2-4q<0$.

Т-ма. Любой многочлен $P_{2k-1}(x)$ нечётной степени имеет действит. корень.

Рациональные функции

Опр Рациональной ф-ей наз. функция вида

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)},$$

где $Q_m(x), P_n(x)$ – многочлены степеней m и n.

Дробь (кратко) $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ наз. правильной, если $m<n$, и неправильной, если $m \geqslant n$.

Любую неправильную дробь можно представить в виде:

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = T_l(x) + \frac{R_k(x)}{P_n(x)},$$

где $T_l(x), R_k(x)$ – многочлены ст. l и k, и $k<n$.

Теорема Любую правильную дробь $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ $(m<n)$, где $Q_m(x)$, $P_n(x)$ – мн-ны с действит. коэфф-ми, можно представить в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}+\ldots+\frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}}+\ldots+\frac{B_1}{x-x_r}+\frac{B_2}{(x-x_r)^2}+\ldots+\frac{B_{k_r}}{(x-x_r)^{k_r}}+$$

$$+\frac{C_1x+D_1}{x^2+p_1x+q_1}+\ldots+\frac{C_{l_1}x+D_{l_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}}+\ldots+\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_sx+q_s}+\ldots+\frac{M_{l_s}x+N_{l_s}}{(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}}.$$

(сравните с $\binom{*}{*}$)

Примеры решения уравнений

$\boxed{1}$ $x^3+x^2+x-3=0$

$x_1=1$ (подходит) $\Rightarrow x^3+x^2+x-3=(x-1)\underbrace{(x^2+2x+3)}_{\text{находим из деления}}$

$x^3+x+x-3 \;\big|\; x-1$

... ...

$x^2+2x+3=0$

арифм. кв. корень

$D=4-12=-8<0 \Rightarrow \sqrt{-8}=\sqrt{8}\sqrt{-1}=$

$=\pm 2\sqrt{2}\,i$

$x_{2,3}=\dfrac{-2\pm 2\sqrt{2}\,i}{2}=-1\pm\sqrt{2}\,i$

Ответ: $1;\ -1+\sqrt{2}\,i,\ -1-\sqrt{2}\,i$

$\boxed{2}$ $x^3-8=0$

I сп $x^3=8$

$x=\sqrt[3]{8}=2\sqrt[3]{1}$; $\sqrt[3]{1}=\left[\begin{array}{l}1\\-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\\-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\end{array}\right.$

$\Rightarrow x_{1,2,3}=\left[\begin{array}{l}2\\-1+\sqrt{3}i\\-1-\sqrt{3}i\end{array}\right.$

II сп. $x_1=2$ (подходит) $\Rightarrow$ $x^3-8=(x-2)\underbrace{(x^2+2x+4)}_{\text{из деления } x^3-8 \mid x-2}$

Решим $x^2+2x+4=0$

$D=4-4\cdot4=-12<0 \Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{-12}=2\sqrt{3}\sqrt{-1}=\pm2\sqrt{3}i$

$x_{2,3}=\frac{-2\pm2\sqrt{3}i}{2}=-1\pm\sqrt{3}i$

$\Rightarrow x_{1,2,3}=\left[\begin{array}{l}2\\-1+\sqrt{3}i\\-1-\sqrt{3}i\end{array}\right.$ $\leftarrow$ Ответ: