Лекция 2.

Линейная зависимость и независимость векторов; их геом. смысл.

Опр Линейной комбинацией векторов $\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n$ с коэффициентами $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{R}$ наз. сумма

$$\alpha_1\vec{a}_1+\dots+\alpha_n\vec{a}_n.$$

Лин. комбинация с нулевыми коэф-ми

$$0\cdot\vec{a}_1+\dots+0\,\vec{a}_n$$

наз. тривиальной. Она равна $\vec{0}$.

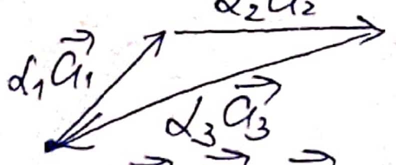
Опр. Векторы $\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n$ наз. линейно зависимыми, | независимыми, если

$\exists$ | $\nexists$

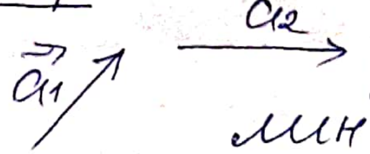
их нетривиальная лин. комбинация, равная $\vec{0}$, т.е.

$\exists\ \alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{R}$, не все равные нулю, такие что $\alpha_1\vec{a}_1+\dots+\alpha_n\vec{a}_n=\vec{0}$	если $\alpha_1\vec{a}_1+\dots+\alpha_n\vec{a}_n=\vec{0}$, то $\alpha_1=0,\dots,\alpha_n=0$ (т.е. только их трив. лин. комб. равна $\vec{0}$.)

Пример.



$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ лин. завис.



$\vec{a}_1,\vec{a}_2$ лин. независ.

Основная теорема о лин. завис. и лин. независ. векторах (без док-ва)

Векторы $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ явл. линейно

зависимыми	независимыми
$\Updownarrow$ тогда и только тогда, когда	$\Updownarrow$
хотя бы один из них является	ни один из них не является

линейной комбинацией остальных векторов.

Геометрические критерии линейной зависимости и независимости

① 2 вектора лин. зависимы $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ они коллинеарны.

② 3 вектора лин. зависимы $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ они компланарны.

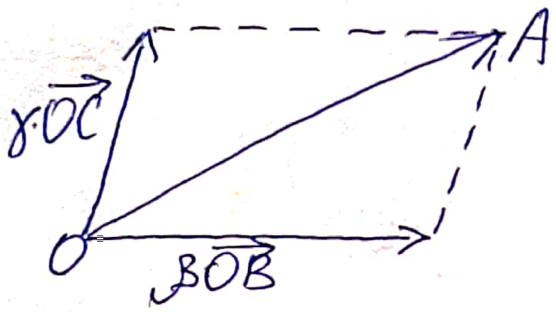
③ 4 вектора в пространстве всегда лин. зависимы.

Зам. При док-ве ① выводится важное свойство коллинеарных векторов:
2 вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллин $\Leftrightarrow$ они пропорциональны, т.е $\exists k \in \mathbb{R}$: $\vec{a} = k\vec{b}$ или $\vec{b} = k\vec{a}$.

Доказательство (2). (Входит в РК1)

(⇒) Необходимость.

Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ лин. зависимы ⇒
⇒ по основной т-ме один из них является лин. комб. остальных.
Пусть, например, $\vec{a} = \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$.
Приложим $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ к одной точке O, получим $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$, причем



$\overrightarrow{OA} = \beta\overrightarrow{OB} + \gamma \cdot \overrightarrow{OC}$.
Это означает, что $\overrightarrow{OA}$ – диагональ паралл-ма, построенного на $\beta \cdot \overrightarrow{OB}$ и $\gamma \cdot \overrightarrow{OC}$.

След., $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ лежат в одной плоск. ⇒
⇒ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ компланарны ⇒
⇒ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны.

(⇐) Достаточность.

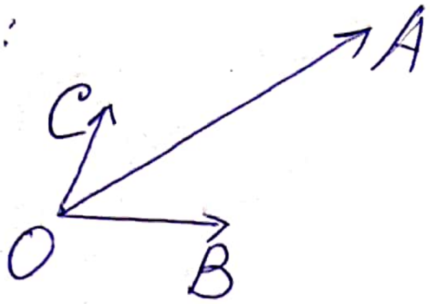
Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны. Рас. 2 случая.

1 случай. Хотя бы один из векторов нулевой.
Пусть, например, $\vec{a} = \vec{0}$.
Тогда $\vec{a} = 0 \cdot \vec{b} + 0 \cdot \vec{c}$, т.е. $\vec{a}$ яв. лин. комб. $\vec{b}$ и $\vec{c}$ ⇒ по осн. теореме $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ лин. завис.

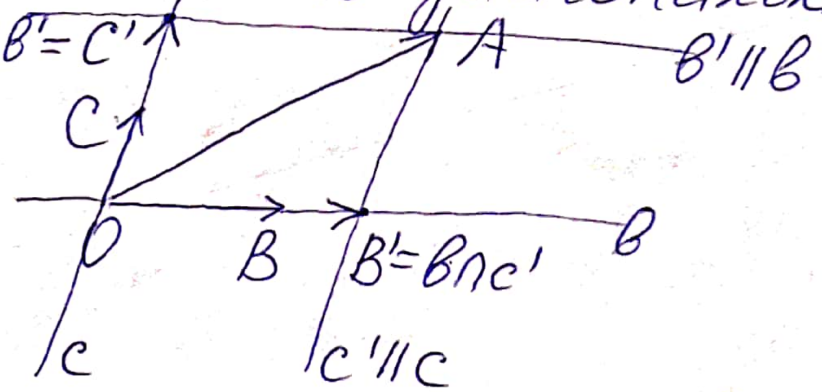
2 случай. Ни один из векторов не нулевой

Приложим $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ к одной точке O, получим $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$, лежащие в одной плоскости.

Пусть, например, их расположение как на рисунке:



Построим параллелограм (так, чтобы один из векторов был его диагональю):



По правилу параллелограмма $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}$.

Т.к. $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OB'}$ коллинеарны $\Rightarrow$ пропорциональны, т.е. $\overrightarrow{OB'}=\beta\overrightarrow{OB}$.

Т.к. $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OC'}$ коллинеарны $\Rightarrow$ пропорциональны, т.е. $\overrightarrow{OC'}=\gamma\overrightarrow{OB}$.

След., $\overrightarrow{OA}=\beta\cdot\overrightarrow{OB}+\gamma\cdot\overrightarrow{OC} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{a}=\beta\vec{b}+\gamma\vec{c} \Rightarrow$ по осн. теореме $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ лин. зав.

ч.т.д.

Векторные пространства V_1, V_2, V_3 и базисы в них. Координаты векторов.

Опр. Пространством

V_1	V_2	V_3
	наз. множество всех	
коллинеарных между собой свободных векторов.	компланарных между собой свободных векторов.	свободных векторов

Базисом в пр-ве

V_1	V_2	V_3
	называется	
любой ненулевой вектор	любая упорядоченная пара неколлинеарных векторов	тройка некомпланарных векторов
	обозначение	
$\vec{e}$	$\vec{e_1}, \vec{e_2}$	$\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$

Теорема о разложении вектора по базису.

Любой вектор можно разложить по базису, причём единственным образом, т.е.

$\forall \vec{x} \in V_1$	$\forall \vec{x} \in V_2$	$\forall \vec{x} \in V_3$
$\exists!\, x \in \mathbb{R}$: (существует и единств.)	$\exists!\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$:	$\exists!\, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$:
$\vec{x} = x\vec{e}$	$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$	$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$

Опр. Представление вектора

$\vec{x} \in V_1$	$\vec{x} \in V_2$	$\vec{x} \in V_3$

в виде

$\vec{x} = x\vec{e}$	$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$	$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$

где

$\vec{e}$ – базис V_1,	$\vec{e}_1, \vec{e}_2$ – базис V_2,	$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – базис V_3,

наз. разложением вектора по базису.

Коэффициенты разложения

x	x_1, x_2	x_1, x_2, x_3

наз. координатами вектора $\vec{x}$ в базисе

$\vec{e}$ пр-ва V_1	$\vec{e}_1, \vec{e}_2$ пр-ва V_2	$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ пр-ва V_3.

Обозначения.

$\vec{x}\{x\}$ в базисе $\vec{e}$	$\vec{x}\{x_1, x_2\}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$	$\vec{x}\{x_1, x_2, x_3\}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$

Доказательство теоремы см. на с. 10.
(входит в РК1)

Свойства координат векторов

1) При сложении векторов их коорд-ты (в одном и том же базисе) складываются

2) При умножении вектора на число его координаты умнож. на это число

3) 2 вектора коллинеарны $\Leftrightarrow$ их коорд-ты (в одном и том же базисе) пропорциональны

Опр. Базис наз. ортогональным, если угол между любыми двумя его векторами равен $90°$.
Базис наз. ортонормированным, если
1) он ортогональный и
2) состоит из единичных векторов.

Обозн. ортонорм. базиса
$\vec{i}$ в V_1 | $\vec{i}, \vec{j}$ в V_2 | $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ в V_3.

4) Координаты вектора в ортонормир. базисе равны ортогон. проекциям этого вектора на базисные векторы, т.е.

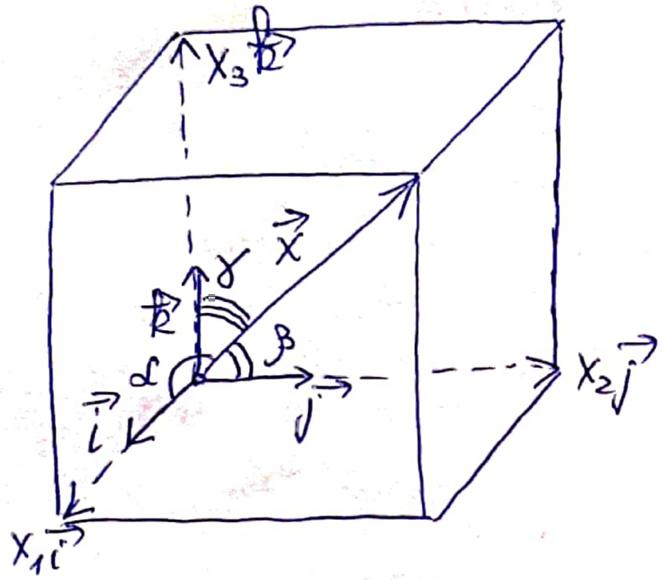
$x_1 = \text{пр}_{\vec{i}} \vec{x}$, $x_2 = \text{пр}_{\vec{j}} \vec{x}$, $x_3 = \text{пр}_{\vec{k}} \vec{x}$

(для V_3)

<u>Следствие из (5)</u>. Пусть $\vec{x} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$.
Тогда

1) $x_1 = |\vec{x}|\cos\alpha$, $x_2 = |\vec{x}|\cos\beta$, $x_3 = |\vec{x}|\cos\gamma$,

где α, β, γ — углы между $\vec{x}$ и $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ соответственно. Они наз. <u>направляющими косинусами вектора $\vec{x}$</u>.



2) $|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

3) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

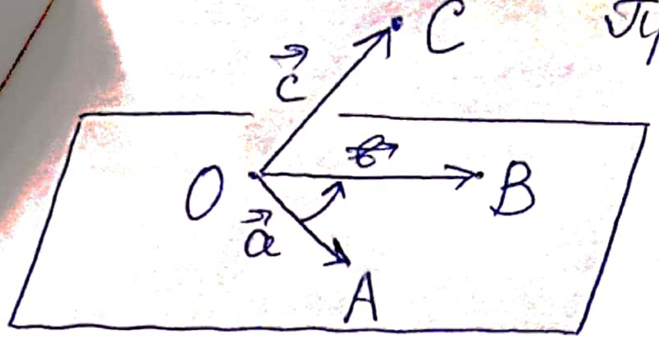
<u>Опр</u>. <u>Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ наз.</u>

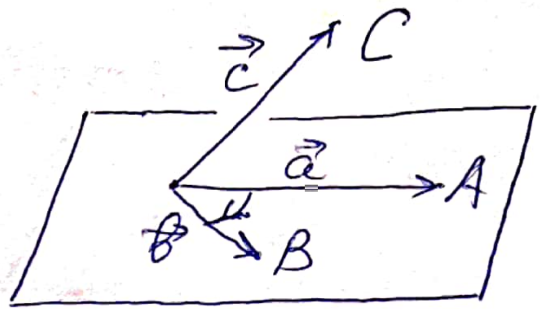
<u>правой</u>,	<u>левой</u>,

если кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ виден из конца вектора $\vec{c}$ происходящим

против часовой стрелки.	по часовой стрелке.

Пример.





<u>Зам1</u> Мы приложили $\vec a, \vec b, \vec c$ к одной т. O, получили $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ и через т. A, B, O провели плоскость.

<u>Зам. 2</u> Можно использовать правила правой и левой руки, а также правила правого и левого винта.

<u>Опр.</u> Базис $\vec e_1, \vec e_2, \vec e_3$ в V_3 наз. <u>правым</u>, | <u>левым</u>, если тройка $\vec e_1, \vec e_2, \vec e_3$ правая | левая

Все базисы в V_3 можно разделить на 2 класса: класс левых и класс правых базисов.

Док-во теоремы о разложении вектора по базису (для V_3; для V_1 и V_2 аналогично).

① Существование разложения.

Из геом. критериев следует, что 4 вектора $\vec{x}, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ лин. зависимы $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ по опр. лин. зависимости $\exists$ числа $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, не все равные нулю, такие что

$$\alpha_0 \vec{x} + \alpha_1 \vec{e_1} + \alpha_2 \vec{e_2} + \alpha_3 \vec{e_3} = \vec{0}. \qquad (*)$$

Число $\alpha_0 \neq 0$. В самом деле, если бы $\alpha_0 = 0$, то осталось бы

$$\alpha_1 \vec{e_1} + \alpha_2 \vec{e_2} + \alpha_3 \vec{e_3} = \vec{0},$$

где не все из $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ равны нулю. Но тогда по опр. лин. завис. $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ лин. завис. $\Rightarrow$ по геом. критерию $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ компланарны.

Противоречие, т.к. $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ – базис в V_3.

Итак, $\alpha_0 \neq 0$.

Умножим равенство $(*)$ на $\frac{1}{\alpha_0}$ и выразим $\vec{x}$:

$$\vec{x} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\vec{e_1} - \frac{\alpha_2}{\alpha_0}\vec{e_2} - \frac{\alpha_3}{\alpha_0}\vec{e_3}.$$

Обозначим $-\frac{\alpha_i}{\alpha_0} = x_i$ и получим

$$\vec{x} = x_1 \vec{e_1} + x_2 \vec{e_2} + x_3 \vec{e_3}.$$

② Единственность разложения.

Пусть от противного $\exists$ 2 разложения для $\vec{x}$: $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$ и
$\vec{x} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$.

Рас. разность:
$$\vec{0} = \vec{x} - \vec{x} = \underbrace{(x_1 - y_1)\vec{e}_1 + (x_2 - y_2)\vec{e}_2 + (x_3 - y_3)\vec{e}_3}_{\text{это лин. комбинация } \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3}.$$

Т.к. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ некомпланарны (по опр. базиса в V_3), то по геом. критерию они лин. независимы.

След., только их тривиальная лин. комб. равна $\vec{0}$, т.е. $x_1 - y_1 = 0$, $x_2 - y_2 = 0$, $x_3 - y_3 = 0$.

Получим $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_3$. Это озн, что двух разных разложений $\vec{x}$ по базису не существует.

ч.т.д.