Лекция 3

Скалярное произведение	Векторное произведение (для векторов из V_3)

Опр

Скалярным	Векторным

произведением $2^х$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ наз

число, равное $|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$	вектор $\vec{c}$, удовл. условиям 1) $\vec{c}\perp\vec{a}$ и $\vec{c}\perp\vec{b}$, 2) упорядоченная тройка $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ правая, 3) $|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$

Обозн.

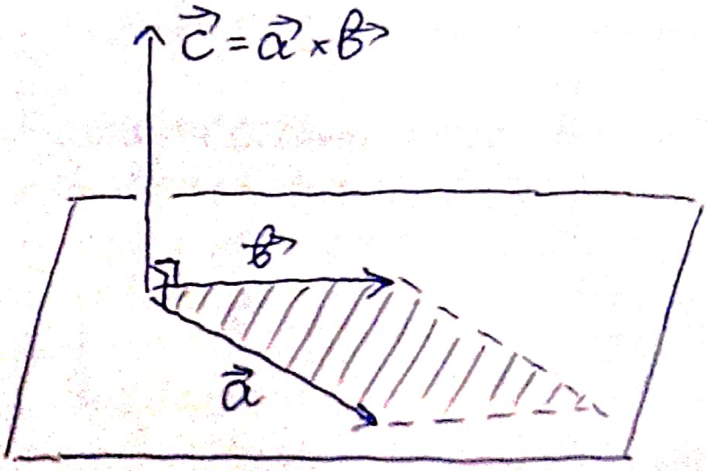
$(\vec{a},\vec{b})$, $\vec{a}\vec{b}$	$[\vec{a},\vec{b}]$, $\vec{a}\times\vec{b}$

Если $\vec{a}=\vec{0}$ или $\vec{b}=\vec{0}$, то $\vec{a}\vec{b}=0$ и $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.

Геометрические свойства

1. $\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}|\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$;
для ненулевых векторов
$\vec{a}\vec{b}>0 \Leftrightarrow (\widehat{\vec{a},\vec{b}})$ острый,
$\vec{a}\vec{b}<0 \Leftrightarrow (\widehat{\vec{a},\vec{b}})$ тупой,
$\vec{a}\vec{b}=0 \Leftrightarrow (\widehat{\vec{a},\vec{b}})$ прямой.

1. $|\vec{a}\times\vec{b}|=S_{\text{парал-ма на } \vec{a},\vec{b}}$



② Теорема (без док-ва)

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$

ортогональны	коллинеарны
тогда и только	тогда, когда
$\vec{a}\vec{b}=0$	$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$

Алгебраические свойства

① $\forall \vec{a},\vec{b}$

$\vec{a}\vec{b}=\vec{b}\vec{a}$	$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$
симметричность	кососимметричность

② $\forall \vec{a},\vec{b}$ и $\forall k\in\mathbb{R}$

1) $(k\vec{a})\vec{b}=k(\vec{a}\vec{b})$	1) $(k\vec{a})\times\vec{b}=k(\vec{a}\times\vec{b})$
2) $\vec{a}(k\vec{b})=k(\vec{a}\vec{b})$	2) $\vec{a}\times(k\vec{b})=k(\vec{a}\times\vec{b})$

③ $\forall \vec{a},\vec{b},\vec{c}$

1) $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}$	1) $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$
2) $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c}$	2) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$

свойства ② и ③ наз. линейностью скал. и вект. произведений по каждому множителю.

④ Свойства скалярного квадрата:

1) $\forall \vec{a}$ $\quad \vec{a}\vec{a}\geq 0$

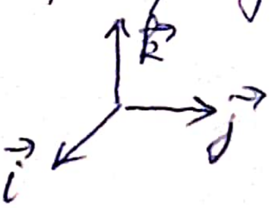
2) $\vec{a}\vec{a}=0 \Leftrightarrow \vec{a}=\vec{0}$

④ перестановка векторов правого ортонормир. базиса

$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$

$\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$

$\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$



Доказательство свойств линейности скалярного произведения

(для вект. — аналогично)

2: 1): для 1-го множителя

Рас 2 случая:

$\vec{b} = \vec{0}$ | $\vec{b} \neq \vec{0}$

Тогда

левая часть $=$
$= (k\vec{a})\vec{b} = (k\vec{a})\vec{0} = 0$,
правая часть $=$
$= k(\vec{a}\vec{b}) = k(\vec{a}\vec{0}) = k \cdot 0 = 0$,

левая часть $=$
$= (k\vec{a})\vec{b} = \vec{b}(k\vec{a}) =$ ← по геом. св-ву скал. произв.
(по св-ву ① симметричность)
$= |\vec{b}| \cdot np_{\vec{b}}(k\vec{a}) =$ ← по св-ву ортогон. проекц
$= |\vec{b}| \cdot k \cdot np_{\vec{b}}\vec{a} =$ ← по св-ву действит. чисел
$= k|\vec{b}| np_{\vec{b}}\vec{a} =$ ← по геом. св-ву скал. произв.
$= k(\vec{b}\vec{a}) =$ ← по св-ву ① симметричность
$= k(\vec{a}\vec{b}) =$
$=$ правая часть,

т.е. лев. часть $=$ прав. части.

2): для 2-го множителя

лев. часть $= \vec{a}(k\vec{b}) = (k\vec{b})\vec{a} =$ ← по доказанному выше
(по св-ву ① симметричность)

$= k(\vec{b}\vec{a}) = k(\vec{a}\vec{b}) =$ прав. часть.

3) : 1) : Рас. 2 случая:

для 1-го множ.

$\vec{c} = \vec{0}$ | $\vec{c} \neq \vec{0}$

Тогда

Левая часть $= (\vec{a}+\vec{b})\vec{c} = (\vec{a}+\vec{b})\vec{0} = 0$,

Правая часть $= \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c} = \vec{a}\vec{0} + \vec{b}\vec{0} = 0 + 0 = 0$,

Левая часть $= (\vec{a}+\vec{b})\vec{c} = \vec{c}(\vec{a}+\vec{b}) =$ по геом. св-ву скал. произв.

по св-ву ① симметр-и

$= |\vec{c}|\,np_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b}) =$ по св-ву ортогон. проекций

$= |\vec{c}|(np_{\vec{c}}\vec{a} + np_{\vec{c}}\vec{b}) =$ по св-ву действ. чисел

$= |\vec{c}|\,np_{\vec{c}}\vec{a} + |\vec{c}|\,np_{\vec{c}}\vec{b} =$ по геом св-ву

$= \vec{c}\vec{a} + \vec{c}\vec{b} =$ по св-ву ① симметр-и

$= \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c} =$

$=$ правая часть,

т.е. лев. часть $=$ прав. части.

2) : лев. часть $= \vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{b}+\vec{c})\vec{a} =$ по доказ. выше

для 2-го множ.

по св-ву ① симметричности

$= \vec{b}\vec{a} + \vec{c}\vec{a} = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c} =$ прав. часть.

Ч.т.д.

Выражение

1) длины вектора,
2) cos угла между векторами,
3) проекции вектора на направление

через скалярное произведение.

1): $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\vec{a}} \overset{\text{обозн}}{=} \sqrt{\vec{a}^2}$ (т.к. $\vec{a}\vec{a} = |\vec{a}|^2 \underbrace{\cos 0^\circ}_{=1} = |\vec{a}|^2$)

2): $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$

3): $пр_{\vec{a}}\vec{b} = \dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|}$; $пр_{\vec{b}}\vec{a} = \dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{b}|}$

Формулы для вычисления

скалярного	векторного
произведения	
в ортонормир базисе	в правом ортонормир. базисе

Пусть

$\vec{a}\{a_1, a_2, a_3\}$, $\vec{b}\{b_1, b_2, b_3\}$

в ортонорм. базисе $\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}$ | в правом ортонорм. базисе $\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}$

Тогда

$\vec{a}\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ | $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

Доказательство.

Распишем

$\vec{a}\vec{b} =$

$= (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k})(b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) =$

$\vec{a} \times \vec{b} =$

$= (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) \times (b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) =$

по свойствам линейности

$= a_1b_1(\vec{i}\vec{i}) + a_1b_2(\vec{i}\vec{j}) + a_1b_3(\vec{i}\vec{k}) +$
$+ a_2b_1(\vec{j}\vec{i}) + a_2b_2(\vec{j}\vec{j}) + a_2b_3(\vec{j}\vec{k}) +$
$+ a_3b_1(\vec{k}\vec{i}) + a_3b_2(\vec{k}\vec{j}) + a_3b_3(\vec{k}\vec{k}) =$

$= a_1b_1(\vec{i}\times\vec{i}) + a_1b_2(\vec{i}\times\vec{j}) + a_1b_3(\vec{i}\times\vec{k}) +$
$+ a_2b_1(\vec{j}\times\vec{i}) + a_2b_2(\vec{j}\times\vec{j}) + a_2b_3(\vec{j}\times\vec{k}) +$
$+ a_3b_1(\vec{k}\times\vec{i}) + a_3b_2(\vec{k}\times\vec{j}) + a_3b_3(\vec{k}\times\vec{k}) =$

Для баз. векторов.

$\vec{i}\vec{i} = |\vec{i}|^2 = 1^2 = 1$
$\vec{j}\vec{j} = |\vec{j}|^2 = 1^2 = 1$
$\vec{k}\vec{k} = |\vec{k}|^2 = 1^2 = 1$
$\vec{i}\vec{j} = \vec{j}\vec{i} = 0$, т.к. $\vec{i} \perp \vec{j}$
$\vec{j}\vec{k} = \vec{k}\vec{j} = 0$, т.к. $\vec{k} \perp \vec{j}$
$\vec{i}\vec{k} = \vec{k}\vec{i} = 0$, т.к. $\vec{i} \perp \vec{k}$

$\vec{i}\times\vec{i} = \vec{0}$ (т.к. $\vec{i}$ и $\vec{i}$ коллин.)
$\vec{j}\times\vec{j} = \vec{0}$ (аналог.)
$\vec{k}\times\vec{k} = \vec{0}$ (аналог.)
$\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j}\times\vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}$
(т.к. базис правый),
$\vec{j}\times\vec{i} = -\vec{k}$, $\vec{k}\times\vec{j} = -\vec{i}$, $\vec{i}\times\vec{k} = -\vec{j}$
(из-за кососимметричности)

След.,

$= a_1b_1 + 0 + 0 +$
$+ 0 + a_2b_2 + 0 +$
$+ 0 + 0 + a_3b_3 =$
$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

ч.т.д.

$= \vec{0} + a_1b_2\vec{k} + a_1b_3(-\vec{j}) +$
$+ a_2b_1(-\vec{k}) + \vec{0} + a_2b_3\vec{i} +$
$+ a_3b_1\vec{j} + a_3b_2(-\vec{i}) + \vec{0} =$

$$= \vec{i}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

ч.т.д.

Формулы для вычисления

1) длины вектора и

2) cos угла между векторами

в ортонормир. базисе.

Пусть $\vec{a}\{a_1, a_2, a_3\}$, $\vec{b}\{b_1, b_2, b_3\}$ в ортонормир. базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Тогда

1): $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$,

2) $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \dfrac{\vec{a}\,\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$.

Смешанное произведение
(для векторов из V_3)

Опр. Смешанным произведением 3^x векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ наз. число, равное

$$(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}.$$

Обозн. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

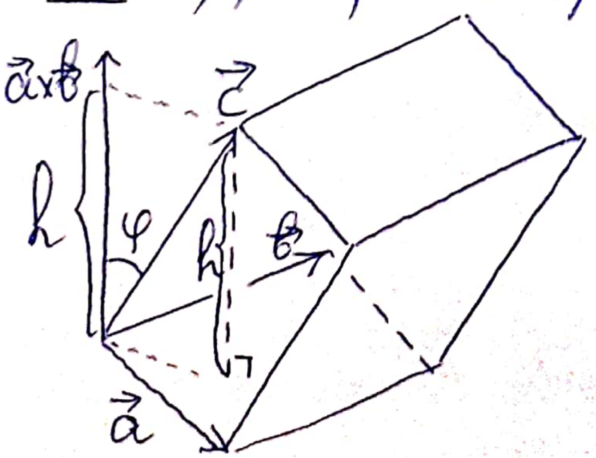
Геометрические свойства

① $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \pm V_{\substack{\text{парал-да} \\ \text{на } \vec{a},\vec{b},\vec{c}}}$, где

знак +, если упоряд. тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ правая,
и знак −, —"— левая.

Док-во.

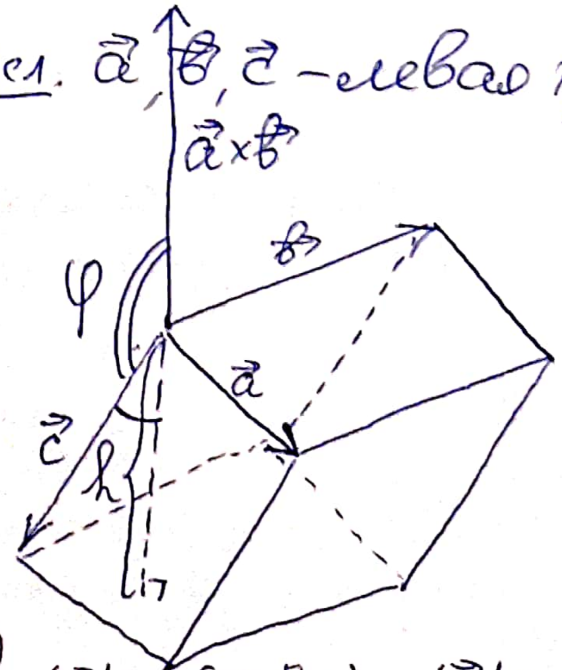
1сл. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – правая тройка



$h = |\vec{c}|\cos\varphi$

$V = Sh = |\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}|\cos\varphi = (\vec{a}\times\vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{b}\vec{c}$

2сл. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – левая тройка



$h = |\vec{c}|\cos(180° - \varphi) = -|\vec{c}|\cos\varphi$

$V = Sh = |\vec{a}\times\vec{b}|(-|\vec{c}|\cos\varphi) = -|\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}|\cos\varphi = -(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c} = -\vec{a}\vec{b}\vec{c}$

② Теорема (без док-ва)

Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны $\Leftrightarrow \vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$.

Алгебраические свойства.

① При перестановке любых $2^х$ векторов смеш. произв. меняет знак:

$$\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$$
$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c}$$
$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a}$$
$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b}$$

При циклической перестановке смеш. произв. не меняется:

$\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ $\quad \vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{c}\vec{a}$.

Следствие. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})$

Док-во. $\underbrace{\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a}}_{\text{циклич. перест.}} \overset{\text{по опр. смеш. произв.}}{=} (\vec{b}\times\vec{c})\vec{a} \underset{\text{симмет. скал. произв.}}{=} \vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})$

② $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и $\forall k \in \mathbb{R}$

1) $(k\vec{a})\vec{b}\vec{c} = k(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$

2) $\vec{a}(k\vec{b})\vec{c} = k(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$

3) $\vec{a}\vec{b}(k\vec{c}) = k(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$

③ $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$

1) $(\vec{a}+\vec{d})\vec{b}\vec{c} = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{d}\vec{b}\vec{c}$

2) $\vec{a}(\vec{b}+\vec{d})\vec{c} = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{d}\vec{c}$

3) $\vec{a}\vec{b}(\vec{c}+\vec{d}) = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{b}\vec{d}$

Свойства ② и ③ наз. линейностью смеш. произв по каждому множителю.

Док-во св-в линейности смешанного произведения

(2) 1) Док-м для 1-го множителя

$(k\vec{a})\vec{b}\vec{c} = ((k\vec{a})\times\vec{b})\vec{c} = (k(\vec{a}\times\vec{b}))\vec{c} =$

в силу лин-ти век. произв — в силу лин-ти скал. произв

$= k((\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}) = k(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$

2) Док-м для 2-го множителя.

$\vec{a}(k\vec{b})\vec{c} = (k\vec{b})\vec{c}\vec{a} = k(\vec{b}\vec{c}\vec{a}) = k(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$

цикл. перестановке — (2)1) лин-ть для 1-го множ. — цикл перест.

3) Док-м для 3-го множителя. Аналог. 2)

$\vec{a}\vec{b}(k\vec{c}) = (k\vec{c})\vec{a}\vec{b} = k(\vec{c}\vec{a}\vec{b}) = k(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$

(3) 1) $(\vec{a}+\vec{d})\vec{b}\vec{c} = ((\vec{a}+\vec{d})\times\vec{b})\vec{c} = (\vec{a}\times\vec{b}+\vec{d}\times\vec{b})\vec{c} =$

лин-ть век. произв — лин-ть скал. произв

$= (\vec{a}\times\vec{b})\vec{c} + (\vec{d}\times\vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{d}\vec{b}\vec{c}$

2) $\vec{a}(\vec{b}+\vec{d})\vec{c} = (\vec{b}+\vec{d})\vec{c}\vec{a} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} + \vec{d}\vec{c}\vec{a} =$

цикл. перес. — (3)1)

$= \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{d}\vec{c}$

3) Аналог. 2)

$\vec{a}\vec{b}(\vec{c}+\vec{d}) = (\vec{c}+\vec{d})\vec{a}\vec{b} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} + \vec{d}\vec{a}\vec{b} =$

$= \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{b}\vec{d}$.

Ч.Т.Д.

Формулы для вычисление смешанного произведения в правом ортонормир. базисе

Пусть $\vec{a}=\{a_1, a_2, a_3\}$

$\vec{b}=\{b_1, b_2, b_3\}$

$\vec{c}=\{c_1, c_2, c_3\}$

в правом ортонормир. базисе.

Тогда $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$.

Док-во. Исп. ф-лы для скал. и вект. произв.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a}\times\vec{b})\vec{c} =$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\vec{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{a}\times\vec{b} = \left\{ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right\}$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} c_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} c_3 \overset{\text{исп. разлож. по 3 й строке}}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

ч.т.д.