Лекции 4-5

Аналитическая геометрия

Аффинная система координат. Координаты точек.

Опр.

Аффинной	Прямоугольной
системой координат наз. совокупность	
1) точки (наз. началом системы к-т) и	
2) базиса	2) ортонормир. базиса.

Обозначения.

На прям.:

$O\vec{e}$	$O\vec{i}$

На плоскости:

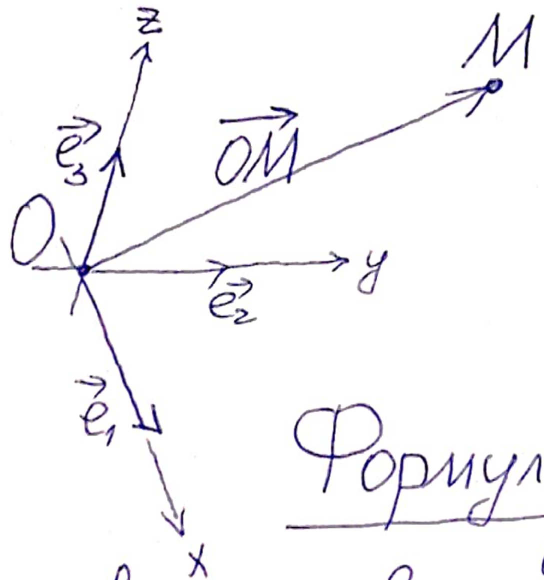
$O\vec{e}_1\vec{e}_2$	$O\vec{i}\vec{j}$

В пр-ве:

$O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$	$O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$

Прямоуг. система координат явл. частным случаем аффинной.

Опр. Координатами т. M в афф. системе координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ наз. координаты её радиус-вектора $\vec{OM}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.



$M(x,y,z)$ в сист. к-т $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$

$\Updownarrow$

$\vec{OM}\{x,y,z\}$ в базисе $\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$

Формулы преобразование к-т

(без док-ва)

векторов	точек
Пусть	
$\vec{m}\{x,y,z\}$ в баз. $\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$	$M(x,y,z)$ в сист. к-т $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$
$\vec{m}\{x',y',z'\}$ в баз. $\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'\vec{e}_3{}'$	$M(x',y',z')$ в сист. к-т $O'\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'\vec{e}_3{}'$

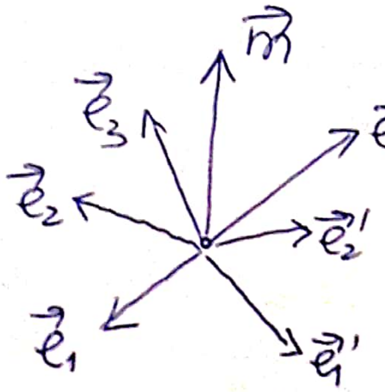
Тогда

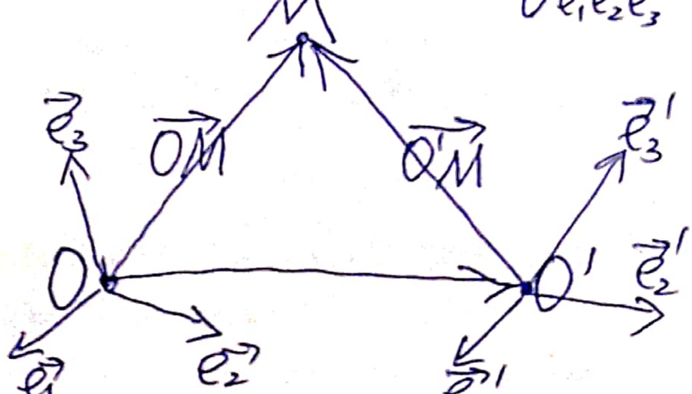
$$\begin{cases} x = c_{11}x' + c_{12}y' + c_{13}z' \\ y = c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23}z' \\ z = c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z' \end{cases}$$

к-ты $\vec{e}_1{}'$, к-ты $\vec{e}_2{}'$, к-ты $\vec{e}_3{}'$ в базисе $\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$

$$\begin{cases} x = c_{11}x' + c_{12}y' + c_{13}z' + x_0 \\ y = c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23}z' + y_0 \\ z = c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z' + z_0 \end{cases}$$

к-ты $\vec{e}_1{}'$, к-ты $\vec{e}_2{}'$, к-ты $\vec{e}_3{}'$ в базисе $\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$; к-ты т. O' в сист. к-т $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$





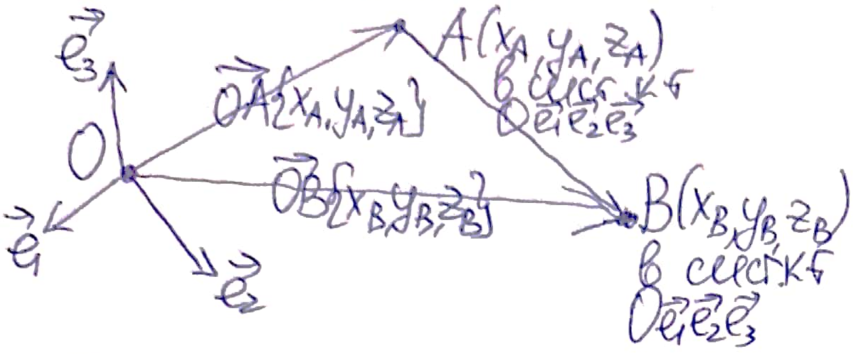
Зам. В матричном виде:

$X = T_{B\to B'}X'$ | $X = T_{B\to B'}X' + X_0$

где $T_{B\to B'}$ – матрица перехода от базиса $B=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ к базису $B'=(\vec{e}_1{}',\vec{e}_2{}',\vec{e}_3{}')$

Простейшие формулы.

1 Координаты вектора $\vec{AB}$ через координаты точек A и B.



$$\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{AB}=\{x_B-x_A,\ y_B-y_A,\ z_B-z_A\}$$

в базисе $\vec e_1\vec e_2\vec e_3$

2 Длина отрезка AB через координаты точек A и B в прямоугольной сист. к-т $O\vec i\vec j\vec k$

$$|AB|=|\vec{AB}|=\sqrt{\vec{AB}\vec{AB}} \underset{\uparrow}{=} \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

в ортонорм. базисе $\vec i\vec j\vec k$

3 Деление отрезка в данном отношении

Пусть $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M(x, y, z)$ в сист. к-т $O\vec e_1\vec e_2\vec e_3$, $M\in[M_1M_2]$, $|M_1M|:|MM_2|=p:q$.

Тогда $\boxed{x=\dfrac{qx_1+px_2}{p+q},\ y=\dfrac{qy_1+py_2}{p+q},\ z=\dfrac{qz_1+pz_2}{p+q}}$.

$$M_1 \xrightarrow{pk} M \xrightarrow{qk} M_2$$

Частный случай: M – середина $[M_1M_2]\Rightarrow$

$\Rightarrow p=q \Rightarrow \boxed{x=\dfrac{x_1+x_2}{2},\ y=\dfrac{y_1+y_2}{2},\ z=\dfrac{z_1+z_2}{2}}$

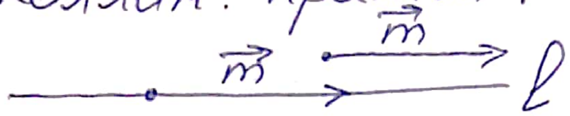
Док-во. $q\vec{M_1M}=p\vec{MM_2}$

$$q\begin{pmatrix}x-x_1\\ y-y_1\\ z-z_1\end{pmatrix}=p\begin{pmatrix}x_2-x\\ y_2-y\\ z_2-z\end{pmatrix}.$$

Выразим x, y, z.
Напр., $qx-qx_1=px_2-px\Rightarrow$
$\Rightarrow x(p+q)=qx_1+px_2\Rightarrow$ всё док-но ч.т.д.

Уравнения

прямой	плоскости
Опр. Направляющим вектором прямой наз. любой ненулевой вектор, коллин. прямой.	



Пусть $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ – аффинная система координат (не обязательно прямоугольная)

I.

Пусть известны

1) точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и

2) направляющий вектор $\vec{m}\{a, b, c\}$ прямой l.	2) пара неколлин. векторов $\vec{m}_1\{a_1, b_1, c_1\}$, $\vec{m}_2\{a_2, b_2, c_2\}$, компланарных плоскости π.

Напишем уравнение, которые удовлетворяют все точки

прямой l | плоскости π

и только они.

1

Приложим к точке M_0

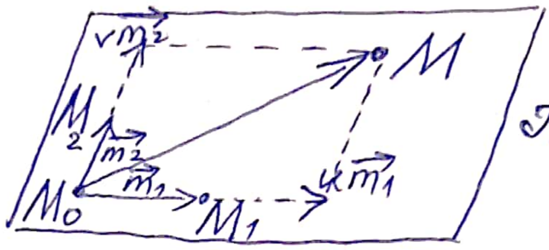
вектор $\vec{m}$,

векторы $\vec{m}_1, \vec{m}_2$,

получим

$\overrightarrow{M_0M_1}$

$\overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{M_0M_2}$



Точка $M(x,y,z) \in l \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} = t\,\overrightarrow{M_0M_1}$,

$t \in \mathbb{R}$

Точка $M(x,y,z) \in \pi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} = u\,\overrightarrow{M_0M_1} + v\,\overrightarrow{M_0M_2}$,

$u, v \in \mathbb{R}$

Запишем эти векторные равенства в координатах:

$$\begin{cases} x - x_0 = ta \\ y - y_0 = tb \\ z - z_0 = tc \end{cases} \quad (0)$$

$$\begin{cases} x - x_0 = ua_1 + va_2 \\ y - y_0 = ub_1 + vb_2 \\ z - z_0 = uc_1 + vc_2 \end{cases} \quad (0')$$

Получим

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}} \quad (1)$$

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + a_1u + a_2v \\ y = y_0 + b_1u + b_2v \\ z = z_0 + c_1u + c_2v \end{cases} \quad u, v \in \mathbb{R}} \quad (1')$$

Для прямой l на плоскости:

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}} \quad (1a)$$

Уравнение (1), (1а) | (1')

наз. **параметрическими уравнениями** **прямой**, | **плоскости**,

заданной точкой и

направляющим вектором | **парой неколлинеарных векторов**

2 Преобразуем ур-я:

$$(1) \Rightarrow \boxed{\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}} \quad (2)$$

$$(1a) \Rightarrow \boxed{\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b}} \quad (2a)$$

Уравнения (2) и (2а) наз. **каноническими уравнениями прямой**

3 Уравнения (0) и (0') равносильны ур-ям

$$\boxed{\begin{vmatrix} x-x_0 & a \\ y-y_0 & b \end{vmatrix} = 0} \quad (3a)$$

для прямой на плоскости.

$$\boxed{\begin{vmatrix} x-x_0 & a_1 & a_2 \\ y-y_0 & b_1 & b_2 \\ z-z_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0} \quad (3)$$

Преобразуем уравнения:

$$b(x-x_0)-a(y-y_0)=0$$

$$\underbrace{b}_{A}x-\underbrace{a}_{B}y\underbrace{-bx_0+ay_0}_{C}=0$$

переобозначим

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}(x-x_0)-\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}(y-y_0)+$$

$$+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}(z-z_0)=0$$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}_{A}x-\underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}_{B}y+\underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}_{C}z+$$

$$+\underbrace{\text{свободный член}}_{D}=0$$

Получим

$$\boxed{Ax+By+C=0} \quad (4a)$$

$$\boxed{Ax+By+Cz+D=0} \quad (4')$$

Уравнения (4a) и (4') наз. <u>общими уравнениями</u> <u>прямой на плоскости</u>. | <u>плоскости</u>.

<u>Зам.</u> Вектор $\vec{m}\{-B, A\}=\{a, b\}$ из общего ур-я (4a) явл. <u>направляющим вектором прямой напр.</u>

$\boxed{4}$ Запишем ур-я (1) и (1)' в виде:

$$\boxed{\vec{r}=\vec{r_0}+\vec{m}t,\ t\in\mathbb{R}} \quad (5)$$

$$\boxed{\vec{r}=\vec{r_0}+\vec{m_1}u+\vec{m_2}v,\ u, v\in\mathbb{R}} \quad (5')$$

где $\vec{r}$ и $\vec{r_0}$ — радиус-векторы точек M и M_0

ур-я (5) и (5') наз. <u>векторными уравнениями</u> <u>прямой</u> | <u>плоскости</u>

5 Пусть в уравнениях (4а) и (4') все коэф-ты $\neq 0$. Преобразуем общее уравнение:

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1 \qquad \Bigg| \qquad \frac{x}{-\frac{D}{A}} + \frac{y}{-\frac{D}{B}} + \frac{z}{-\frac{D}{C}} = 1$$

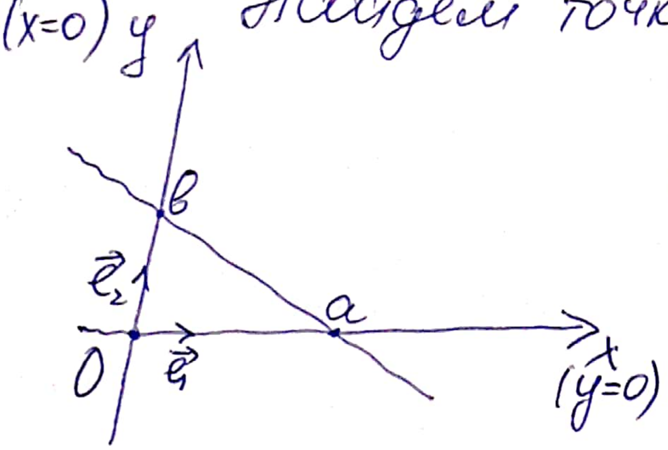
$$a \quad b \qquad\qquad a \quad b \quad c$$

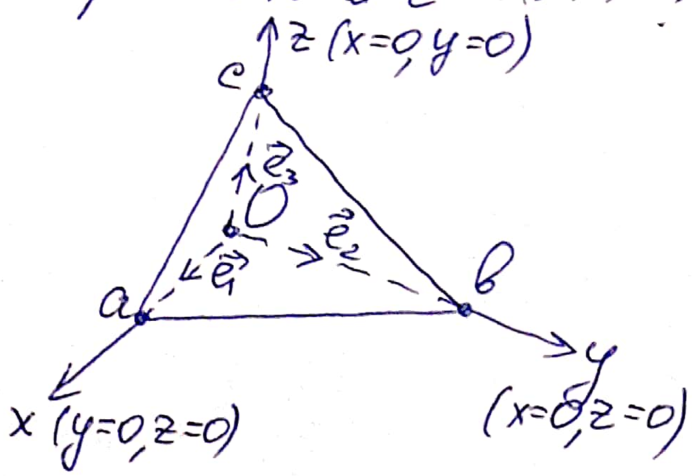
Переобозначим коэф-ты, получим:

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1} \quad (6a) \qquad \Bigg| \qquad \boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1} \quad (6')$$

Уравнения (6а) и (6') наз. уравнением прямой (на плоскости) | плоскости в отрезках.

Найдём точки пересечения с осями к.





II

Пусть известны

2 точки

$M_1(x_1, y_1, z_1)$

$M_2(x_2, y_2, z_2)$

прямой l.

3 точки

$M_1(x_1, y_1, z_1)$

$M_2(x_2, y_2, z_2)$

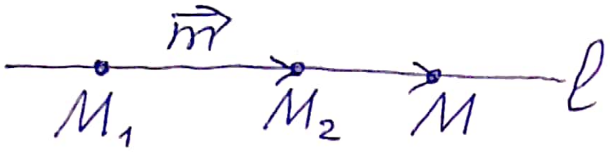
$M_3(x_3, y_3, z_3)$

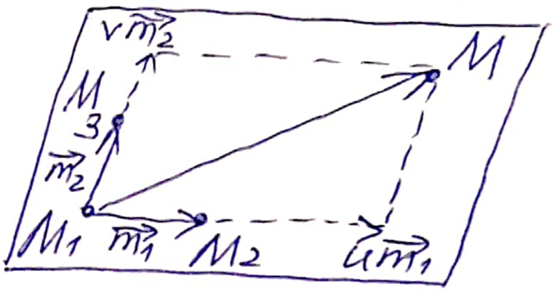
плоскости π.

Напишем уравнения, которым удовлетворяют все точки

прямой l | плоскости π

и только они.





Рассмотрим

$\vec{m} = \overrightarrow{M_1M_2}$ | $\vec{m}_1 = \overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{m}_2 = \overrightarrow{M_1M_3}$

1 Тогда по аналогии с п. I получим

$$\boxed{\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t, \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}} \qquad (7)$$

$$\boxed{\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)u + (x_3 - x_1)v \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)u + (y_3 - y_1)v, \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)u + (z_3 - z_1)v \end{cases} \quad u, v \in \mathbb{R}} \qquad (7')$$

Для прямой l на плоскости:

$$\boxed{\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}} \qquad (7a)$$

Уравнения

(7), (7a) | (7')

наз. параметрическими уравнениями

прямой, | плоскости,

заданной

двумя | тремя

точками

2 Преобразуем (или из (2) и (2a))

$$(7) \Rightarrow \boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}} \quad (8)$$

$$(7a) \Rightarrow \boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}} \quad (8a)$$

Ур-я (8) и (8a) наз. ур-ями прямой, зад. 2-мя точками (исторически).

3 Из (3a) и (3') получим:

$$\boxed{\begin{vmatrix} x-x_1 & x_2-x_1 \\ y-y_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix}=0} \quad (9a)$$

$$\boxed{\begin{vmatrix} x-x_1 & x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ y-y_1 & y_2-y_1 & y_3-y_1 \\ z-z_1 & z_2-z_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0} \quad (9')$$

Из (9a) и (9') можно получить общие уравнения (4a) и (4') прямой на плоскости и плоскости и т.д.

4 Из (5) и (5') — векторные уравнения

$$\boxed{\vec{r}=\vec{r}_1+(\vec{r}_2-\vec{r}_1)t,\ t\in\mathbb{R}} \quad (10)$$

$$\boxed{\vec{r}=\vec{r}_1+(\vec{r}_2-\vec{r}_1)u+(\vec{r}_3-\vec{r}_1)v,\ u,v\in\mathbb{R}} \quad (10')$$

где $\vec{r}_i$ — радиус-векторы точек M_i.

Пусть

$O\vec{i}\vec{j}$	$O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$

прямоугольная система координат.

Опр. Нормальным вектором

прямой	плоскости

наз. любой ненулевой вектор, ⊥-ный этой

прямой.	плоскости.

III

Пусть известны
1) точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и
2) норм. вектор

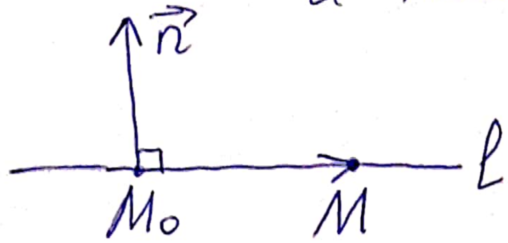
$\vec{n}\{A, B\}$ прямой	$\vec{n}\{A, B, C\}$ плоскости.

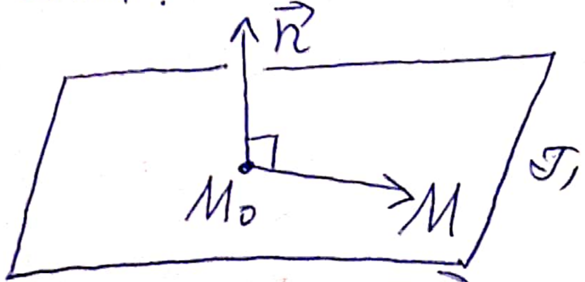
Напишем ур-е, которому удовл. все точки

прямой ℓ	плоскости π

и только они.

1)





$M \in \ell \Leftrightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M} \Leftrightarrow$	$M \in \pi \Leftrightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \vec{n}\,\overrightarrow{M_0M} = 0$, т.е.	$\Leftrightarrow \vec{n}\,\overrightarrow{M_0M} = 0$, т.е.
$\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)=0}$ (11a)	$\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0}$ (11')

Уравнение

(11а) | (11')

наз. уравнением

прямой на пл. , | плоскости,

заданной точкой и норм. вектором

2 Преобразуем уравнение:

$\underbrace{Ax+By-Ax_0-By_0}=0$ | $Ax+By+Cz\underbrace{-Ax_0-By_0-Cz_0}=0$

переобозн. C | переобозн. D

Получим

общие уравнение

$\boxed{Ax+By+C=0}$ (4а) | $\boxed{Ax+By+Cz+D=0}$ (4')

в прямоугольной сист. к-т.

Зам. Вектор

$\vec{n}\{A,B\}$ | $\vec{n}\{A,B,C\}$

явл. нормальным вектором

прямой на пл. | плоскости

(если общее ур-е записано в прямоуг. сист. к-т)

3 Преобразуем (4а) и (4'):

$Ax+By=-C$ | $Ax+By+Cz=-D$

Можно считать, что (иначе умн. ур-е на -1):

$-C>0$ | $-D>0$

Найдём

$|\vec{n}|=\sqrt{A^2+B^2}$ | $|\vec{n}|=\sqrt{A^2+B^2+C^2}$

и разделим:

$$\underbrace{\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}}_{\cos\alpha}x+\underbrace{\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}}_{\cos\beta}y=\underbrace{\frac{-C}{\sqrt{A^2+B^2}}}_{p} \quad \Bigg| \quad \underbrace{\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}_{\cos\alpha}x+\underbrace{\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}_{\cos\beta}y+\underbrace{\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}_{\cos\gamma}z=\underbrace{\frac{-D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}_{p}$$

(переобозначим)

Получим

$$\boxed{\cos\alpha\cdot x+\cos\beta\cdot y=p} \quad (12a) \quad \Bigg| \quad \boxed{\cos\alpha\cdot x+\cos\beta\cdot y+\cos\gamma\cdot z=p} \quad (12')$$

Уравнения (12a) и (12') наз <u>нормальными уравнениями прямой на пл.</u> и <u>плоскости</u>

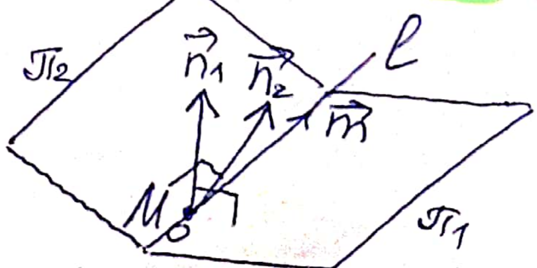
<u>Зам.</u> α,β,γ – углы между $\vec n$ и $\vec i,\vec j,\vec k$, $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора $\vec n$; можно док, что p – это расстояние между l и т. O | между π и т. O.

Общие уравнения прямой в пр-ве:

$$\boxed{\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}} \quad (13)$$

где (A_1,B_1,C_1) не пропорц. (A_2,B_2,C_2).

в аффинной сист. координат $O\vec e_1\vec e_2\vec e_3$.



Точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$ – это любое частное решение (13), напр. вектор $\vec m=\left\{\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}A_1 & C_1\\ A_2 & C_2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}\right\}$.

Если сист. к-т $O\vec i\vec j\vec k$, то $\vec m=\vec n_1\times\vec n_2$.