Лекция 6

Взаимное расположение двух прямых на плоскости | плоскостей, заданных общими уравнениями

Пусть

$l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$, | $\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$,

$l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$ | $\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

прямые на плоскости | плоскости в пр-ве, заданные в аффинной системе координат.

Тогда

① $l_1 \equiv l_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$, (совпадают) | ① $\pi_1 \equiv \pi_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$,

② $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$, | ② $\pi_1 \parallel \pi_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$,

③ $l_1 \cap l_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$. | ③ $\pi_1 \cap \pi_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ или $\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ или $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$.

Если система координат прямоугольная, то

④ $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ | ④ $\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

Док-во.

① ($\Leftarrow$) Пусть все коэф-ты уравнений пропорциональны, т.е.

$A_1=kA_2,\ B_1=kB_2,\ C_1=kC_2$ | и $D_1=kD_2$

Подставим эти равенства в ур-я

$l_1: kA_2x+kB_2y+kC_2=0$ | $\pi_1: kA_2x+kB_2y+kC_2z+kD_2=0$

Сократим на k, получим ур-е

$l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$ | $\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

т.е. все решения 1-го ур-я явл. решениями 2-го ур-я (и наоборот, если домножим на k). Это значает

$l_1\equiv l_2$ | $\pi_1\equiv\pi_2$

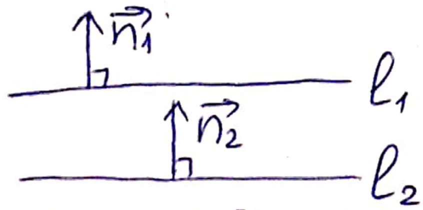
(⇒) Пусть $l_1\equiv l_2$. | (⇒) Пусть $\pi_1\equiv\pi_2$.

Не будем док-ть.

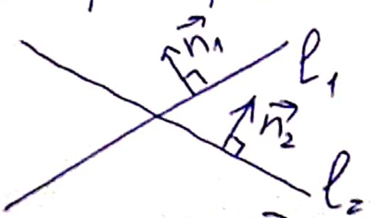
Док-м ②, ③, ④ только для прямоуг. с-к к-т

Рас. нормали

$\vec{n}_1\{A_1,B_1\}$ к l_1,
$\vec{n}_2\{A_2,B_2\}$ к l_2

② 

$l_1\parallel l_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1,\vec{n}_2$ коллин ⇔
⇔ пропорциональны

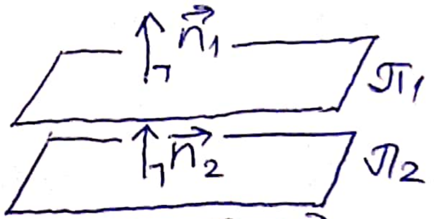
③ 

$l_1\cap l_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1,\vec{n}_2$ не коллин ⇔
⇔ не пропорц.

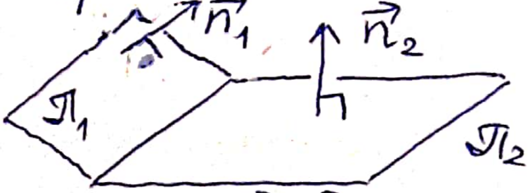
④ 

$l_1\perp l_2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow n_1$ ⇔
$\Leftrightarrow \vec{n}_1\vec{n}_2=0$ Распишем скал. произв.

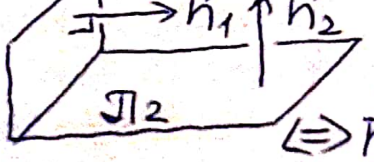
$\vec{n}_1\{A_1,B_1,C_1\}$ к π_1
$\vec{n}_2\{A_2,B_2,C_2\}$ к π_2

② 

$\pi_1\parallel\pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1,\vec{n}_2$ коллин ⇔
⇔ пропорц.

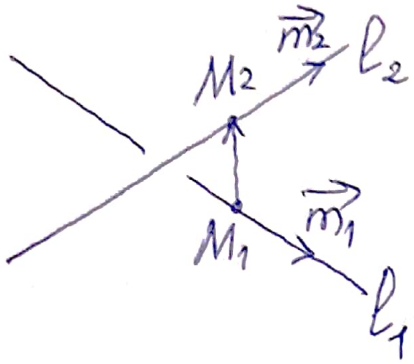


$\pi_1\cap\pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1,\vec{n}_2$ неколлин ⇔
⇔ не пропорц.

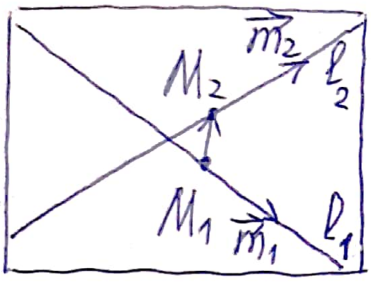


$\pi_1\perp\pi_2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \vec{n}_1\perp\vec{n}_2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \vec{n}_1\vec{n}_2=0$ ч.т.д.

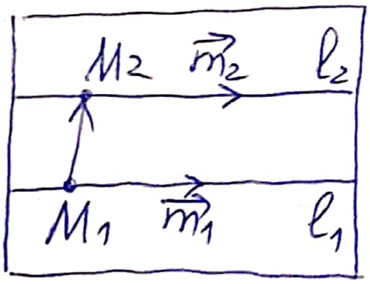
Взаимное расположение прямых в пространстве, заданных точкой и направляющим вектором



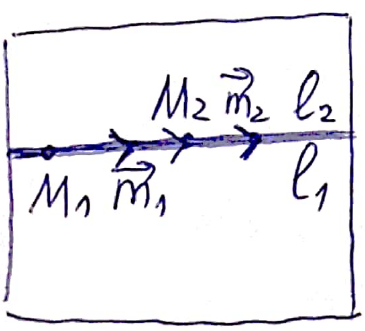
l_1 и l_2 скрещиваются $\Leftrightarrow$ смеш. произв. $\overrightarrow{M_1M_2}\,\vec m_1\,\vec m_2 \neq 0$
(т.е. $\overrightarrow{M_1M_2}, \vec m_1, \vec m_2$ не компланарны)



$l_1 \cap l_2 \Leftrightarrow$ 1) $\overrightarrow{M_1M_2}\,\vec m_1\,\vec m_2 = 0$
(т.е. $\overrightarrow{M_1M_2}, \vec m_1, \vec m_2$ компланарны) и
2) $\vec m_1$ и $\vec m_2$ не коллинеарны.



$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow$ 1) $\vec m_1$ и $\vec m_2$ коллин. и
2) $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\vec m_1$ (или $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\vec m_2$) не коллинеарны



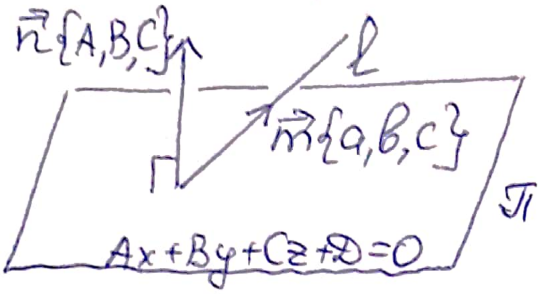
$l_1 \equiv l_2$ (совпадают) $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{M_1M_2}, \vec m_1, \vec m_2$ коллинеарны.

Условие принадлежности двух прямых одной плоскости

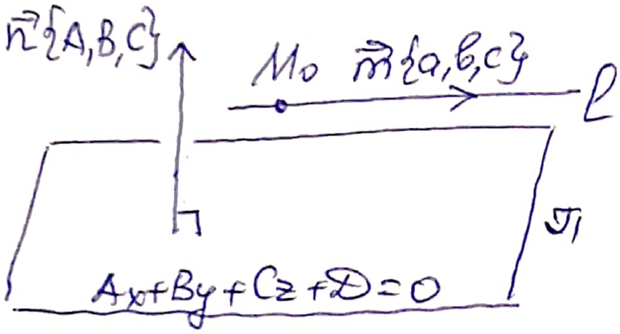
l_1 и l_2 лежат в одной пл. $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{M_1M_2}\,\vec m_1\,\vec m_2 = 0$
(т.е. $\overrightarrow{M_1M_2}, \vec m_1, \vec m_2$ компланарны)

(Рисунки — это три последних рисунка)

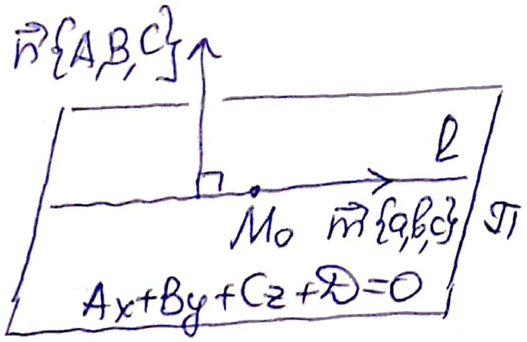
Взаимное расположение прямой, заданной точкой и направл. вектором, и плоскости, заданной общим уравнением, в прямоугольной системе координат



$\ell \cap \pi \iff Aa+Bb+Cc \neq 0$
(т.е. $\vec{n}\vec{m} \neq 0$)



$\ell \parallel \pi \iff$ 1) $Aa+Bb+Cc=0$
(т.е. $\vec{n}\vec{m}=0$) и
2) $Ax_0+By_0+Cz_0+D \neq 0$
(т.е. $M_0 \notin \pi$)

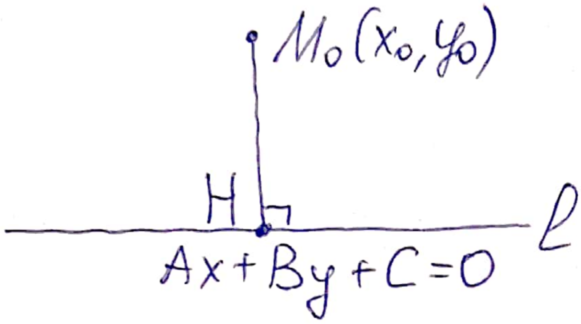


$\ell \subset \pi \iff$ 1) $Aa+Bb+Cc=0$
(прямая лежит в плоскости)
(т.е. $\vec{n}\vec{m}=0$) и
2) $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$
(т.е. $M_0 \in \pi$)

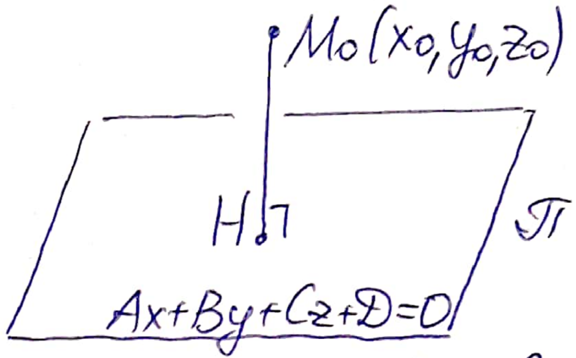
Зам. Верно в произвольной аффинной системе координат.

Расстояние от точки

до прямой на плоскости, заданной общим уравнением в прямоугольной системе координат	до плоскости,



$$\rho(M_0,\ell)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$



$$\rho(M_0,\pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Доказательство (для плоскости, для прямой аналог)

1) $\rho(M_0,\pi)=|\overrightarrow{HM_0}|$, где $\overrightarrow{HM_0}\{x_0-x_H, y_0-y_H, z_0-z_H\}$.

Рас. нормаль $\vec{n}\{A,B,C\}$.

Возможны 2 случая: $\vec{n}\uparrow\uparrow\overrightarrow{HM_0}$ и $\vec{n}\uparrow\downarrow\overrightarrow{HM_0}$.

Найдём $\vec{n}\cdot\overrightarrow{HM_0}=|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{HM_0}|\cdot\cos\underbrace{(\widehat{\vec{n},\overrightarrow{HM_0}})}_{0^\circ \text{ или } 180^\circ}=\pm|\vec{n}||\overrightarrow{HM_0}|$

След., $\underbrace{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{HM_0}|}_{\text{модуль скал. произв.}}=|\vec{n}||\overrightarrow{HM_0}|$

Выразим $|\overrightarrow{HM_0}|=\dfrac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{HM_0}|}{|\vec{n}|}$

2) Знаменатель $|\vec{n}|=\sqrt{A^2+B^2+C^2}$.

3) Числитель: $\vec{n}\cdot\overrightarrow{HM_0}=A(x_0-x_H)+B(y_0-y_H)+C(z_0-z_H)=$

$=Ax_0+By_0+Cz_0-\underbrace{(Ax_H+By_H+Cz_H)}_{=-D \text{ т.к. } H\in\pi\ (\Rightarrow Ax_H+By_H+Cz_H+D=0)}=Ax_0+By_0+Cz_0+D$.

4) Подставим 2), 3) в 1), получим треб. формулу.

ч.т.д.

Следствие

Расстояние между параллельными прямыми на пл, | плоскостями, заданными общими ур-ями в прямоугольной системе координат.

$$\underline{Ax+By+C_1=0} \quad l_1$$

$$\underline{Ax+By+C_2=0} \quad l_2$$

$$\rho(l_1, l_2) = \frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

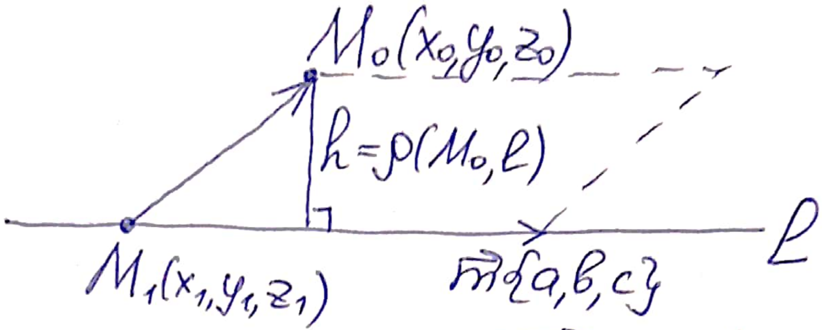
$$\boxed{Ax+By+Cz+D_1=0} \quad \pi_1$$

$$\boxed{Ax+By+Cz+D_2=0} \quad \pi_2$$

$$\rho(\pi_1, \pi_2) = \frac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

(без док-ва)

Расстояние от точки до прямой в пространстве в прямоуг. сист. кт.



$$\rho(M_0,\ell)=\frac{|\overrightarrow{M_1M_0}\times\vec{m}|}{|\vec{m}|}=$$

$$=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_0-y_1 & z_0-z_1 \\ b & c\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_0-x_1 & z_0-z_1 \\ a & c\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_0-x_1 & y_0-y_1 \\ a & b\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Док-во.

1) Рас. параллелограмм, построенный на $\overrightarrow{M_1M_0}$ и $\vec{m}$.

Тогда $\rho(M_0,\ell)=h$ высота паралл-ма.

Найдём

$$h=\frac{S_{\text{паралл-ма на } \overrightarrow{M_1M_0},\vec{m}}}{|\vec{m}|}=\frac{|\overrightarrow{M_1M_0}\times\vec{m}|}{|\vec{m}|}$$

2) Знаменатель: $|\vec{m}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

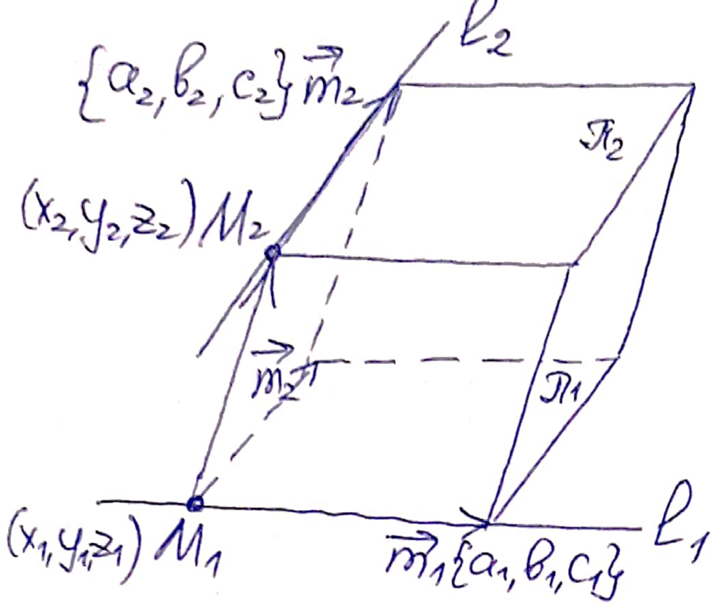
3) Числитель: $\overrightarrow{M_1M_0}\times\vec{m}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_0-x_1 & y_0-y_1 & z_0-z_1 \\ a & b & c\end{vmatrix}=$

$$=\begin{vmatrix} y_0-y_1 & z_0-z_1 \\ b & c\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} x_0-x_1 & z_0-z_1 \\ a & c\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} x_0-x_1 & y_0-y_1 \\ a & b\end{vmatrix}\vec{k}\Rightarrow|\overrightarrow{M_1M_0}|=\sqrt{\text{сумма квадратов коорд.}}$$

4) Подставим 2), 3) в 1).

Ч.т.д.

Расстояние между скрещивающимися прямыми в пространстве в прямоуг. системе к-т.



$$\rho(l_1, l_2) = \frac{|\overrightarrow{M_1M_2}\,\vec{m}_1\,\vec{m}_2|}{|\vec{m}_1 \times \vec{m}_2|} = \frac{\left|\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}\right|}{\sqrt{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2}}$$

Док-во. 1) Рас. параллелепипед, постр. на $\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{m}_1, \vec{m}_2$.

Пусть π_1 и π_2 – плоскости нижнего и верхнего оснований (см. рис.). Тогда $\rho(l_1, l_2) = \rho(M_2, \pi_1) = h_{\text{параллелепипеда на } \overrightarrow{M_1M_2}, \vec{m}_1, \vec{m}_2}$

Найдём $h = \dfrac{V_{\text{паралл-да на } \overrightarrow{M_1M_2}, \vec{m}_1, \vec{m}_2}}{S_{\text{паралл-ма на } \vec{m}_1, \vec{m}_2}} = \dfrac{|\overrightarrow{M_1M_2}\,\vec{m}_1\,\vec{m}_2|}{|\vec{m}_1 \times \vec{m}_2|}$

2) Числитель: $|\overrightarrow{M_1M_2}\,\vec{m}_1\,\vec{m}_2| = \left|\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}\right|$

3) Знаменатель:

$\vec{m}_1 \times \vec{m}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\vec{k}$,

$|\vec{m}_1 \times \vec{m}_2| = \sqrt{\text{сумма квадратов координат}}$

4) Подставим 2), 3) в 1). ч.т.д.

Угол между

прямыми на пл.; | плоскостями,

для которых известны нормальные векторы

в прямоуг. системе координат

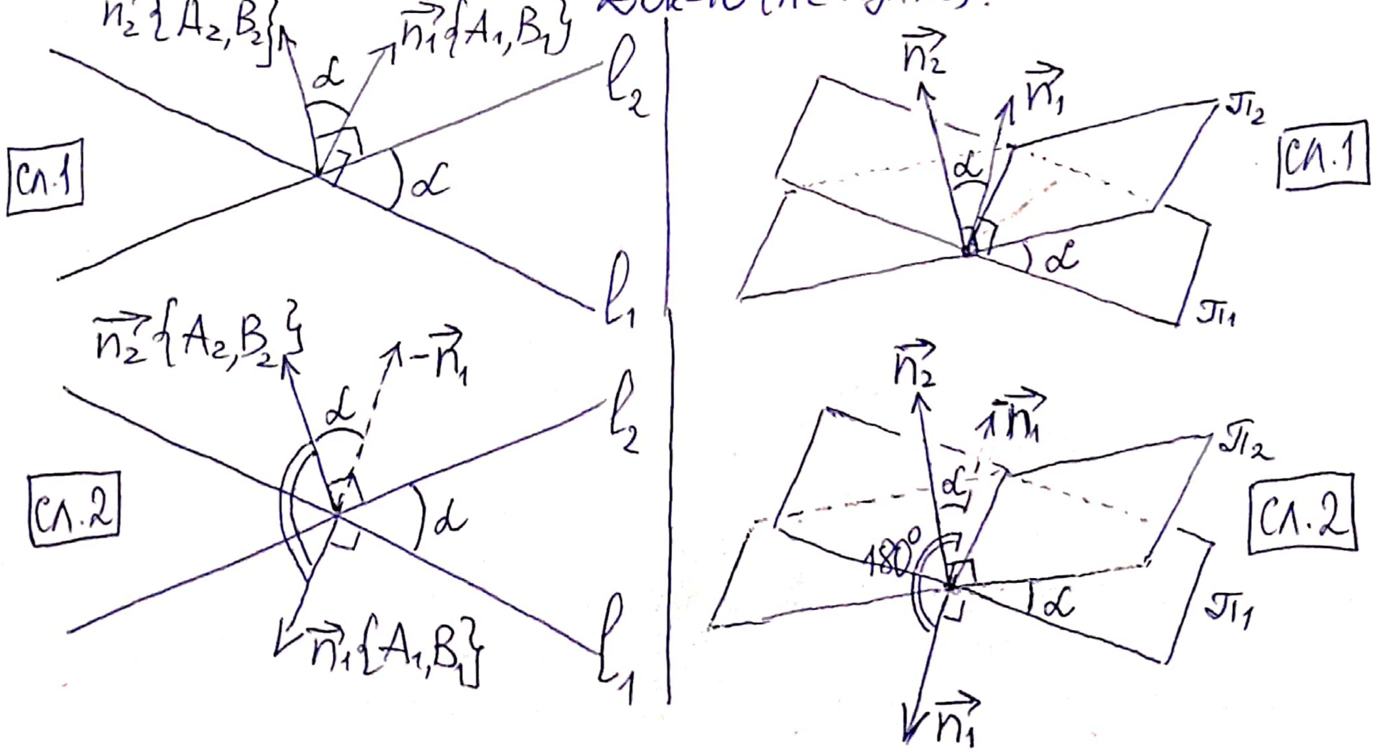
Пусть α — искомый угол.

Тогда $\cos\alpha = |\cos(\widehat{\vec{n_1},\vec{n_2}})| = \dfrac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|} =$

$$= \frac{|A_1A_2+B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}} \quad \Bigg| \quad = \frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

(в прямоуг. системе координат).

Док-во (не нужно).



$$\cos\alpha = \begin{cases} \underbrace{\cos(\widehat{\vec{n_1},\vec{n_2}})}_{>0} & \text{в } \boxed{\text{сл.1}} \\ \cos\left(180^\circ-(\widehat{\vec{n_1},\vec{n_2}})\right) = \underbrace{-\underbrace{\cos(\widehat{\vec{n_1},\vec{n_2}})}_{<0}}_{>0} & \text{в } \boxed{\text{сл.2}} \end{cases} = |\cos(\widehat{\vec{n_1},\vec{n_2}})|$$

где

$\boxed{\text{сл.1}}$ — угол $\angle(\vec{n_1},\vec{n_2})$ острый или прямой,

$\boxed{\text{сл.2}}$ — угол $\angle(\vec{n_1},\vec{n_2})$ тупой.

ч.т.д.

Угол между прямыми (на плоскости или в пространстве) для которых известны направляющие векторы в прямоуг. сист. к-т.

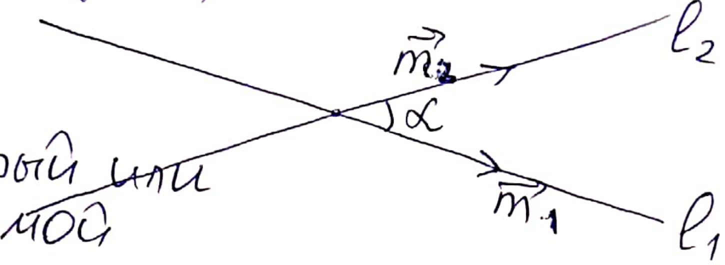
Пусть α – искомый угол.

Тогда $\cos\alpha = |\cos(\vec{m_1}, \vec{m_2})| = \dfrac{|\vec{m_1} \cdot \vec{m_2}|}{|\vec{m_1}| \cdot |\vec{m_2}|}$

Док-во (не нужно).

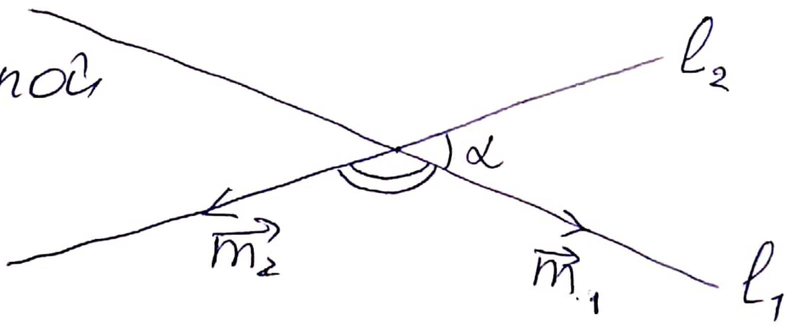
сл. 1:

$\angle(\vec{m_1}, \vec{m_2})$ острый или прямой



сл. 2:

$\angle(\vec{m_1}, \vec{m_2})$ тупой



$$\cos\alpha = \begin{cases} \underbrace{\cos(\widehat{\vec{m_1}, \vec{m_2}})}_{\geq 0} \text{ в сл. 1} \\ \cos(180^\circ - (\widehat{\vec{m_1}, \vec{m_2}})) = \underbrace{-\underbrace{\cos(\widehat{\vec{m_1}, \vec{m_2}})}_{<0}}_{>0} \text{ в сл. 2} \end{cases} =$$

$$= |\cos(\vec{m_1}, \vec{m_2})|$$

ч.т.д.

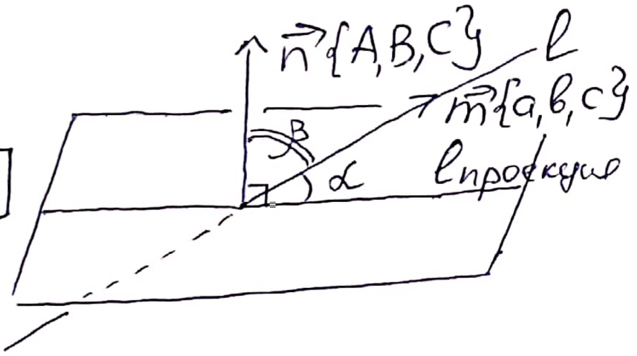
Угол между прямой в пр-ве, для которой известен направляющий вектор, и плоскостью, для которой известна нормаль, в прямоуг. сис. к-т.

Пусть α — искомый угол (он равен углу между прямой и её проекцией на плоскость).

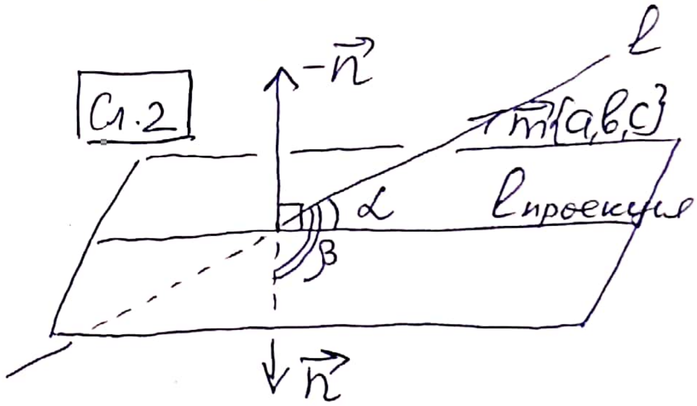
Тогда $\sin\alpha = |\cos(\widehat{\vec{n},\vec{m}})| = \dfrac{|\vec{n}\cdot\vec{m}|}{|\vec{n}||\vec{m}|} =$

$= \dfrac{|Aa+Bb+Cc|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ (в прямоуг. сис. к-т)

Сл 1



Сл.2



Док-во. Пусть β — угол между $\vec{n}$ и $\vec{m}$.
(не нужно) Тогда

$$\sin\alpha = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right), & \text{если } \beta \text{ острый или прямой} \\ \sin\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right), & \text{если } \beta \text{ тупой} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \cos\beta \\ -\cos\beta \end{cases} = |\cos\beta| = |\cos(\widehat{\vec{n},\vec{m}})| = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{m}|}{|\vec{n}||\vec{m}|}.$$

Ч.т.д.