1

Лекция 7-8

Геометрический смысл уравнений

$F(x,y)=0$ на пл.	$F(x,y,z)=0$ в пр-ве

Опр. Алгебраической

кривой на плоскости	поверхностью

наз. множество точек

плоскости,	пространства,

координаты которых относит. нек. аффинной системы координат

$O\vec{e}_1\vec{e}_2$	$O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$

удовлетворяют уравнению

$F(x,y)=0$,	$F(x,y,z)=0$,

где F – многочлен от

двух	трёх

переменных.

Порядком алгебр.

кривой на пл.	поверхности

наз. степень многочлена.

Примеры алгебраических кривых на пл. / поверхностей

① 1-го порядка

$Ax+By+C=0$ Это прямые	$Ax+By+Cz+D=0$ Это плоскости

② 2-го порядка

$Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F=0$	$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Eyz+2Fxz+2Gx+2Hy+2Iz+J=0$
Напр., $x^2+y^2-R^2=0$ Это окружность.	Напр., $x^2+y^2+z^2-R^2=0$ Это сфера.

Подберём систему координат (прямоугольную) так, чтобы уравнение кривой / поверхности имело более простой вид. Такие системы к-т наз. канонич., а уравнения, запис. в этих системах координат, наз. каноническими уравнениями.

Теорема. Существует ровно

9 типов канонич. уравнений кривых 2 порядка на плоскости:

1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипс

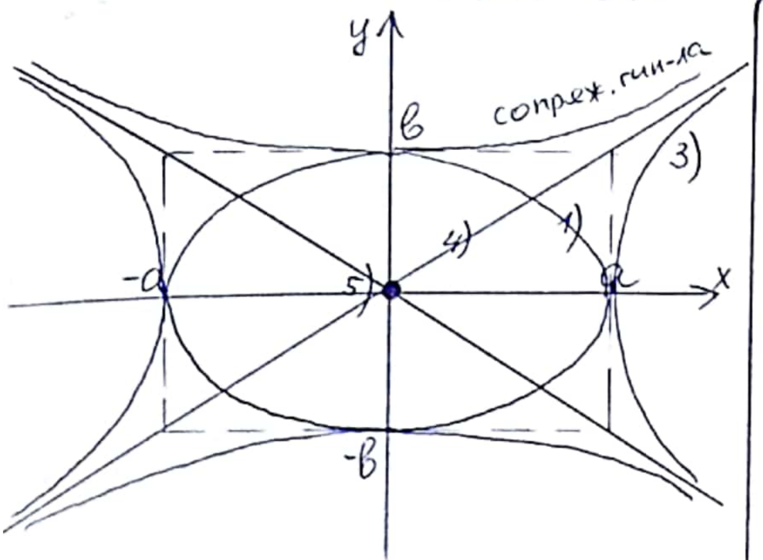
2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ мнимый эллипс

3) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ гипербола

($\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ сопреженная гипербола)

4) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ пара пересек. прямых

5) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ пара мнимых пересек. прямых (это т. $(0,0)$)



17 типов канонич. уравнений поверхностей 2 пор. в пространстве.

1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ эллипсоид

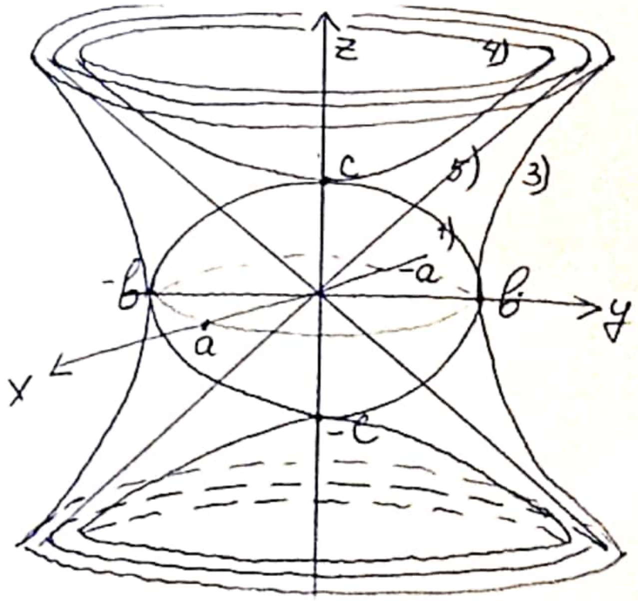
2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ мнимый эллипсоид

3) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ однополостный гиперболоид

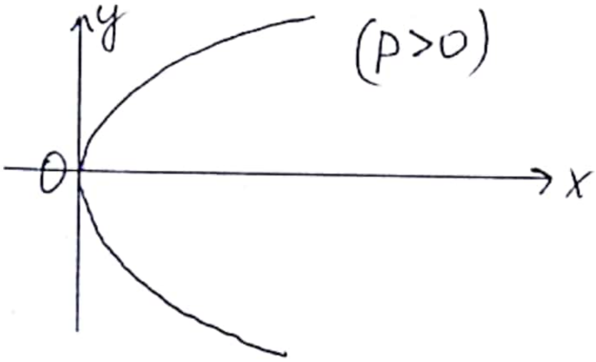
4) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ двуполостный гиперболоид

5) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ конус

6) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ мнимый конус



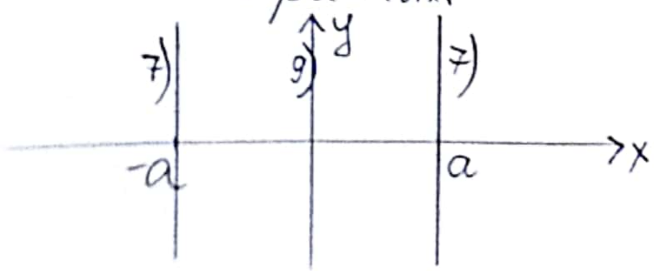
6) $y^2=2px$ парабола $(p>0)$



7) $x^2-a^2=0$ пара параллельных прямых

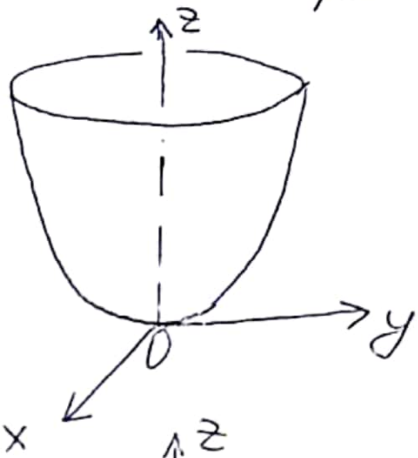
8) $x^2+a^2=0$ пара мнимых параллельных прямых

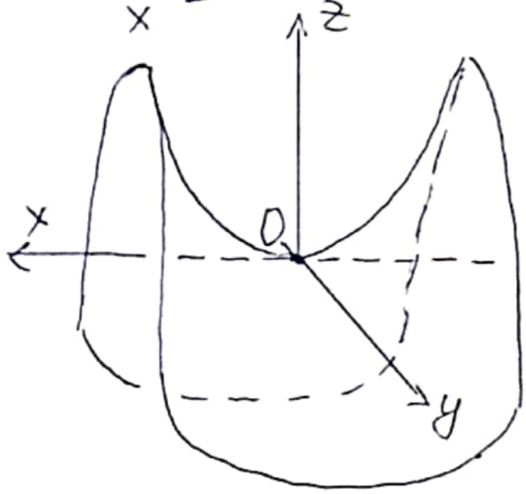
9) $x^2=0$ пара совпадающих прямых



7) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$ эллиптический параболоид

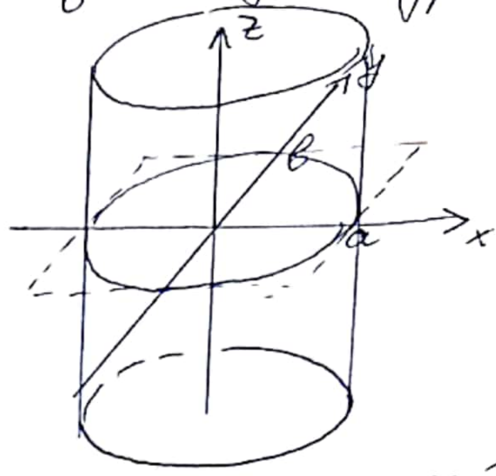
8) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$ гиперболический параболоид





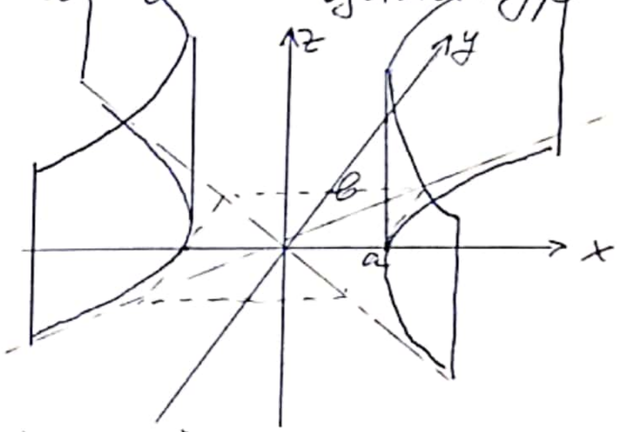
Далее идут 9 поверхностей, канон. уравнение которых такие же как канон. уравнение кривых 2 пор.; т.к. координата z в ур-ях не участв., то z – любое число:

9) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллиптический цилиндр

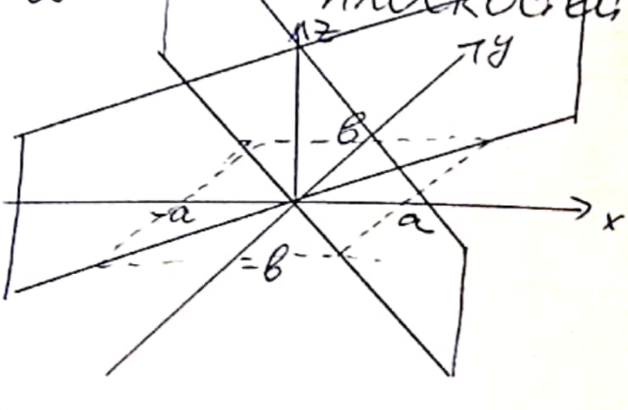


10) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ мнимый эллиптич. цилиндр

11) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ гиперболич. цилиндр

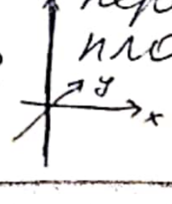


12) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ пара пересек плоскостей

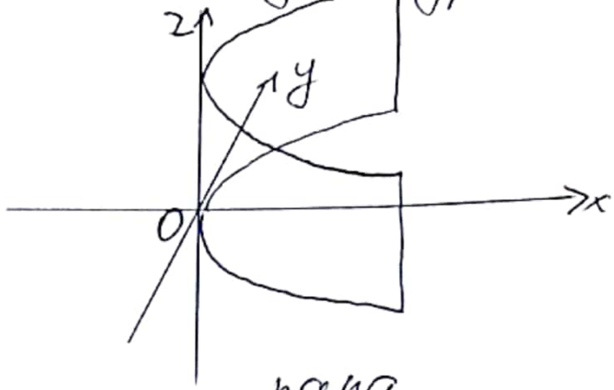


13) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ пара мнимых пересек. плоскостей

($\Rightarrow x=0, y=0,$ z – любое $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ это ось Oz)



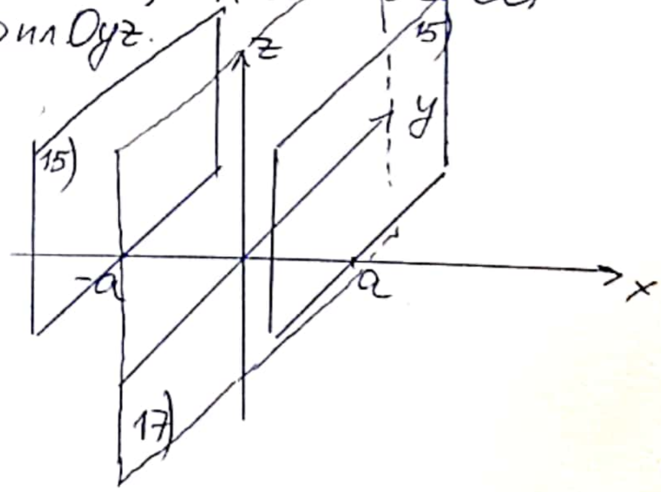
14) $y^2=2px$ параболич. цилиндр



15) $x^2-a^2=0$ пара параллельных плоскостей

16) $x^2+a^2=0$ пара мнимых паралл. плоскостей

17) $x^2=0$ пара совпадающих плоскостей
($x=0$, y,z – любые)
Это пл. Oyz.



Какими свойствами обладают алгебр. кривые и поверхности 2-го порядка?

Лекция 8.

Эллипс, гипербола, парабола.

$\exists$ различные определения эллипса, гиперболы и параболы.

Опр. (аналитическое)

Эллипсом	Гиперболой	Параболой

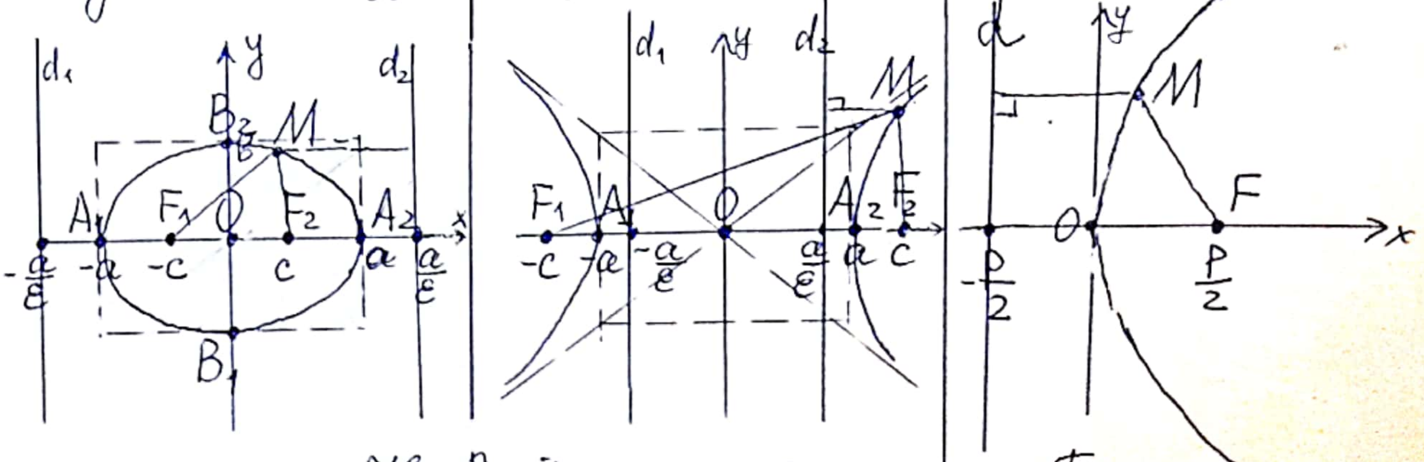
наз. мн-во точек плоскости, координаты которых отн. некоторой прямоугольной системы координат удовл. уравнению

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$y^2=2px$

Числа a, b, p наз. параметрами. $(a>0, b>0)$. Обычно считают $a \geq b$ и $p>0$.

Построим (напр., как объединение графиков 2х функций:

$y=\pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$	$y=\pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}$	$y=\pm\sqrt{2px}$):



Найдём числа

$c=\sqrt{a^2-b^2}$	$c=\sqrt{a^2+b^2}$	Положим
$\varepsilon=\frac{c}{a}<1$	$\varepsilon=\frac{c}{a}>1$	$\varepsilon=1$

Точки

A_1, A_2, B_1, B_2	A_1, A_2	O

наз. <u>вершинами</u>

Точки

F_1, F_2	F_1, F_2	F

наз. <u>фокусами</u>

Прямые

d_1, d_2	d_1, d_2	d

наз. <u>директрисами</u>

Число ε

наз <u>эксцентриситетом</u>

Точка O наз. <u>центром</u>	У параболы нет центра
Отрезки (иногда прямые) A_1A_2, B_1B_2 наз. <u>осями</u>	

Директориальное св-во

Точка M принадлежит

эллипсу (для $a > b$)	гиперболе	параболе

тогда и только тогда когда отношение расстояния от т. M до фокуса F_i к расстоянию от т. M до директрисы d_i <u>постоянно</u> и равно эксцентриситету ε, т.е.

$$\frac{|MF_i|}{\rho(M,d_i)} = \varepsilon$$

, где $\varepsilon < 1$ для элл.,
$\varepsilon > 1$ для гип,
$\varepsilon = 1$ для параб.

Фокальное свойство

Точка M принадлежит эллипсу	гиперболе	Парабола не имеет фокального свойства.
тогда и только тогда, когда сумма	абсолютная величина разности	
расстояний от т. M до фокусов F_1 и F_2 постоянна и равна $2a$, т.е.		
$\|MF_1\|+\|MF_2\|=2a$	$\big\|\|MF_1\|-\|MF_2\|\big\|=2a$	

Опр. (геометрическое)

Эллипсом	Гиперболой	Параболой
наз. мн-во точек плоскости, для которых		
сумма	абс. величина разности	отношение расстояний до данной точки и до данной прямой, равно 1.
расстояний до двух данных точек постоянна.		
(на основе фок. св-ва)		(на основе директ. св-ва)

Зам. Исходя из этих определений можно вывести канонич. ур-я эллипса, гип-лы и параболы (не будем).

Оптическое свойство.

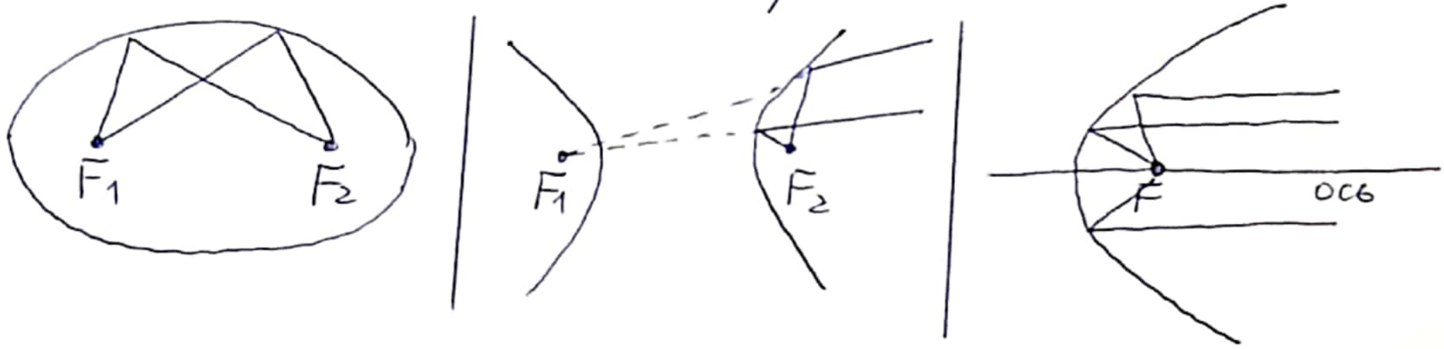
Все лучи, выходящие из фокуса

F_1	F_1	F

после отражения от кривой

сконцентрир. в другом фокусе F_2	распростр. так, будто вышли из другого фокуса	распростр. параллельно оси параболы

и наоборот.



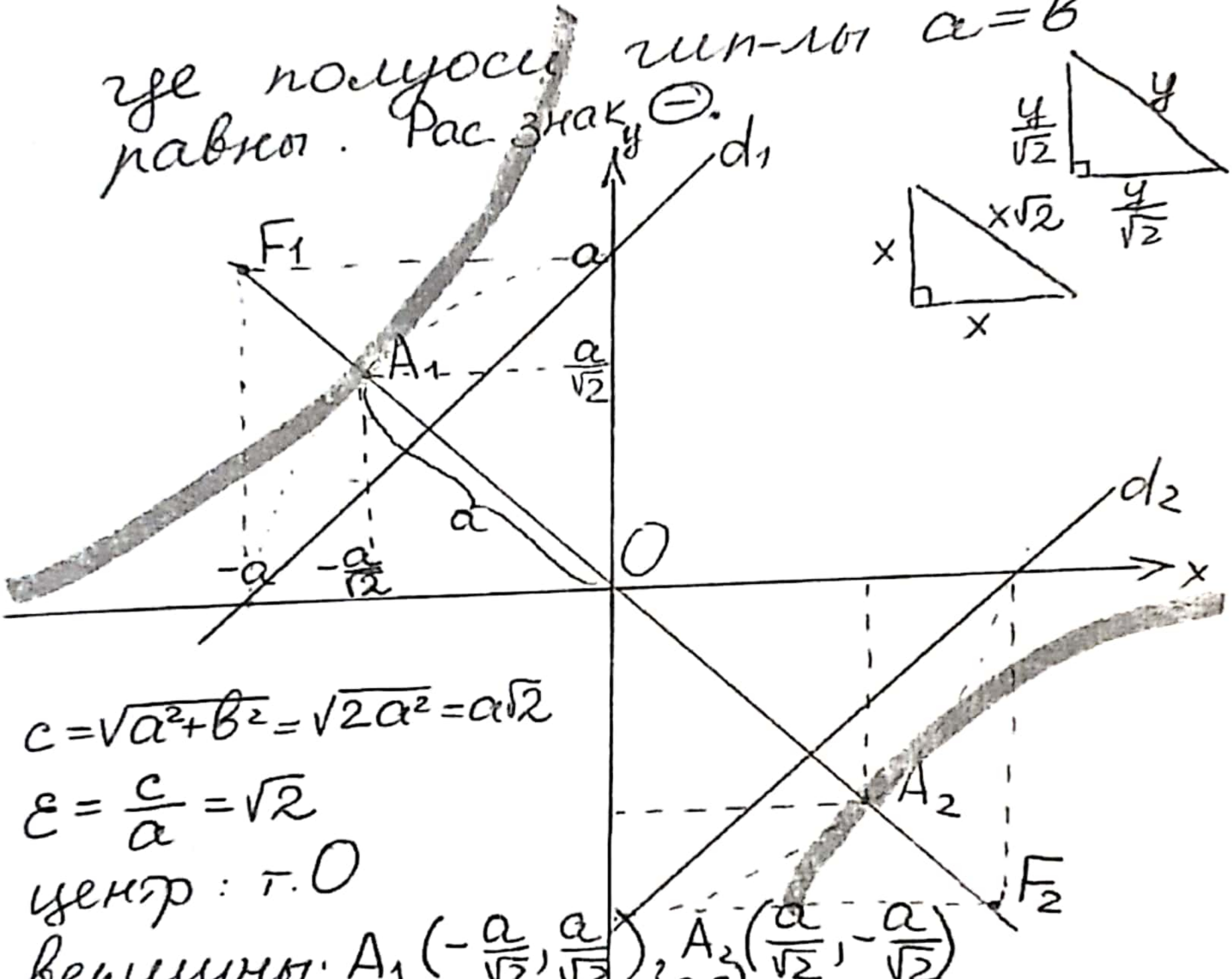
Для гиперболы с параметрами $a = в$ (равнобочной гип-лы) также рас. уравнение в асимптотах.

Рас. его дальше.

Уравнения гиперболы в асимптотах:

$$xy = \pm \frac{a^2}{2},$$

где полуоси гип-лы $a=b$ равны. Рас. знак $\ominus$.



$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2a^2}=a\sqrt2$

$\varepsilon=\frac{c}{a}=\sqrt2$

центр : т. O

вершины: $A_1\left(-\frac{a}{\sqrt2},\frac{a}{\sqrt2}\right)$, $A_2\left(\frac{a}{\sqrt2},-\frac{a}{\sqrt2}\right)$

фокусы : $F_1\left(-\frac{c}{\sqrt2},\frac{c}{\sqrt2}\right)=(-a,a)$, $F_2\left(\frac{c}{\sqrt2},-\frac{c}{\sqrt2}\right)=(a,-a)$

директрисы : $y=x\pm\frac{a}{\varepsilon}\sqrt2=x\pm a$

асимптоты : $x=0$ и $y=0$

Приведение уравнения кривой 2 порядка к каноническому виду (частные случаи):

см. с. 323-329 в учебнике
Канатников, Крищенко „Анал. геом."

Примеры приведения ур-ий кривых 2 пор. к канонич. виду и исследование кривых:

см. с. 329-335 там же.

Про ур-е гиперболы в асимптотах и пример:

см. с. 318-312 там же