Лекция 9.

Метод сечений

Для выяснения формы поверхности по уравнению $F(x,y,z)=0$ рас. пересечение поверхности плоскостями $Ax+By+Cz+D=0$. В секущей плоскости получают уравнение кривой.

Напр., пересекая поверхность плоскостями, параллельными координатным плоскостям, получим для сечения

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ z=c \end{cases}$$

(это ур-е плоскости параллельной пл. Oxy)

уравнение кривой $F(x,y,c)=0$.

По этим кривым судят о форме поверхности.

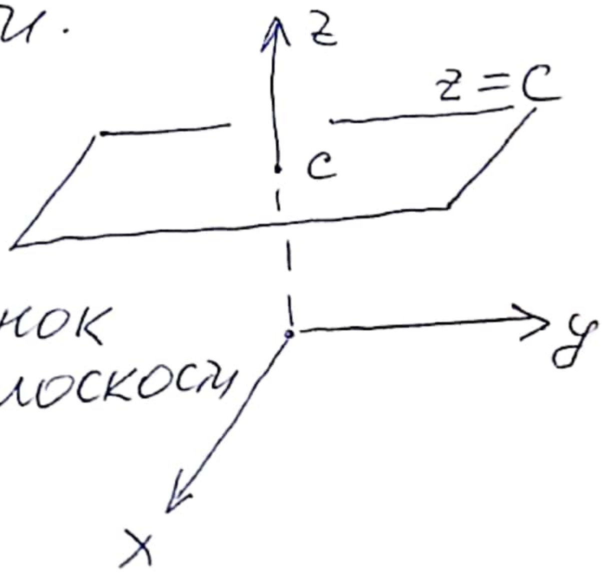
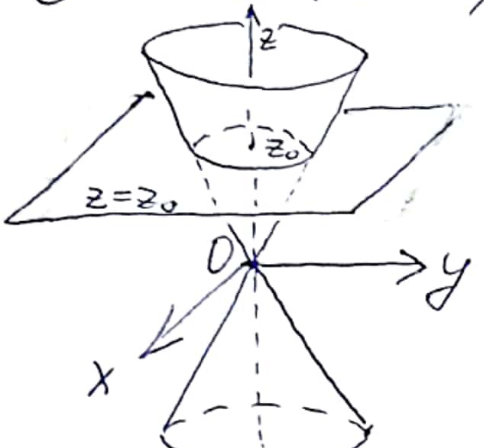


Рисунок секущей плоскости $z=c$.

Конические сечения

Рас. сечения конуса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ различными плоскостями.

① $z=z_0\neq 0 \Rightarrow$ получим в сечении кривую с ур-ем

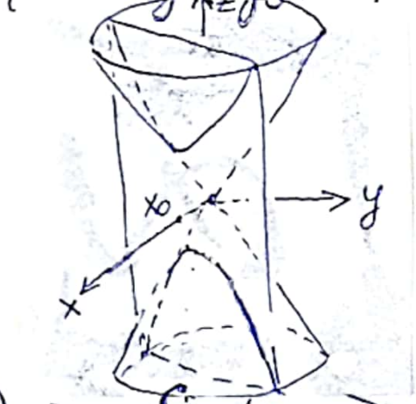


$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}=0 \quad \Big|: \frac{z_0^2}{c^2}\neq 0$$

$$\frac{x^2}{\left(\frac{a z_0}{c}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{b z_0}{c}\right)^2}=1.$$ Это эллипс.

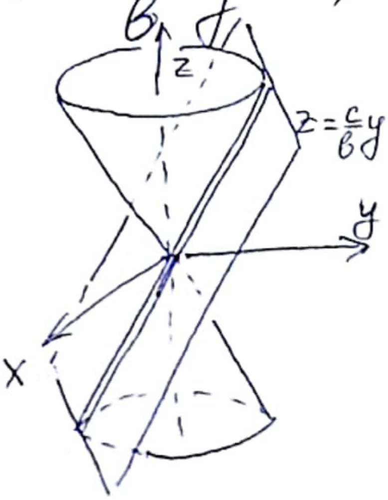
② $x=x_0\neq 0 \Rightarrow \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \quad \Big|: \frac{x_0^2}{a^2}\neq 0$

(или $y=y_0\neq 0$)



$$\frac{y^2}{\left(\frac{b x_0}{a}\right)^2}-\frac{z^2}{\left(\frac{c x_0}{a}\right)^2}=-1.$$ Это сопряж. гип-ла.

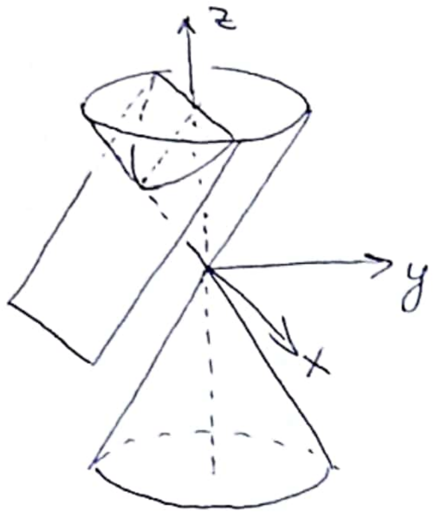
③ $z=\frac{c}{b}y \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\cancel{\frac{y^2}{b^2}}-\cancel{\frac{\left(\frac{c}{b}y\right)^2}{c^2}}=0$



$$\frac{x^2}{a^2}=0$$

$x^2=0$ Это пара совпад. прямых $z=\frac{c}{b}y$ в пл. Oyz.

(4) $z=\frac{c}{b}y+d \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{\left(\frac{c}{b}y+d\right)^2}{c^2}=0$



$$\frac{\quad}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{\left(\frac{c}{b}y\right)^2+2\frac{cd}{b}y+d^2}{c^2}=0$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{2\frac{cd}{b}y+d^2}{c^2}=0$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{2d}{bc}y-\frac{d^2}{c^2}=0$$

Это парабола.

Итак, эллипс, гипербола и парабола явл. коническими сечениями.

Замечание.

Если в (1) $z=0$, то в сечении получим $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ пару мнимых пересек. прямых (точку $(0,0,0)$)

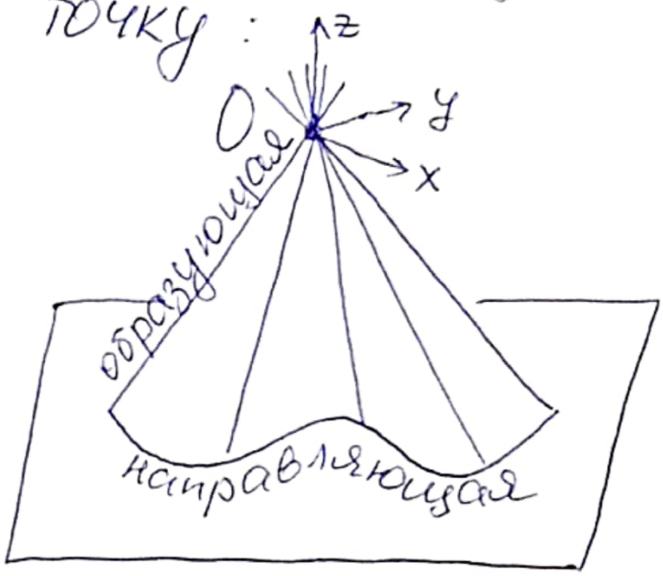
Если в (2) $x=0$ (или $y=0$), то в сечении получим $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ пару пересек. прямых

<u>Почти все</u> кривые 2 пор. явл. коническими сечениями.

Цилиндрическая | Коническая поверхность

получается при движении прямой в пространстве, которая

Цилиндрическая	Коническая
остаётся ‖ своему исходному положению:	проходит через фиксированную точку:



Теорема. Поверхность является

Цилиндрическая	Коническая
цилиндрической	конической

$\Leftrightarrow$ в нек. афф. системе координат её уравнение имеет вид

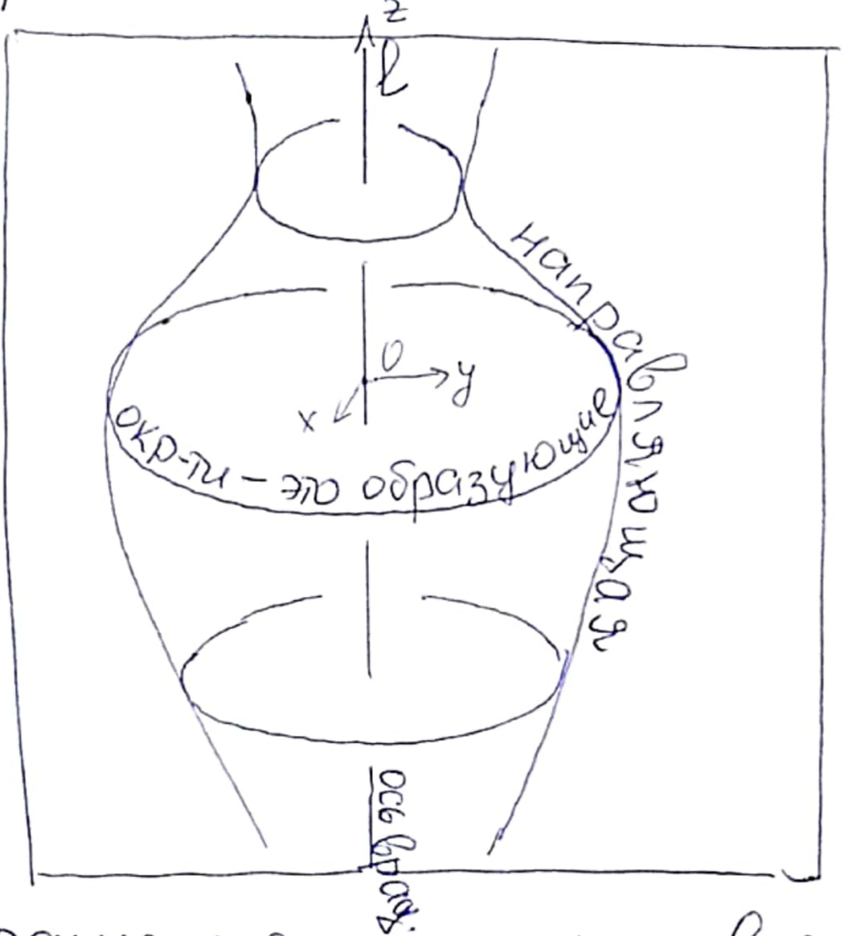
Цилиндрическая	Коническая
$F(x,y)=0$	$F(x,y,z)=0$,
(т.е. ур-е пов-ти совпад. с ур-ем её направляющей)	где F – однородная ф-я от $3^х$ переменных

Примеры

Цилиндрическая	Коническая
Все цилиндрич. пов-ти 2-го порядка ((9) – (17) из пред. лекции)	Конус: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$

Поверхность вращения

образована окружностями с центром на прямой ℓ (оси вращения), которые расположены в плоскостях, $\perp \ell$:



Пов-ть вращения получ. при вращении плоской кривой (направляющей) вокруг прямой ℓ.

<u>Теорема</u>. Поверхность явл. поверхностью вращения $\Leftrightarrow$ в нек. прямоуг. системе координат её ур-е имеет вид $F(x^2+y^2, z)=0$.

<u>Пример</u>. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ эллипсоид вращения.
Его сечения плоскостью $z=z_0$, где $|z_0|<c$, это окружности $x^2+y^2=(1-\frac{z_0^2}{c^2})a^2$.

Приведение уравнений поверхностей к каноническому виду (частные случаи):

см. с. 355-360 в учебнике Канатников, Крищенко „Анал. геом"

Примеры приведения уравнений поверхностей к канонич. виду:

см. с. 361-363 там же