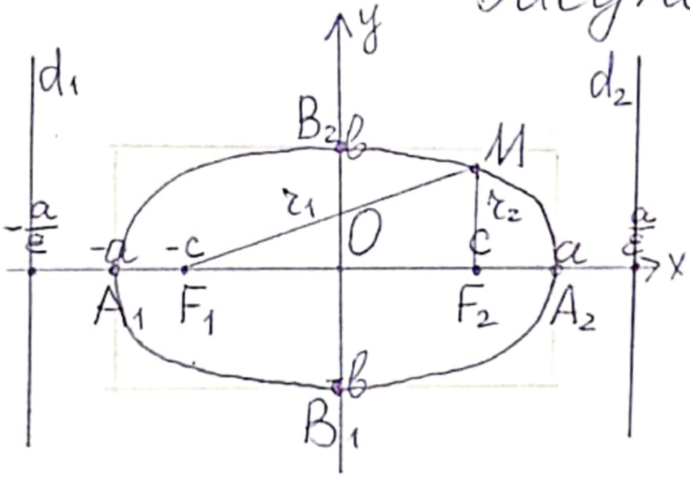
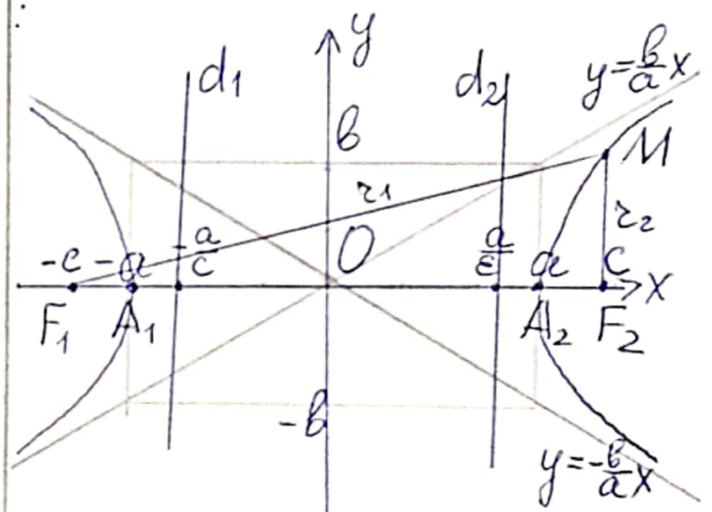
Занятие 10

Кривые 2 порядка

Эллипс ($r_1+r_2=2a$)		Гипербола ($\lvert r_1-r_2\rvert=2a$)
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a\geqslant b)$	Канонич. ур-е:	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
	Рисунок:	
$c=\sqrt{a^2-b^2}$ $\varepsilon=\frac{c}{a}<1$	← Эксцентриситет: →	$c=\sqrt{a^2+b^2}$ $\varepsilon=\frac{c}{a}>1$
A_1, A_2, B_1, B_2	Вершины:	A_1, A_2
F_1, F_2	Фокусы:	F_1, F_2
d_1, d_2	Директрисы:	d_1, d_2
O	Центр:	O

Парабола ($r=h$)

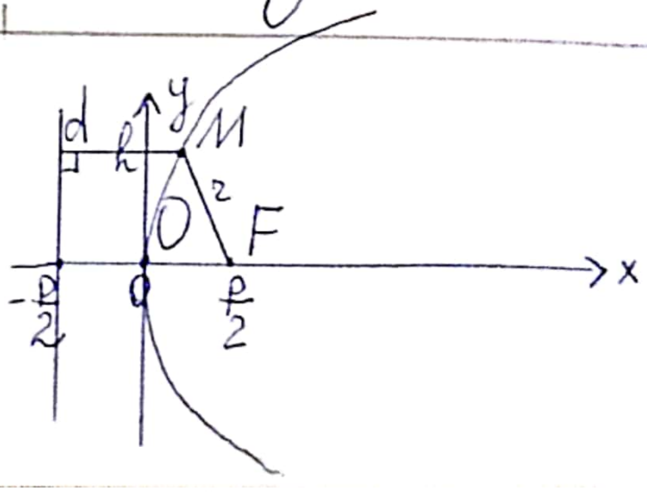
Канонич. ур-е: $y^2=2px$

$\varepsilon=1$

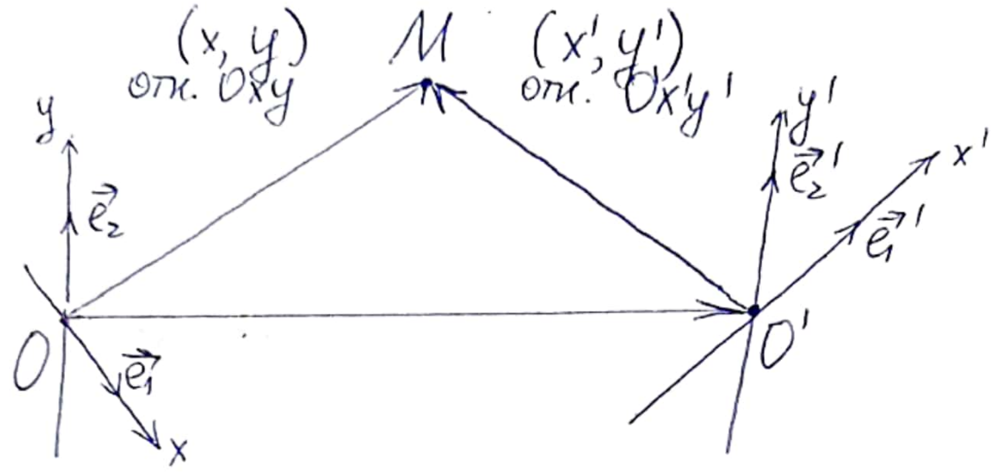
Вершина: O

Фокус: $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$

Директриса: $x=-\frac{p}{2}$



Формулы преобразование координат точек



$$\begin{cases} x = a\,x' + c\,y' + x_0 \\ y = b\,x' + d\,y' + y_0 \end{cases}$$

$\vec{e}_1{}'$ $\vec{e}_2{}'$ относит. $\vec{e}_1, \vec{e}_2$

O' относит. $O\vec{e}_1\vec{e}_2$

Ур-е равнобочной гип-лы в асимптотах

$xy = \pm \frac{a^2}{2}$ (не явл. каноническим); см. задачу ниже

Оси эллипса и гип-лы:

A_1A_2 – большая (1-я)	A_1A_2 – действит. (1-я)
B_1B_2 – малая (2-я)	B_1B_2 – мнимая (2-я)

$\exists$ ровно 9 типов канонических уравнений кривых 2 порядка (см. лекции)

Задачи.

Дано общее уравнение кривой 2 порядка. Привести уравнение к каноническому виду и построить кривую в системе координат Oxy.

Указать

① канонич. вид

② преобразование координат, приводящее к канонич. виду

③

Для эллипса	Для гиперболы	Для параболы
$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$	$\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=1$	$y'^2=2px'$
1) полуоси a, b		1) параметр p
2) эксцентриситет $\varepsilon\left(=\frac{c}{a}\right)$, где		
$c=\sqrt{a^2-b^2}$	$c=\sqrt{a^2+b^2}$	
3) центр		
4) вершины		2) вершину
5) фокусы		3) фокус F
6) директрисы	7) асимптоты для гип-лы	4) директрису d

④ Сделать рисунок.

⑤ Найти расстояние от заданной точки C

Для эллипса и гиперболы	Для параболы
до фокусов	до фокуса и до директрисы

№1

Дано уравнение $4x^2-5y^2-8x+20y-11=0$ (4)

и точка $C\left(1+\frac{\sqrt{15}}{2}, 0\right)$

Решение.

Заметим, что в уравнении нет произведения xy, но есть x^2 и есть y^2, это такой частный случай (см. лекции).

(1) Выделим полные квадраты по x и по y:

$$4(x^2-2x)-5(y^2-4y)-11=0$$

$$4(\underbrace{x^2-2x+1}_{(x-1)^2}-1)-5(\underbrace{y^2-4y+4}_{(y-2)^2}-4)-11=0$$

$$4(x-1)^2-4-5(y-2)^2+20-11=0$$

$$4(x-1)^2-5(y-2)^2=-5 \quad |:5$$

$$\frac{4(x-1)^2}{5}-(y-2)^2=-1$$

$$\frac{(x-1)^2}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}-\frac{(y-2)^2}{1^2}=-1 \leftarrow$$

Это канонич. ур-е сопряженной гип-лы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$

Преобразование координат:

$$\begin{cases} x'=x-1 \\ y'=y-2 \end{cases}$$ ← это перенос сист. к-т Oxy на вектор $\{1,2\}$

Получим

$$\frac{x'^2}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}-\frac{y'^2}{1^2}=-1$$

преобразование координат:

$$\begin{cases} x''=y' \\ y''=-x' \end{cases}$$ ← это поворот сист. к-т $O'x'y'$ на $90°$ против час. стрелки

Получим

$$\frac{y''^2}{\left(\frac{\sqrt5}{2}\right)^2}-\frac{x''^2}{1^2}=-1 \quad \Big| \cdot(-1)$$

$$\boxed{\frac{x''^2}{1^2}-\frac{y''^2}{\left(\frac{\sqrt5}{2}\right)^2}=1}$$

Это канонич. вид.

Это каноническое ур-е гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

② Преобразование, приводящее к канонич. виду:

$$\begin{cases} x''=y'=y-2 \\ y''=-x'=-(x-1) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x''=y-2 \\ y''=-x+1 \end{cases}} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x=-y''+1 \\ y=x''+2 \end{matrix}}$$

③ 1) полуоси: $a=1$, $b=\frac{\sqrt5}{2}$

2) эксцентриситет: $\varepsilon=\frac{c}{a}$, где $c=\sqrt{a^2+b^2}$.

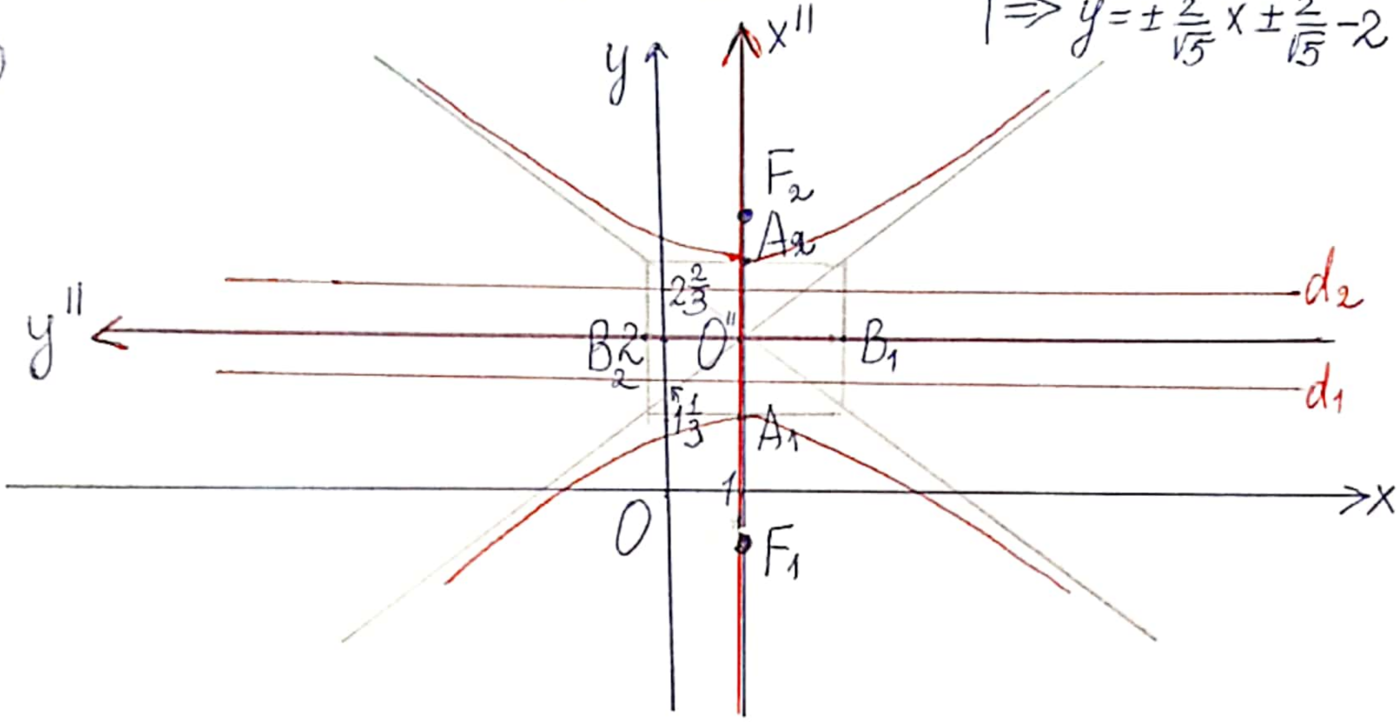
$$c=\sqrt{1^2+\left(\frac{\sqrt5}{2}\right)^2}=\sqrt{1+\frac54}=\sqrt{\frac94}=\frac32 \Rightarrow \boxed{\varepsilon}=\frac{\frac32}{1}=\boxed{\frac32}$$

3) – 6):

Система коорд-т	$O''x''y''$	Oxy
3) Координаты центра	$O''(0,0)$	$O''(1,2)$ Мы пересчитали к-ты по ф-лам в двойной рамочке
4) Коорд-ты вершин	$A_1(-a,0)=(-1,0)$ $A_2(a,0)=(1,0)$	$A_1(1,1)$ $A_2(1,3)$
у гип-лы только 2 вершины A_1 и A_2 → эти нужны для постр. прямоугольника	$B_1(0,-b)=\left(0,-\frac{\sqrt5}{2}\right)$ $B_2(0,b)=\left(0,\frac{\sqrt5}{2}\right)$	$B_1\left(1+\frac{\sqrt5}{2},2\right)$ $B_2\left(1-\frac{\sqrt5}{2},2\right)$
5) Коорд-ты фокусов	$F_1(-c,0)=\left(-\frac32,0\right)$ $F_2(c,0)=\left(\frac32,0\right)$	$F_1\left(1,\frac12\right)$ $F_2\left(1,3\frac12\right)$

в) Уравнения директрис	$x'' = -\frac{a}{\varepsilon} = -\frac{2}{3}$ $x'' = \frac{a}{\varepsilon} = \frac{2}{3}$	$y = -\frac{2}{3}+2 = 1\frac{1}{3}$ $= \frac{2}{3}+2 = 2\frac{2}{3}$
б) Асимптоты	$y'' = \pm\frac{b}{a}x''$	$-x+1 = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}(y-2) \Rightarrow$ $\Rightarrow y = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}x \pm \frac{2}{\sqrt{5}} - 2$

4



$\frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}1$

<u>Пояснение</u>: ф-лы преобраз. коорд-т

$$\boxed{\begin{matrix} x = a\tilde{x} + c\tilde{y} + x_0 \\ y = b\tilde{x} + d\tilde{y} + y_0 \end{matrix}} \Rightarrow \begin{cases} x = 0\,x'' + (-1)\,y'' + 1 \\ y = 1\,x'' + 0\,y'' + 2 \end{cases}$$

$\tilde{e}_1''$ $\tilde{e}_2$ O ; $\underbrace{\vec{e}_1'' \quad \vec{e}_2''}_{\text{бaз. векторы на нов. осях кб}}$ O''

5 $\rho(C,F_1) = \sqrt{\left(1-\left(1+\frac{\sqrt{15}}{2}\right)\right)^2 + \left(\frac{1}{2}-0\right)^2} = \sqrt{\frac{15}{4}+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{16}{4}} = \sqrt{4} = \boxed{2}$

$C\left(1+\frac{\sqrt{15}}{2}, 0\right), F_1\left(1, \frac{1}{2}\right), F_2\left(1, 3\frac{1}{2}\right)$

$\rho(C,F_2) = \sqrt{\left(1-\left(1+\frac{\sqrt{15}}{2}\right)\right)^2 + \left(3\frac{1}{2}-0\right)^2} = \sqrt{\frac{15}{4}+\frac{49}{4}} = \sqrt{\frac{64}{4}} = \sqrt{16} = \boxed{4}$

Задача решена.

№2.

Дано уравнение $xy-x-2y+6=0$

Задание то же.

Решение.

Заметим, что в ур-ии нет x^2 и y^2, но есть xy (такой частный сл. тоже рас. на лекции)

1) Приведём уравнение к виду $\boxed{(x-x_0)(y-y_0)=\pm\frac{a^2}{2}}$

Это $\boxed{\text{ур-е равнобочной гиперболы в асимптотах}}$.

$x(y-1)-2y+6=0$

$x(y-1)-2(y-1+1)+6=0$

$x(y-1)-2(y-1)-2+6=0$

$(x-2)(y-1)+4=0$

$(x-2)(y-1)=-4$

преобразование координат:

$\boxed{\begin{array}{l} x'=x-2 \\ y'=y-1 \end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x=x'+2 \\ y=y'+1 \end{array}}$ (2)

получим ур-е кривой: $\underbrace{\boxed{x'y'=-4}}_{\text{канонич вид}} = -\frac{a^2}{2} \Rightarrow a^2=8 \Downarrow a=2\sqrt{2}$

(3) 1) $\boxed{\begin{array}{l} \text{полуоси}: a=2\sqrt{2} \\ b=a=2\sqrt{2} \end{array}}$

(т.к. гип-ла равнобочная)

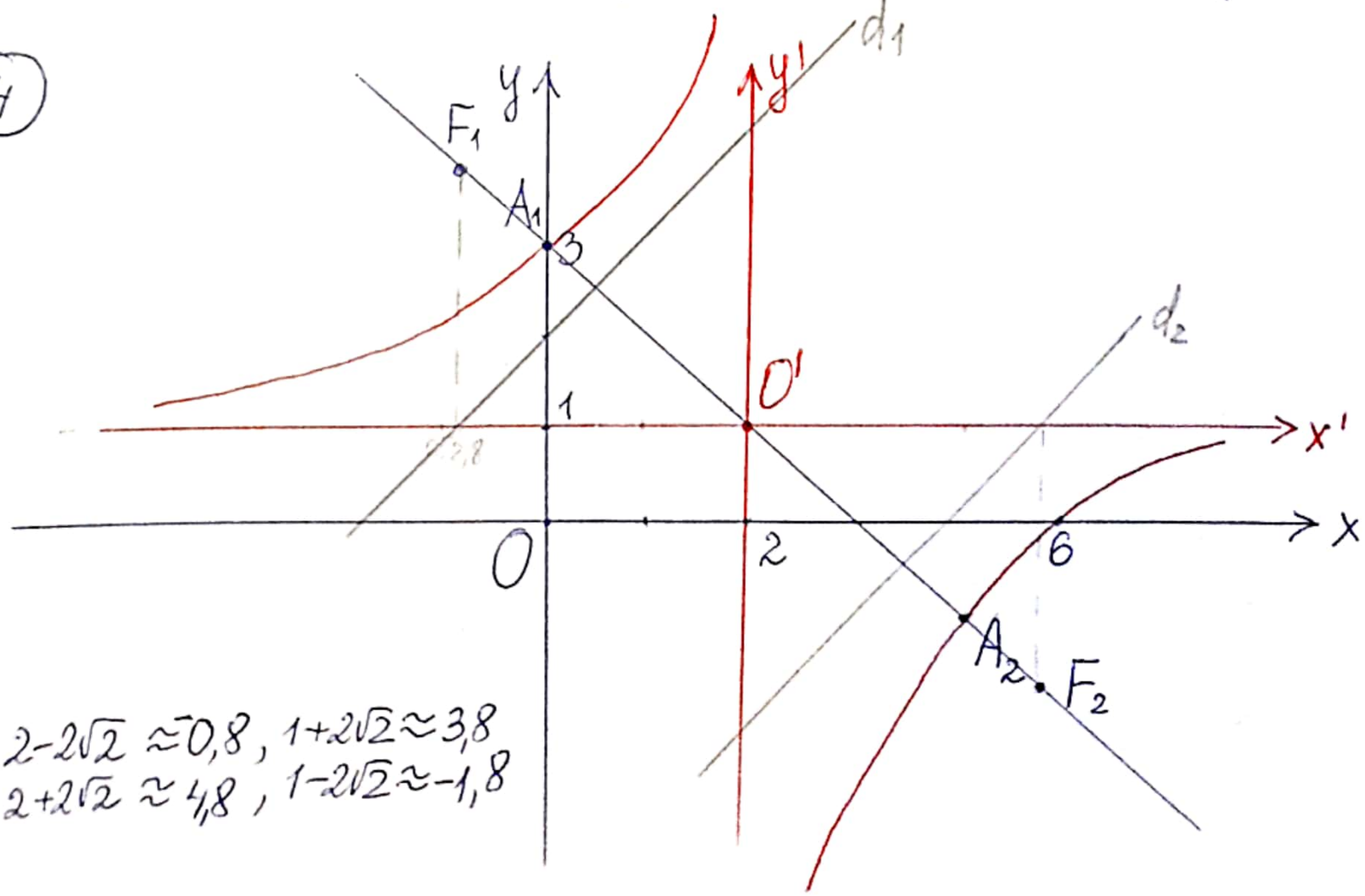
2) эксцентриситет: $\varepsilon=\frac{c}{a}$, где $c=\sqrt{a^2+b^2}$.

$c=\sqrt{8+8}=\sqrt{16}=4 \Rightarrow \varepsilon=\frac{4}{2\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

3) – 6):

Система координат	$O'x'y'$	Oxy
3) Центр	$O'(0,0)$	$O'(2,1)$
4) Вершины	$A_1\left(-\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=(-2,2)$ $A_2\left(\frac{a}{\sqrt{2}},-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=(2,-2)$	$A_1(0,3)$ $A_2(4,-1)$
5) Фокусы	$F_1\left(-\frac{c}{\sqrt{2}},\frac{c}{\sqrt{2}}\right)=(-a,a)=(-2\sqrt{2},2\sqrt{2})$ $F_2\left(\frac{c}{\sqrt{2}},-\frac{c}{\sqrt{2}}\right)=(a,-a)=(2\sqrt{2},-2\sqrt{2})$	$F_1(2-2\sqrt{2},1+2\sqrt{2})$ $F_2(2+2\sqrt{2},1-2\sqrt{2})$
6) Директриса	$y'=x'+\frac{a}{\varepsilon}\sqrt{2}=x'+a=x'+2\sqrt{2}$ $y'=x'-\frac{a}{\varepsilon}\sqrt{2}=x'-a=x'-2\sqrt{2}$	$y-1=x-2+2\sqrt{2}\Rightarrow y=x+2\sqrt{2}-1$ $y-1=x-2-2\sqrt{2}\Rightarrow y=x-2\sqrt{2}-1$
7) Асимптоты	$x'=0$ (ось $O'y'$) $y'=0$ (ось $O'x'$)	$x-2=0\Rightarrow x=2$ $y-1=0\Rightarrow y=1$

4



$2-2\sqrt{2}\approx -0{,}8$, $1+2\sqrt{2}\approx 3{,}8$
$2+2\sqrt{2}\approx 4{,}8$, $1-2\sqrt{2}\approx -1{,}8$

№3.

$x^2+6x+2y+3=0$; $C(-1;1)$

Решение.

Зам., что нет xy и y^2. См. лекции.

1 Выделим полный квадрат по x:

$x^2+2\cdot 3x+9-9+2y+3=0$

$(x+3)^2+2y-6=0$

$(x+3)^2+2(y-3)=0$

$(x+3)^2=-2(y-3)$

$x'^2=-2y'$

Канонич. вид:

$\boxed{x''^2=2y''}$

Преобразование координат:

$\begin{cases} x'=x+3 \\ y'=y-3 \end{cases}$ $\begin{cases} x''=-x' \\ y''=-y' \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x''=-x-3 \\ y''=-y+3 \end{cases}} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=-x''-3 \\ y=-y''+3 \end{cases}}$

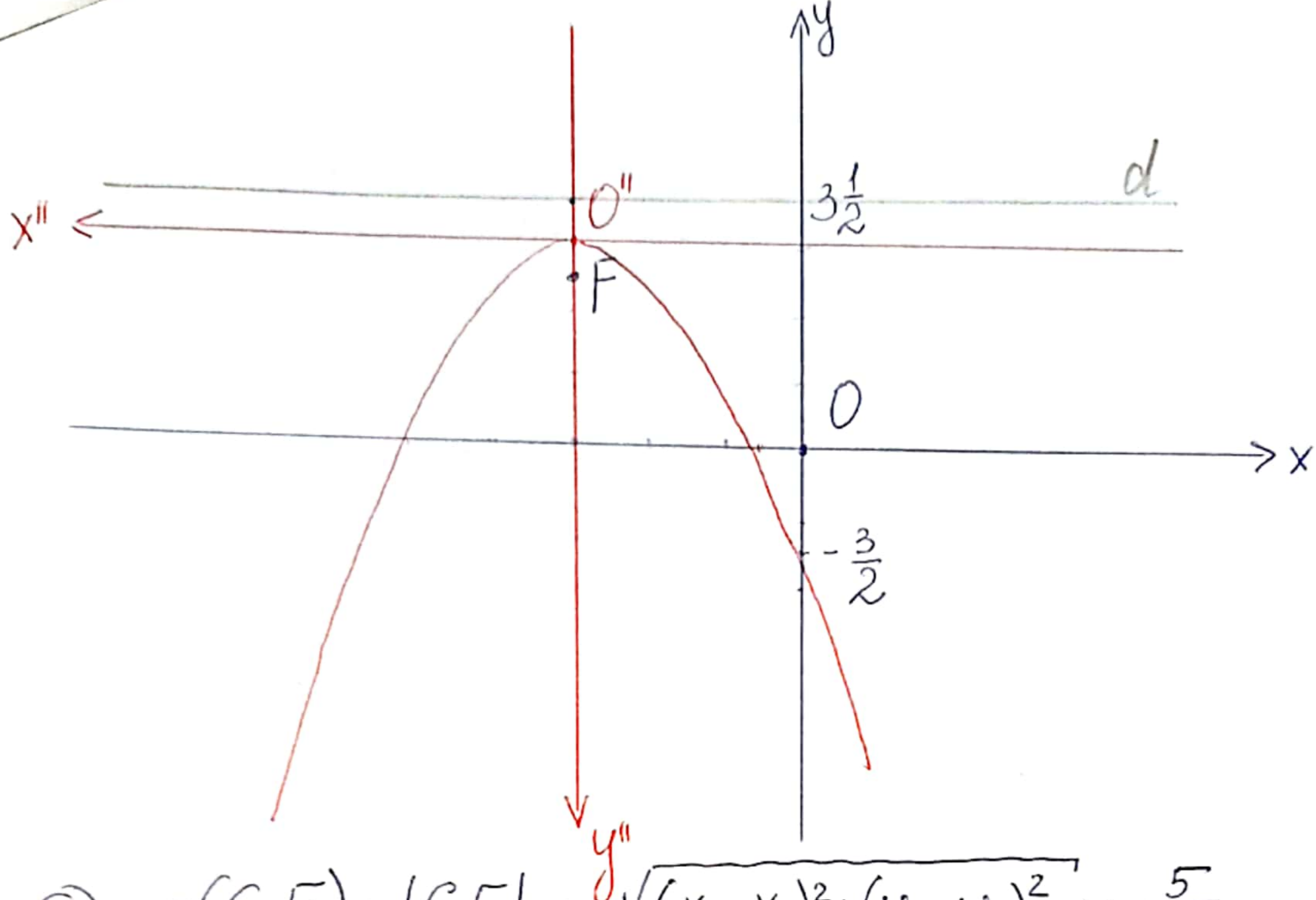
2

3 1) Параметр $p=1$

2), 3), 4):

Система координат	$O''x''y''$	Oxy
2) Вершина	$O''(0,0)$	$O''(-3,3)$
3) Фокус	$F(0,\frac{p}{2})=(0,\frac{1}{2})$	$F(-3,2\frac{1}{2})$
4) Директриса	$y''=-\frac{p}{2}=-\frac{1}{2}$	$-y+3=-\frac{1}{2} \Rightarrow y=3\frac{1}{2}$

4 Рисунок:



5 $\rho(C,F) = |CF| = \sqrt{(x_F - x_C)^2 + (y_F - y_C)^2} = \frac{5}{2}$ подставив

$C(-1,1)$, $F(-3;2\frac{1}{2})$

$\rho(C,d) = \frac{|1 - 3\frac{1}{2}|}{\sqrt{0^2+1^2}} = \frac{2\frac{1}{2}}{1} = 2\frac{1}{2}$

$d: \ y - 3\frac{1}{2} = 0$

Задача решена.

Задачи.

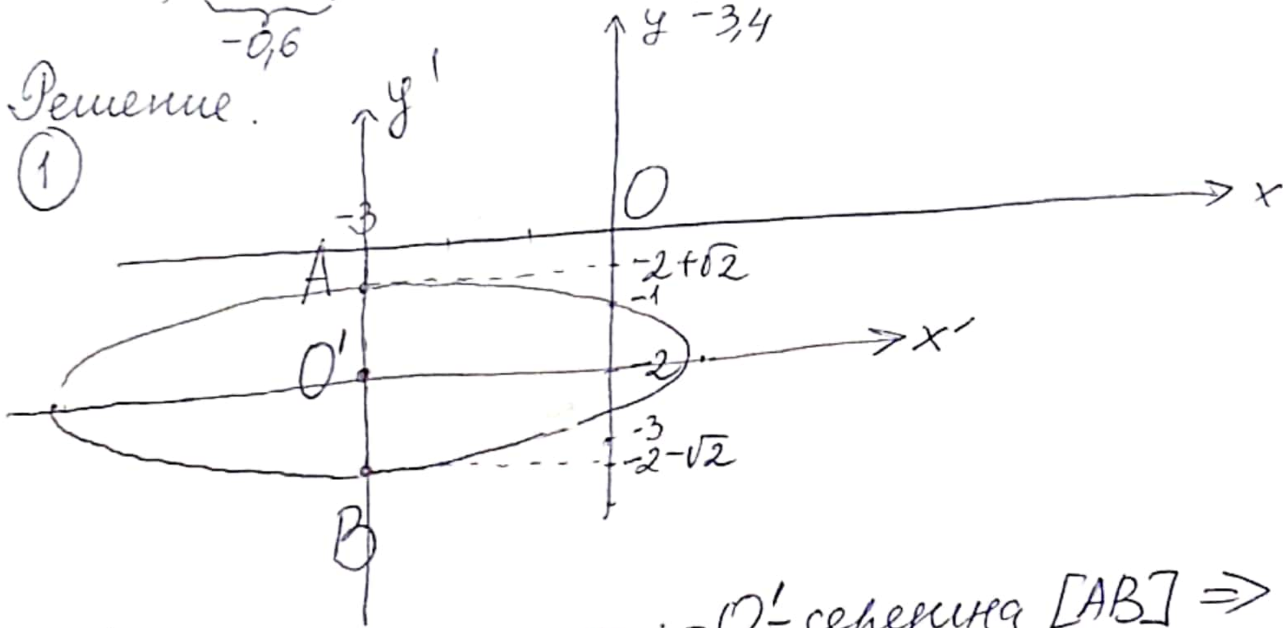
Найти уравнение кривой по её св-вам в системе координат Oxy.

№4.

Эллипс проходит через т. $C(0,-1)$, а его малая ось оканчивается вершинами $A(-3; \underbrace{\sqrt{2}-2}_{-0{,}6})$ и $B(-3, -\underbrace{\sqrt{2}-2}_{-3{,}4})$. Найти ур-е эллипса.

Решение.

1



1) Центр эллипса: т. O' – середина $[AB]$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow O'\left(\frac{-3+(-3)}{2}; \frac{(\cancel{\sqrt{2}}-2)+(-\cancel{\sqrt{2}}-2)}{2}\right)=(-3,-2)$$

2) Полуось (малая) $b = |OA| = |OB| = \sqrt{2}$.

3) Смещенное ур-е эллипса:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{(x+3)^2}{a^2}+\frac{(y+2)^2}{(\sqrt{2})^2}=1$$

4) Найдём a. $C(0,-1) \in$ эллипсу $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{(0+3)^2}{a^2}+\frac{(-1+2)^2}{2}=1; \quad \frac{9}{a^2}=1-\frac{1}{2}; \quad \frac{9}{a^2}=\frac{1}{2} \Rightarrow a=3\sqrt{2} \approx 4{,}2$$

5) Ур-е эллипса: $\boxed{\frac{(x+3)^2}{(3\sqrt{2})^2}+\frac{(y+2)^2}{(\sqrt{2})^2}=1.}$

Дополнительно:

Для данного эллипса найдём преобразование координат, канонич. ур-е, полуоси, эксцентриситет, центр, вершины, фокусы и директрисы; сделаем рисунок. (12)

② Преобразование координат:

$$\begin{cases} x' = x+3 \\ y' = y+2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = x'-3 \\ y = y'-2 \end{cases}}$$

③ Канонич. ур-е: $\dfrac{x'^2}{(3\sqrt{2})^2} + \dfrac{y'^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$

④ 1) Полуоси: $a = 3\sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$

2) Эксцентриситет: $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

$c = \sqrt{18-2} = \sqrt{16} = 4 \Rightarrow \varepsilon = \dfrac{4}{3\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

3)-6) Система коорд-т	$O'_{x'y'}$	Oxy
3) Центр	$O'(0,0)$	$O'(-3,-2)$
4) Вершины	$C(-a,0)=(-3\sqrt{2},0)$ $D(a,0)=(3\sqrt{2},0)$ $A(0,b)=(0,\sqrt{2})$ $B(0,-b)=(0,-\sqrt{2})$	$C(-3\sqrt{3}-3,-2)$ $D(3\sqrt{3}-3,-2)$ $A(-3,\sqrt{2}-2)$ $B(-3,-\sqrt{2}-2)$
5) Фокусы	$F_1(-c,0)=(-4,0)$ $F_2(c,0)=(4,0)$	$F_1(-7,-2)$ $F_2(1,-2)$
6) Директриса	$x' = \pm\dfrac{a}{\varepsilon} = \pm\dfrac{9}{2}$	$x+3 = \pm\dfrac{9}{2} \Rightarrow$ $\Rightarrow x = 3 \pm 4\dfrac{1}{2}$

⑤ Для построения полезно найти точки пересечения с осями координат.

$C\ Oy: x=0 \Rightarrow \dfrac{(0+3)^2}{(3\sqrt{2})^2} + \dfrac{(y+2)^2}{(\sqrt{2})^2} = 1 \Rightarrow y=-1$ и $y=-3$.

Задача решена.

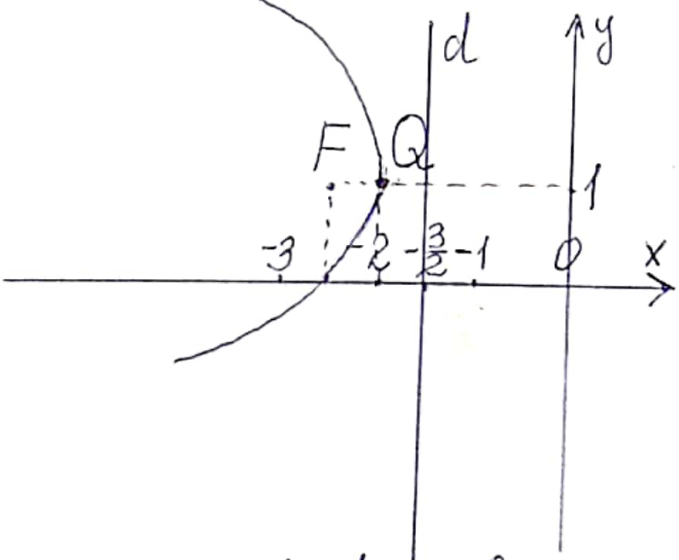
№5.

Парабола проходит через т. $C(-4,-1)$, её директриса имеет уравнение $x+\frac{3}{2}=0$, расстояние от фокуса F до вершины равно $\frac{1}{2}$; вершина лежит во II четверти. Написать уравнение параболы.

Решение.

① Пусть Q - вершина параболы

1) Из усл. $|QF|=\frac{1}{2}$
Из св-в параболы $|QF|=\frac{p}{2}$ $\Bigg\}\Rightarrow p=1$, где p - параметр параболы



2) Ур-е директрисы d по усл. $x=-\frac{3}{2}\Rightarrow$ $\Rightarrow$ ось параболы $\parallel Ox\Rightarrow$ уравнение смещенной параболы $(y-y_0)^2=\pm 2p(x-x_0)$, где знак $+$ (или $-$), если ветви параболы вправо (или влево).

3) Из усл. $|QF|=\frac{1}{2}\Rightarrow$ вершина
$Q(x_0,y_0)=(-1;y_0)$ и ветви параболы „вправо"
или
$Q(x_0,y_0)=(-2,y_0)$ и —"— "— "—„влево"

) По усл. т. $C(-4,-1)\in$ параболе $\Rightarrow Q(x_0,y_0)=$
$=(-2,y_0)$ и ветви „влево".

) Ур-е смещенной параболы с ветвями „влево".
$(y-y_0)^2=-2p(x-x_0)$
$(y-y_0)^2=-2\cdot 1\,(x-(-2))$
$(y-y_0)^2=-2\,(x+2)$

б) Найдём y_0.
По усл. $C(-4,-1) \in$ параболе $\Rightarrow$

$$(-1-y_0)^2 = -2(-4+2)$$

$$(1+y_0)^2 = 4$$

$$1+y_0 = \pm 2$$

$y_0 = \pm 2 - 1 \Rightarrow Q(x_0, y_0) = (-2, 1)$
или
$Q(x_0, y_0) = (-2, -3)$ – не подх., т.к. по условию $Q \in \text{II}$ четв.

След, ур-е параболы:

$$\boxed{(y-1)^2 = -2(x+2)}$$

Для рисунка:
найдём т. пересечения с Ox:

$$y=0 \Rightarrow (0-1)^2 = -2(x+2)$$

$$1 = -2(x+2)$$

$$x+2 = -\frac{1}{2}$$

$$x = -2\frac{1}{2}$$

Задача решена.

№6.

Построить кривую:

$$y = 7 - \frac{3}{2}\sqrt{x^2-6x+13}$$

Решение.

1) Преобразуем уравнение кривой:

$$y-7 = -\frac{3}{2}\sqrt{x^2-6x+13} \quad | \cdot(-2)$$

$$2(7-y) = 3\sqrt{x^2-6x+13} \quad | \ \hat{}2$$

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \begin{cases} 4(7-y)^2 = 9(x^2-6x+13) \\ 7-y \geq 0 \end{cases}$$ ← не забудьте это условие

$\boxed{(a-b)^2 = (b-a)^2}$

(1): $4(y-7)^2 = 9(x^2-6x+9+4)$

$$4(y-7)^2 = 9(x-3)^2+36$$

$$9(x-3)^2 - 4(y-7)^2 = -36 \quad |:36$$

$$\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y-7)^2}{9} = -1$$

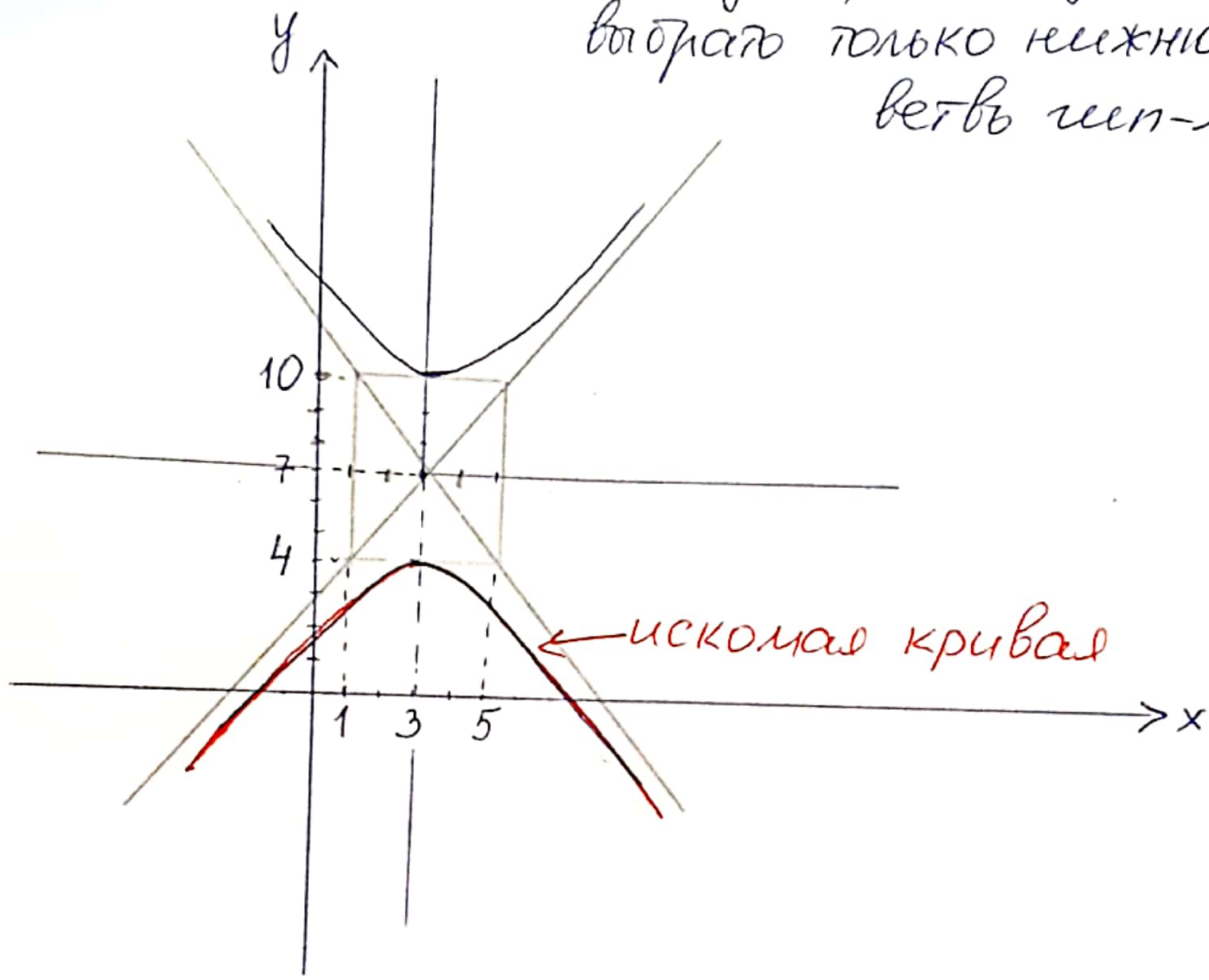
$$\boxed{\frac{(x-3)^2}{2^2} - \frac{(y-7)^2}{3^2} = -1}$$

Это ур-е смещённой сопряженной гиперболы с центром $(3,7)$ и параметрами $a=2$, $b=3$.

(2): $\boxed{y \leq 7}$

Построение.

Т.к. $y \le 7$, то надо выбрать только нижнюю ветвь гип-лы.



Точки пересечения с осями координат.

С Ox: $y=0$ $\quad \frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(0-7)^2}{9} = -1 \quad | \cdot 36$

$$9(x-3)^2 - 49\cdot 4 = -36$$

$$9(x-3)^2 = 160 \quad (= \cdot 10)$$

$$(x-3)^2 = \frac{160}{9}$$

$$x-3 = \pm \frac{\sqrt{10}}{3}$$

$$x = 3 \pm \frac{\sqrt{10}}{3}$$

С Oy: $x=0$ $\quad \frac{9}{4} - \frac{(y-7)^2}{9} = -1 \quad | \cdot 36$

$$81 - 4(y-7)^2 = -36$$

$$(y-7)^2 = 30$$

$$y-7 = \pm\sqrt{30} \Rightarrow y = 7 \pm \sqrt{30}$$

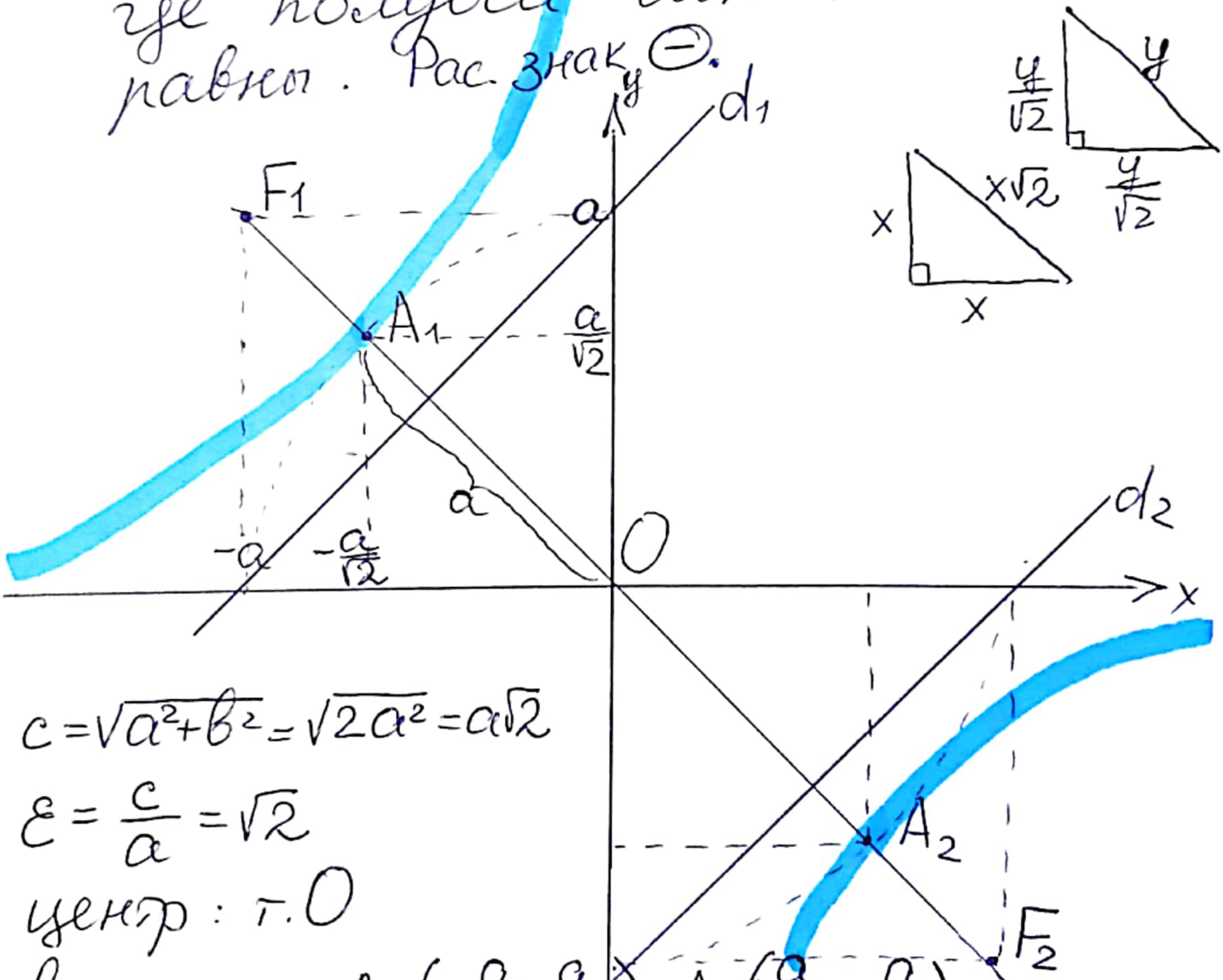
Д/З I: Выполнить задачи про кривые 2 пор. в ДЗ2 по анал. геометрии.

Д/З II: N 2.249 (эллипсы)
N 2.269 (гип-лы)
N 2.288 (параболы)

Уравнения гиперболы в асимптотах:

$$xy = \pm \frac{a^2}{2},$$

где полуоси гип-лы $a=b$ равны. Рас. знак $\ominus$.



$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2a^2}=a\sqrt{2}$

$\varepsilon=\frac{c}{a}=\sqrt{2}$

центр: т. O

вершины: $A_1\left(-\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$, $A_2\left(\frac{a}{\sqrt{2}},-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$

фокусы: $F_1\left(-\frac{c}{\sqrt{2}},\frac{c}{\sqrt{2}}\right)=(-a,a)$, $F_2\left(\frac{c}{\sqrt{2}},-\frac{c}{\sqrt{2}}\right)=(a,-a)$

директрисы: $y=x\pm\frac{a}{\varepsilon}\sqrt{2}=x\pm a$

асимптоты: $x=0$ и $y=0$