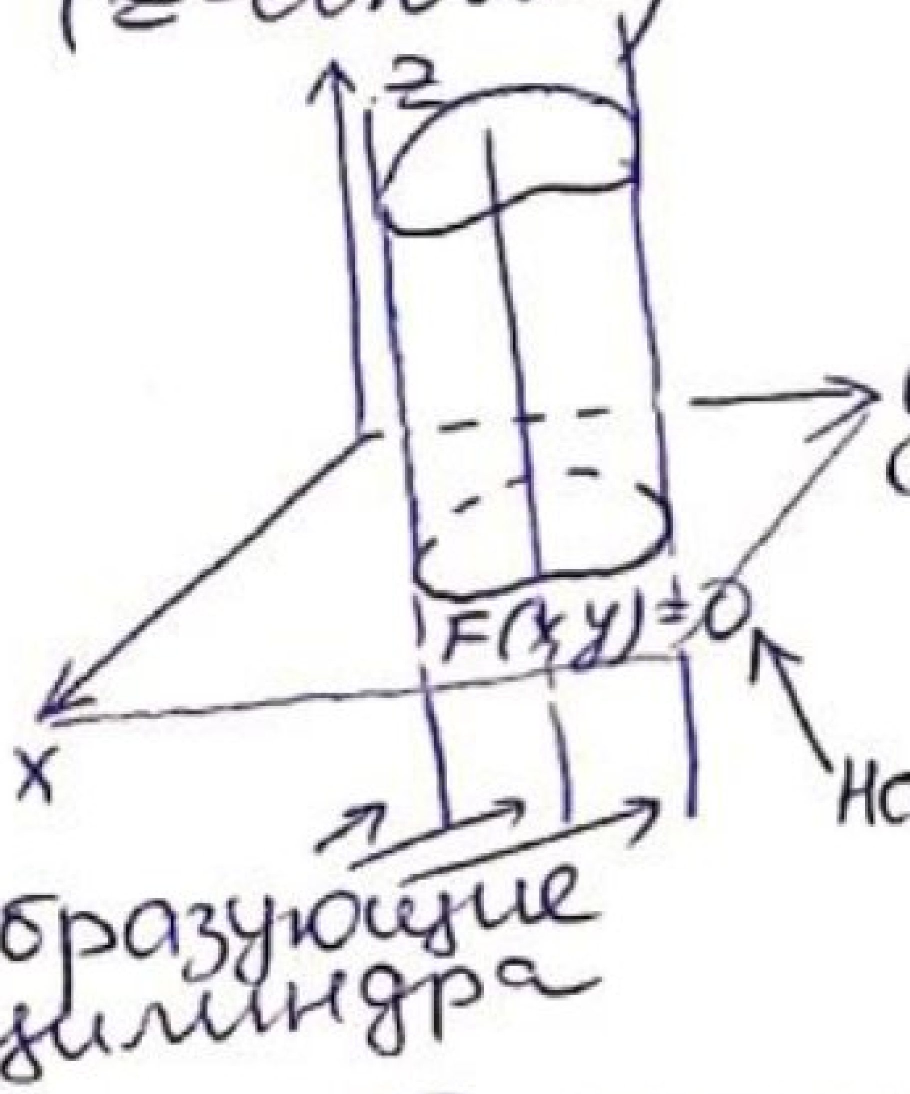
Занятие 11.

Поверхности 2-го порядка

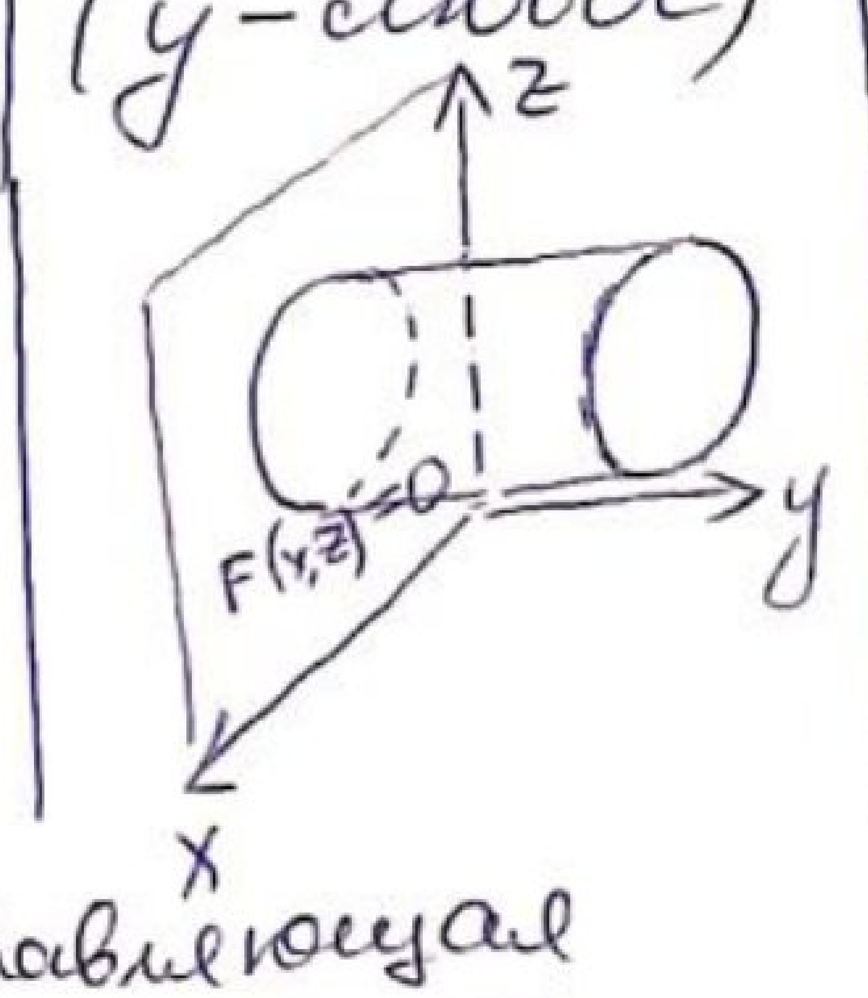
∃ 17 типов поверхностей 2 порядка. Из них 9 типов явл. цилиндрическими

В подходящей прямоуг. системах координат ур-я цилиндрич. пов-тей могут иметь вид:

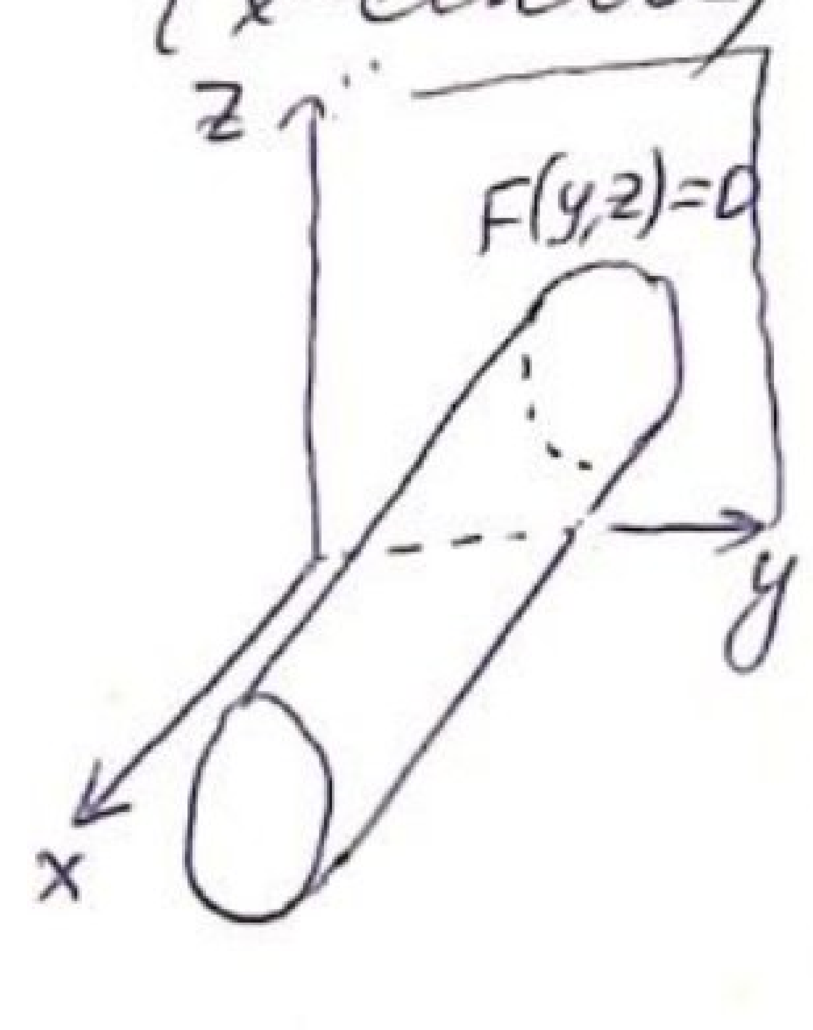
$F(x,y)=0$
(z-любое)



$F(x,z)=0$
(y-любое)



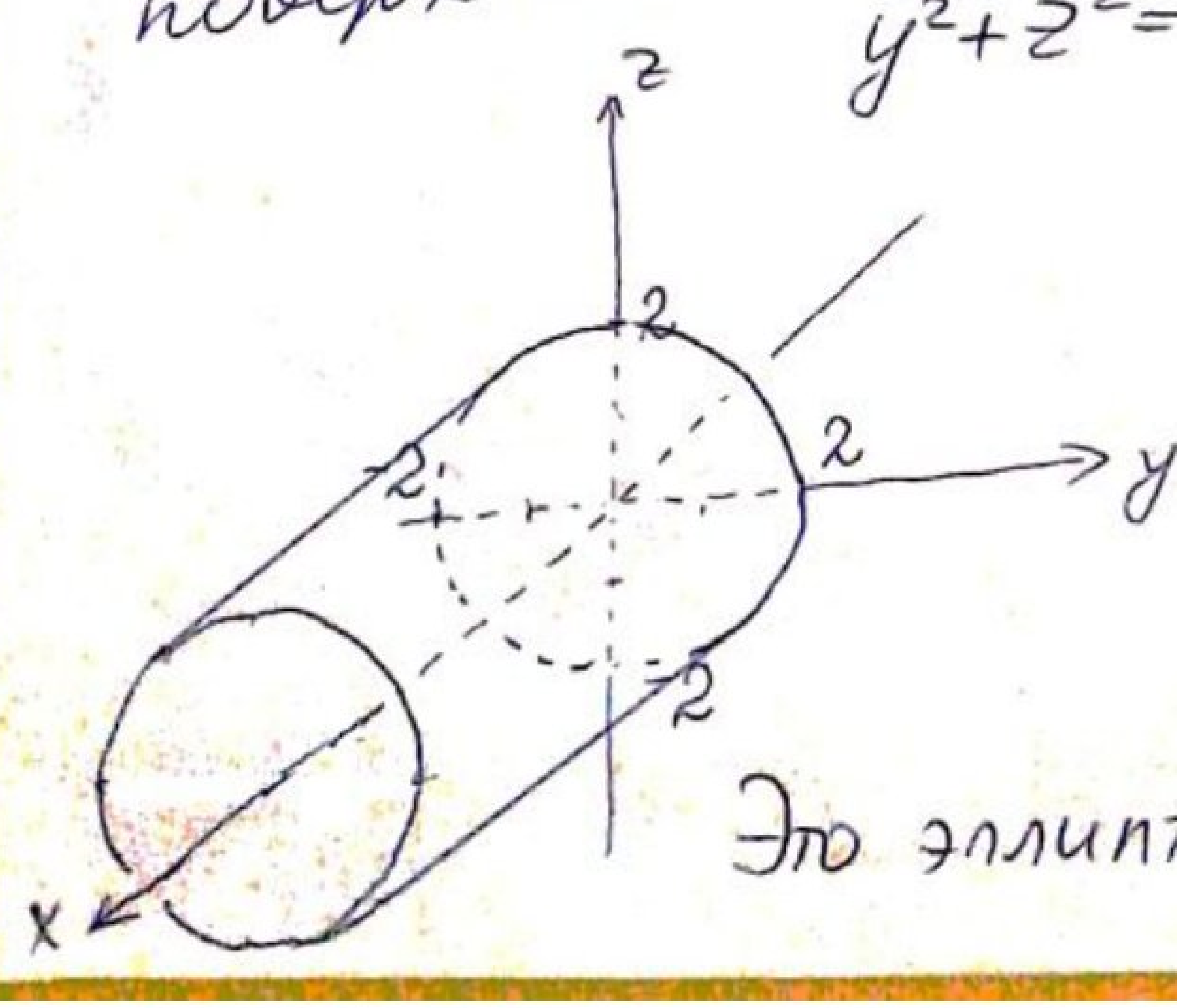
$F(y,z)=0$
(x-любое)



№ 2.393.

Построить заданные цилиндрические поверхности:

$y^2+z^2=4$

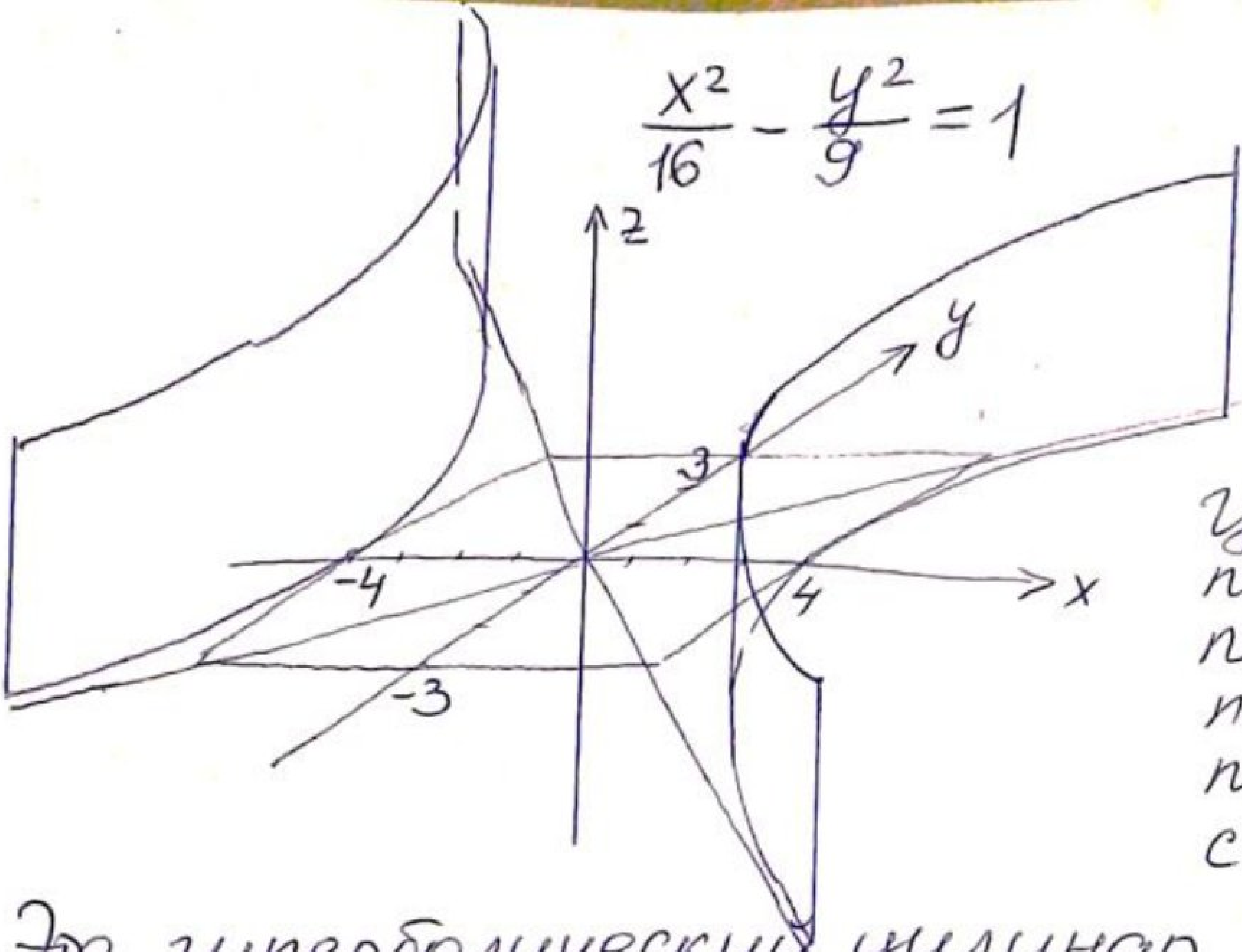


Цилиндр. пов-ть пересекает пл. Oyz по окружности с ур-ем $y^2+z^2=4$.

Это эллиптический цилиндр

Сканировано с CamScanner

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$



Цилиндрич. пов-ть пересекает пл. Oxy по гип-ле с ур-ем $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. (параметры $a=4$, $b=3$)

Это гиперболический цилиндр.

Д/З I: № 2.395, 2.397

№ 2.372.

$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{25} = 1$ Установить тип пов-ти и построить её.

$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} + \frac{z^2}{5^2} = 1$ Это эллипсоид.

Точки пересечения с осями коорд-т:

с Ox $(y=0, z=0)$ $\frac{x^2}{3^2} = 1 \Rightarrow x = \pm 3$

с Oy $(x=0, z=0)$ $\frac{y^2}{2^2} = 1 \Rightarrow y = \pm 2$

с Oz $(x=0, y=0)$ $\frac{z^2}{5^2} = 1 \Rightarrow z = \pm 5$

Сканировано с CamScanner

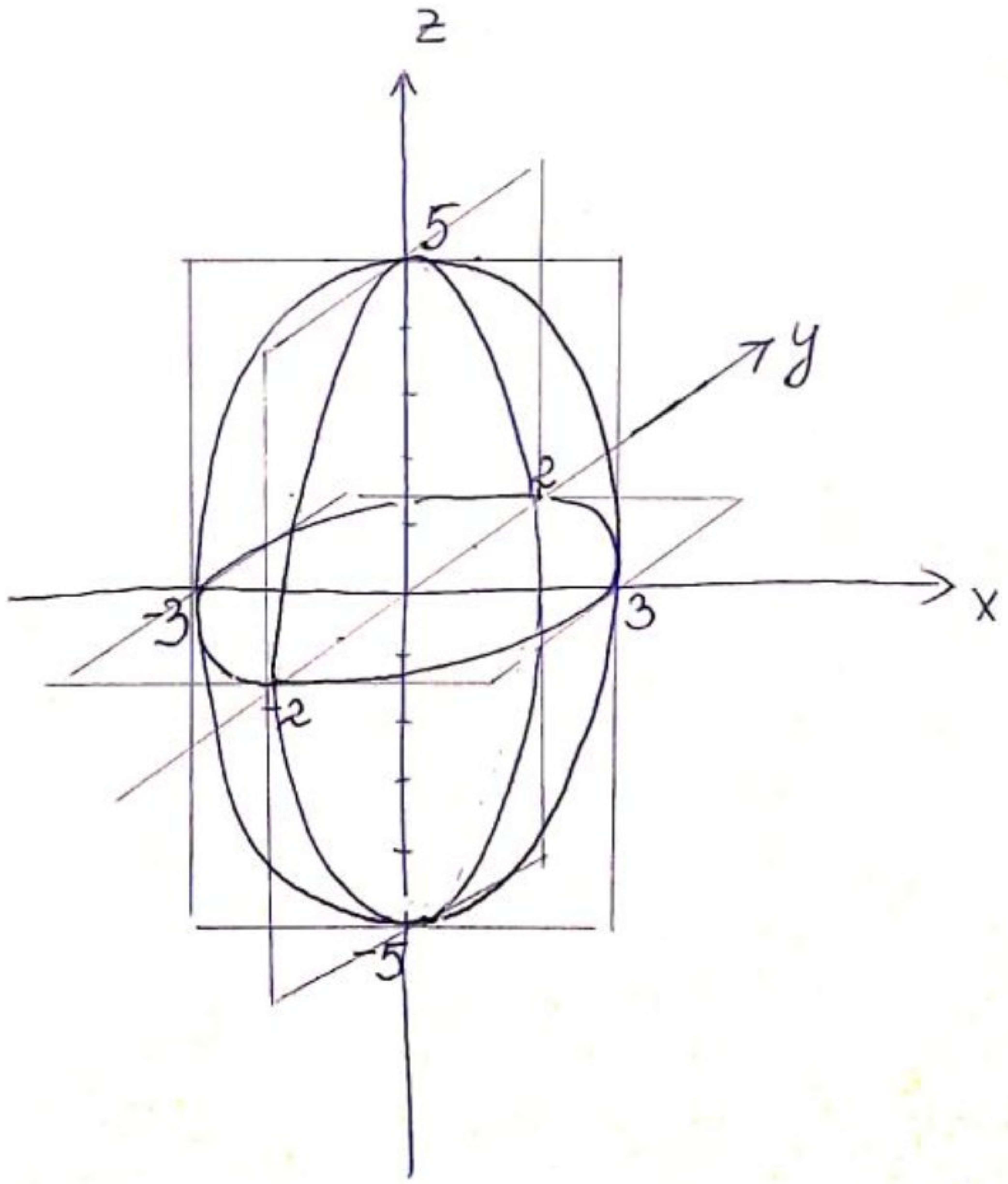
Пересечения с координатными плоскостями:

с Oxy $(z=0)$ $\quad \frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$

с Oxz $(y=0)$ $\quad \frac{x^2}{3^2}+\frac{z^2}{5^2}=1$

с Oyz $(x=0)$ $\quad \frac{y^2}{2^2}+\frac{z^2}{5^2}=1$

это эллипсы.



Сканировано с CamScanner

Метод сечений.

исп. для выяснения формы пов-ти.

№2.377.

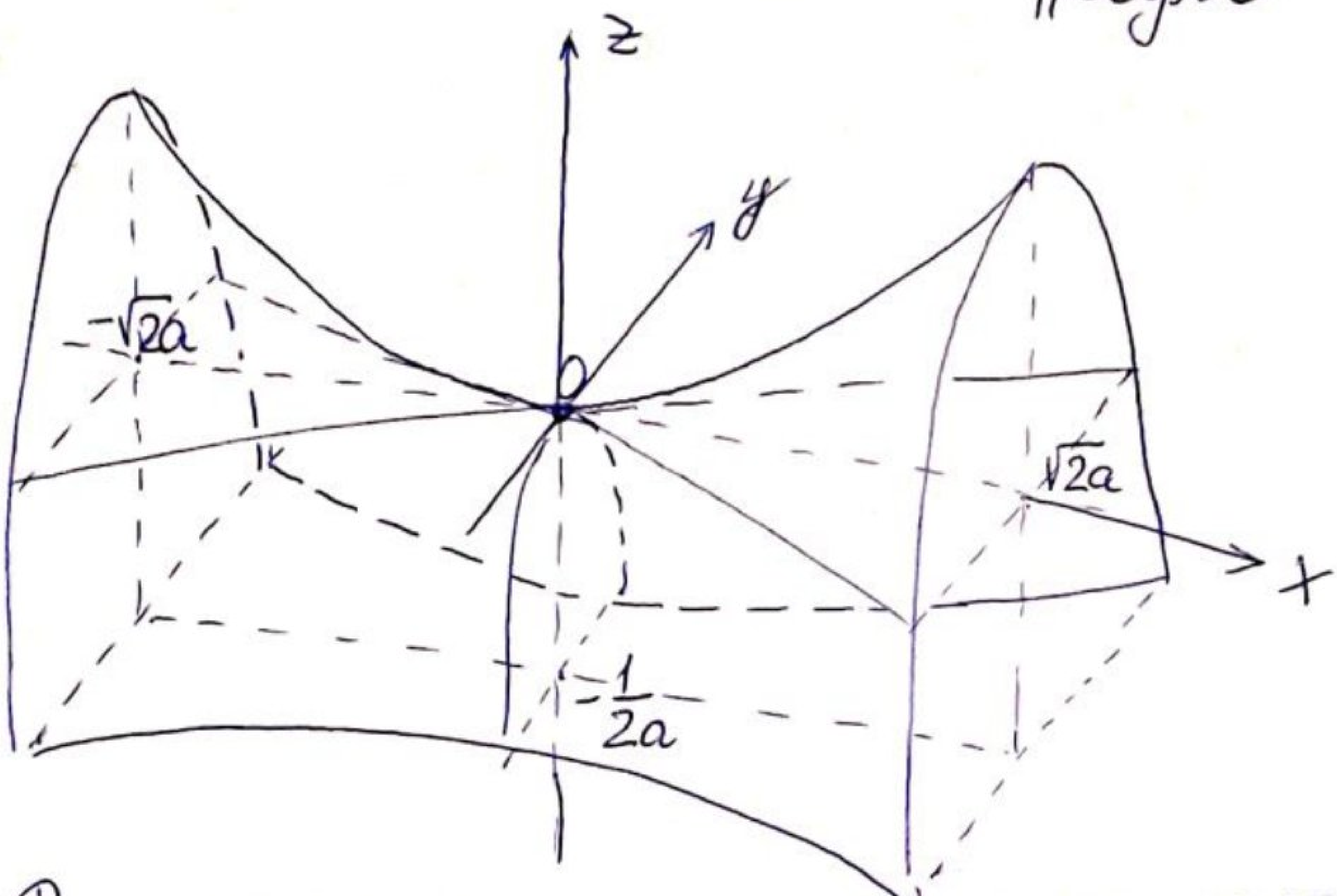
$x^2-y^2=2az$, $a\neq 0$. Выяснить тип пов-ти, рас. различные сечения, нарисовать.

Решение. Пусть $a>0$

Плоскость сечения	Кривая в сечении
1 1) $Oxy: z=0$	$x^2-y^2=0$, т.е. $\left[\begin{array}{l} x-y=0 \\ x+y=0 \end{array}\right.$ пара пересек. прямых
2) $z=\pm\frac{1}{2a}$	$x^2-y^2=\pm 1$ гипербола и сопрях. гип-ла
2 1) $Oxz: y=0$	$x^2=2az$ парабола
2) $y=\pm\sqrt{2a}$	$x^2-2a=2az$ $x^2=2a(z+1)$ сдвинутая парабола
3 1) $Oyz: x=0$	$-y^2=2az \Rightarrow y^2=\ominus 2az$ парабола
2) $x=\pm\sqrt{2a}$	$2a-y^2=2az \Rightarrow$ $\Rightarrow y^2=-2a(z-1)$ сдвинутая парабола

Сканировано с CamScanner

Это гиперболический параболоид
„седло"



Разл. сечения гиперб. параболоида можно посм. в интернете.

Пусть $a<0$. Получим „седло", отраженное отн. пл. Oxy (пл. $z=0$)

№ 2.379.

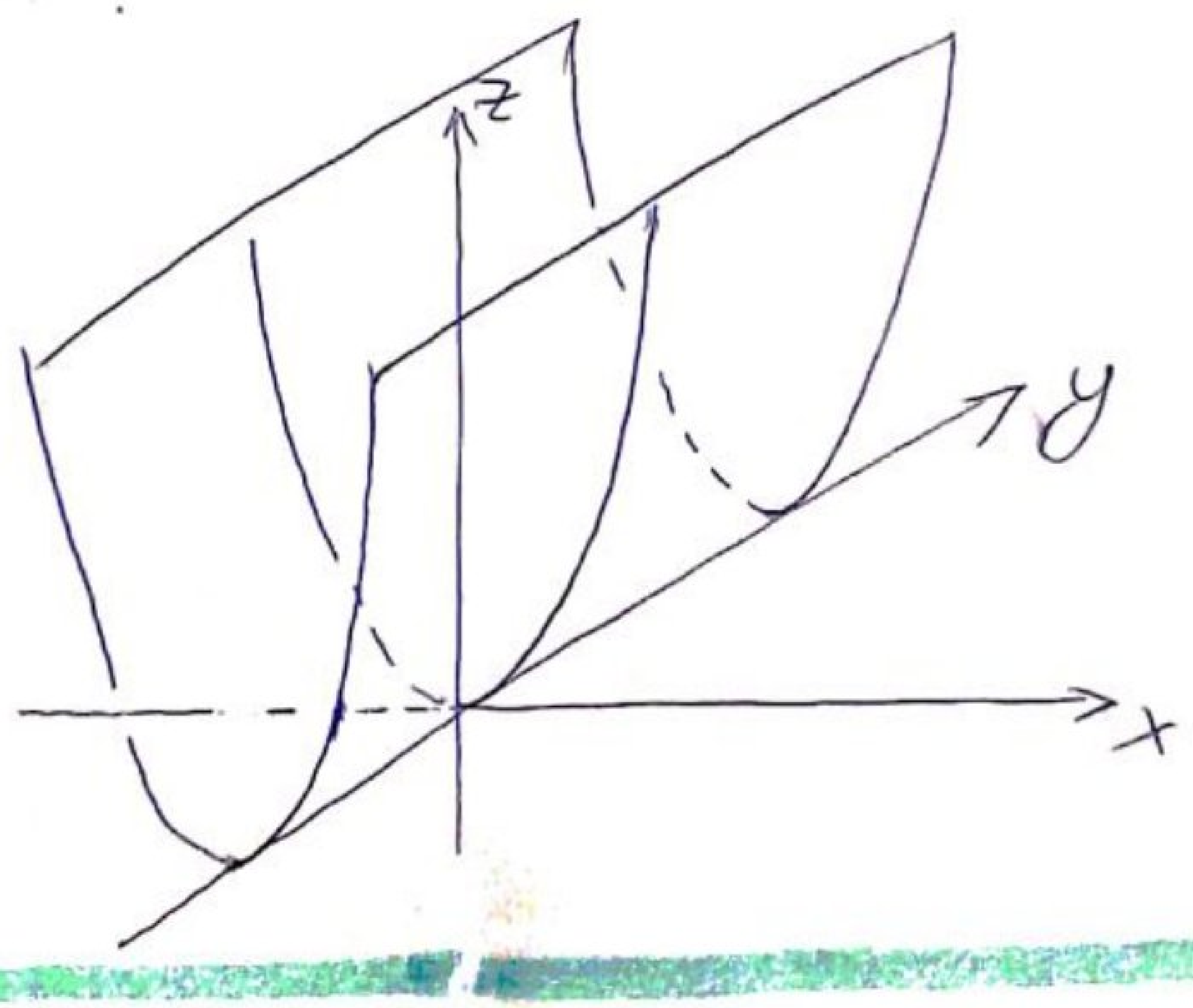
$x^2 = 2az,\ a \neq 0.$

Решение.

Пусть $a > 0$.

Ур-е содержит только две перем. $x, z \Rightarrow$ это цилиндрич. пов-ть.

Все её сечения плоскостями, параллельными пл. Oxz явл. одинаковыми параболами с ур-ми $x^2 = 2az$



ДЗ II: № 2.374, 2.375, 2.380, 2.381, 2.382.

Для $a<0$ параболы „развернутся" ветвями вниз.

Сканировано с CamScanner

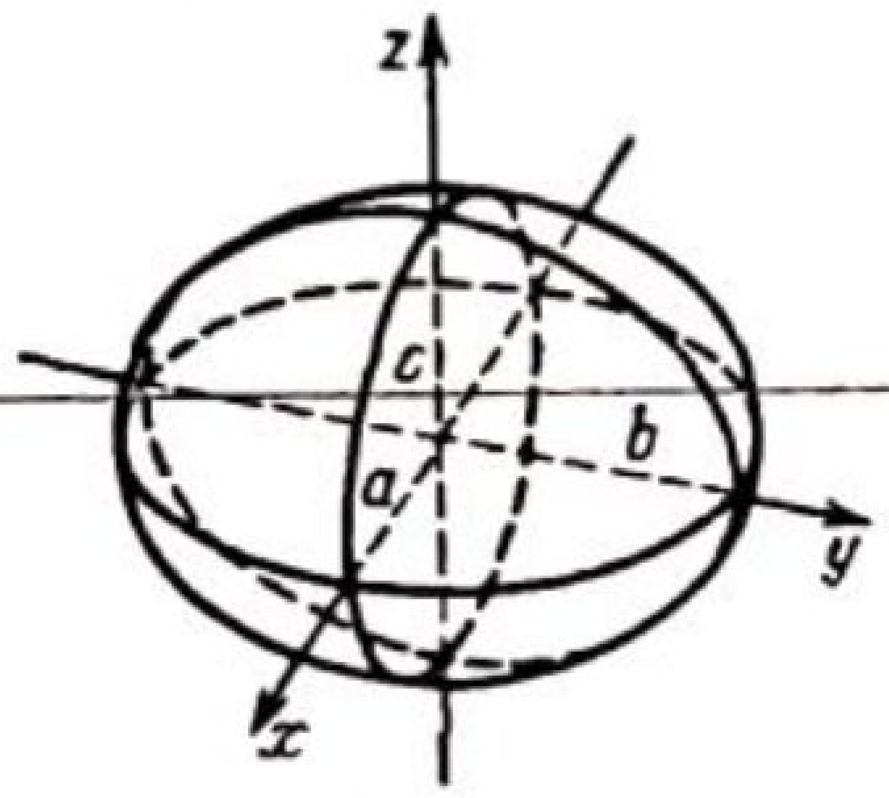


Рис. 29

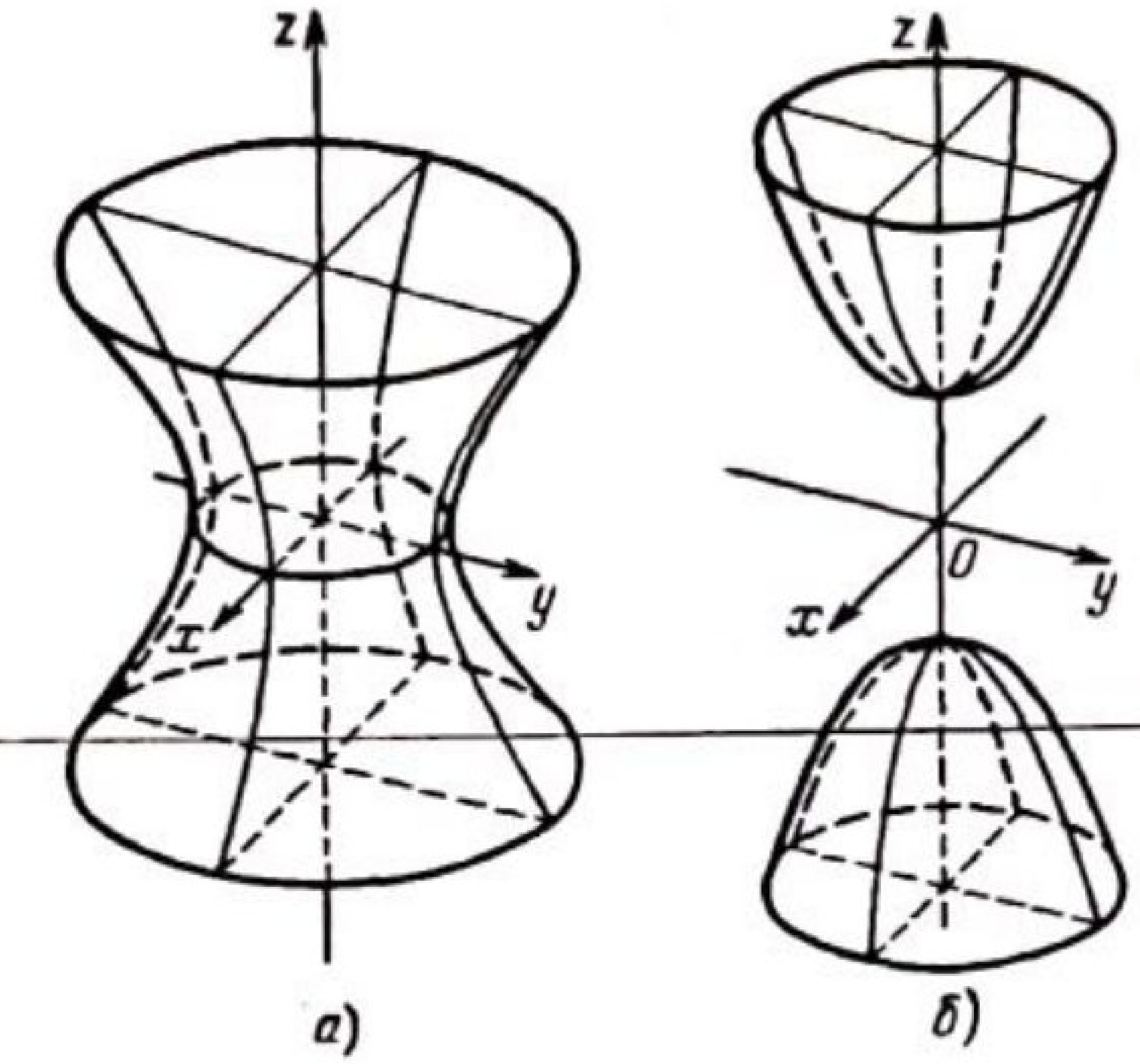


Рис. 30

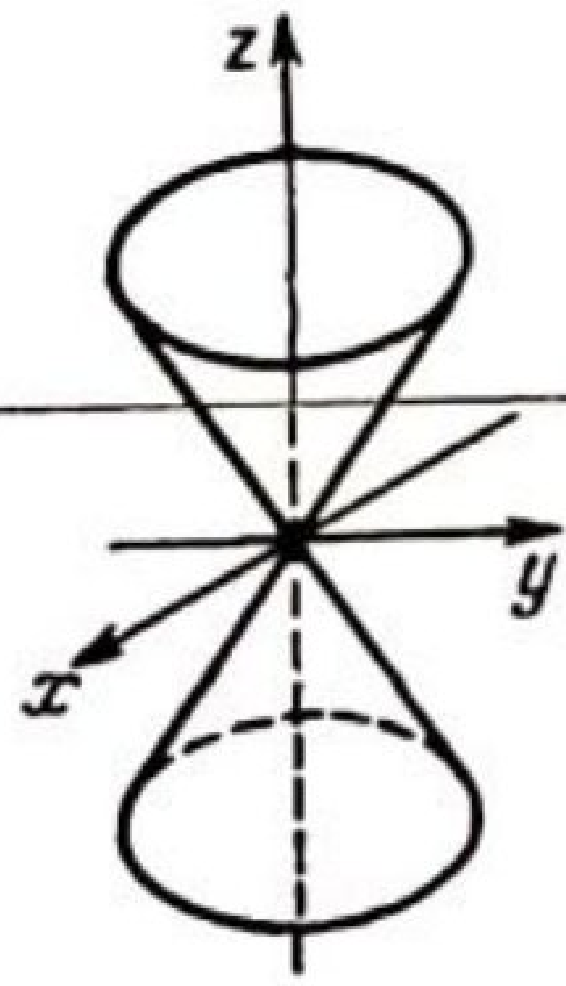


Рис. 31

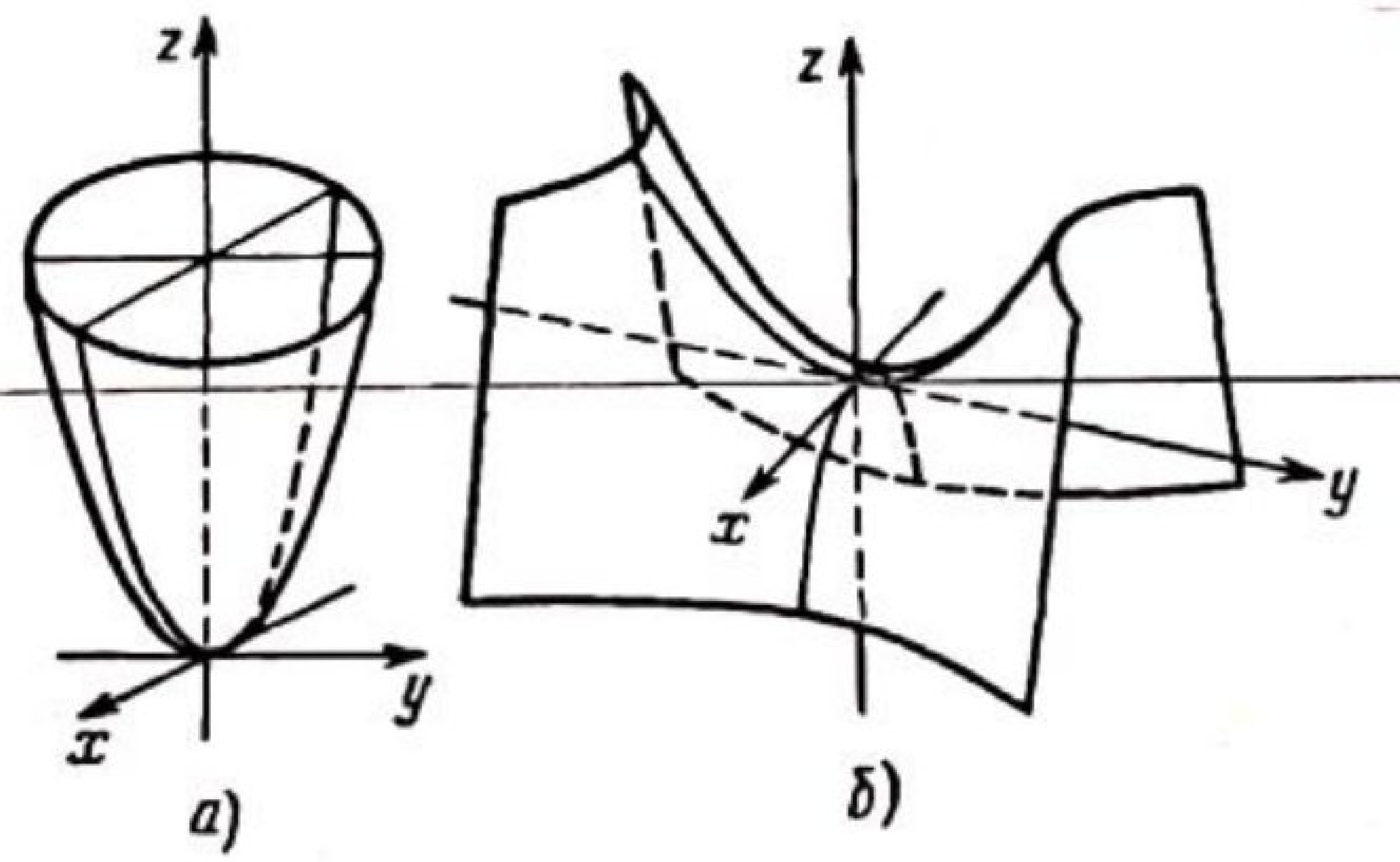


Рис. 32

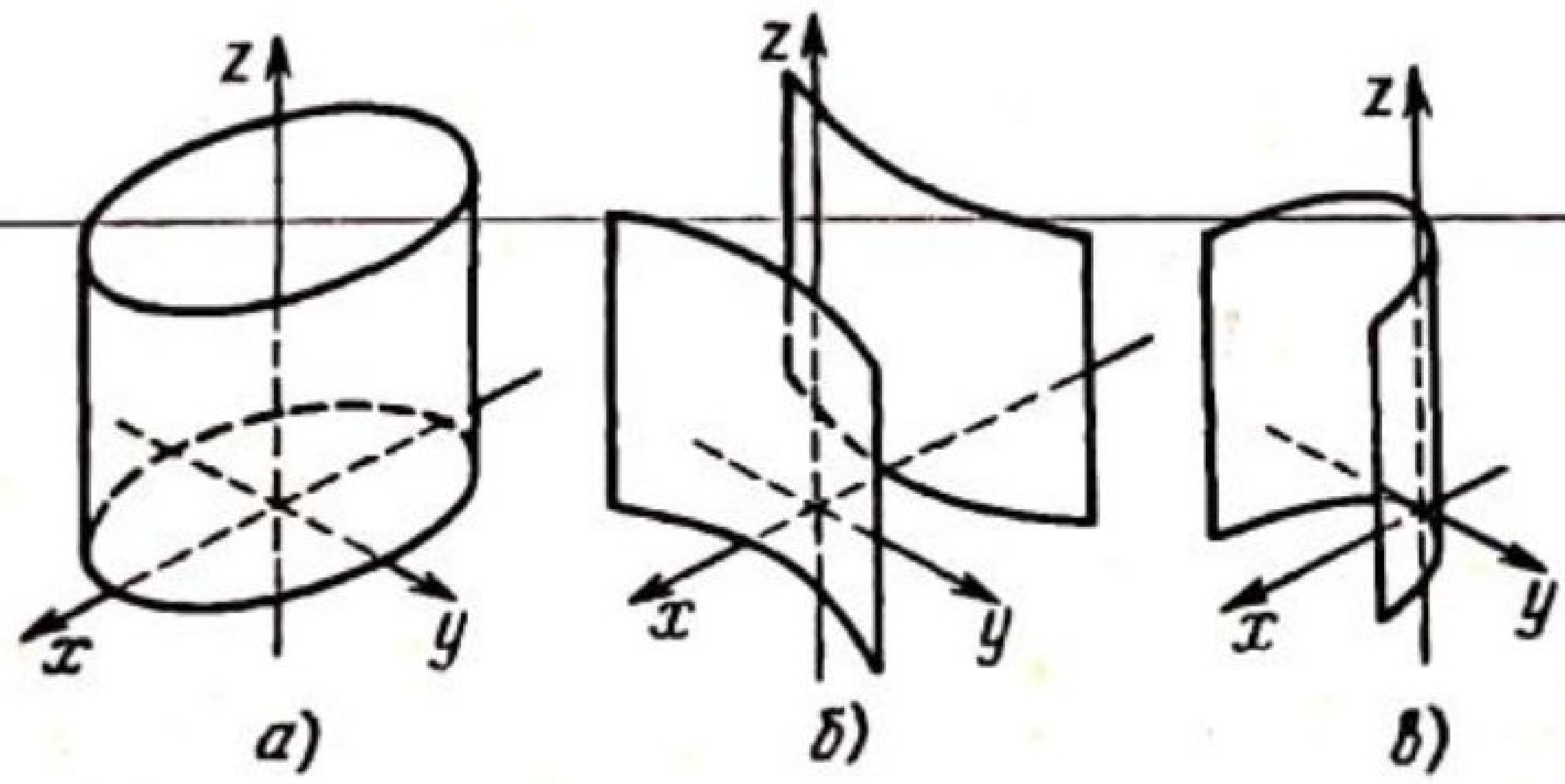
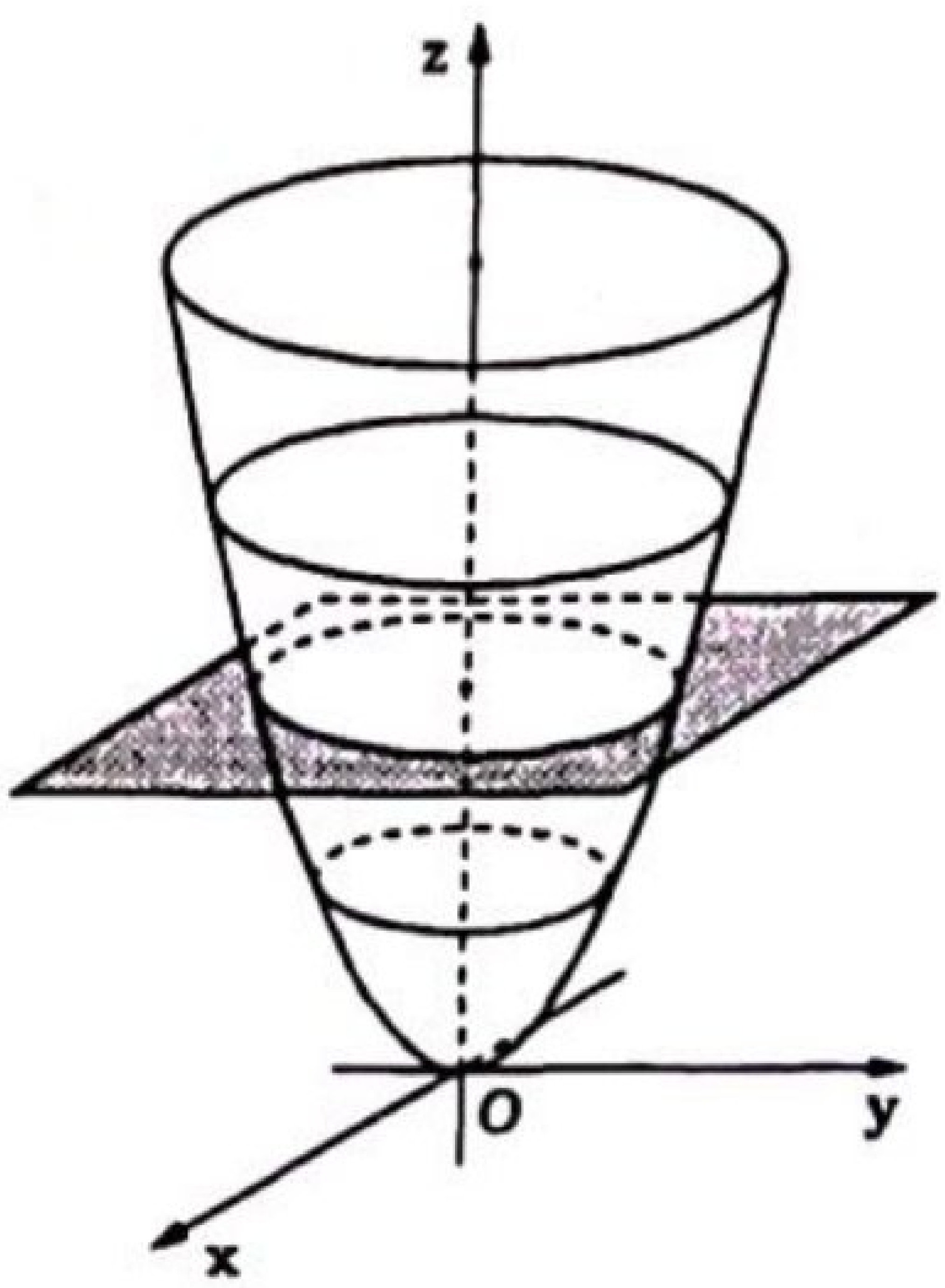
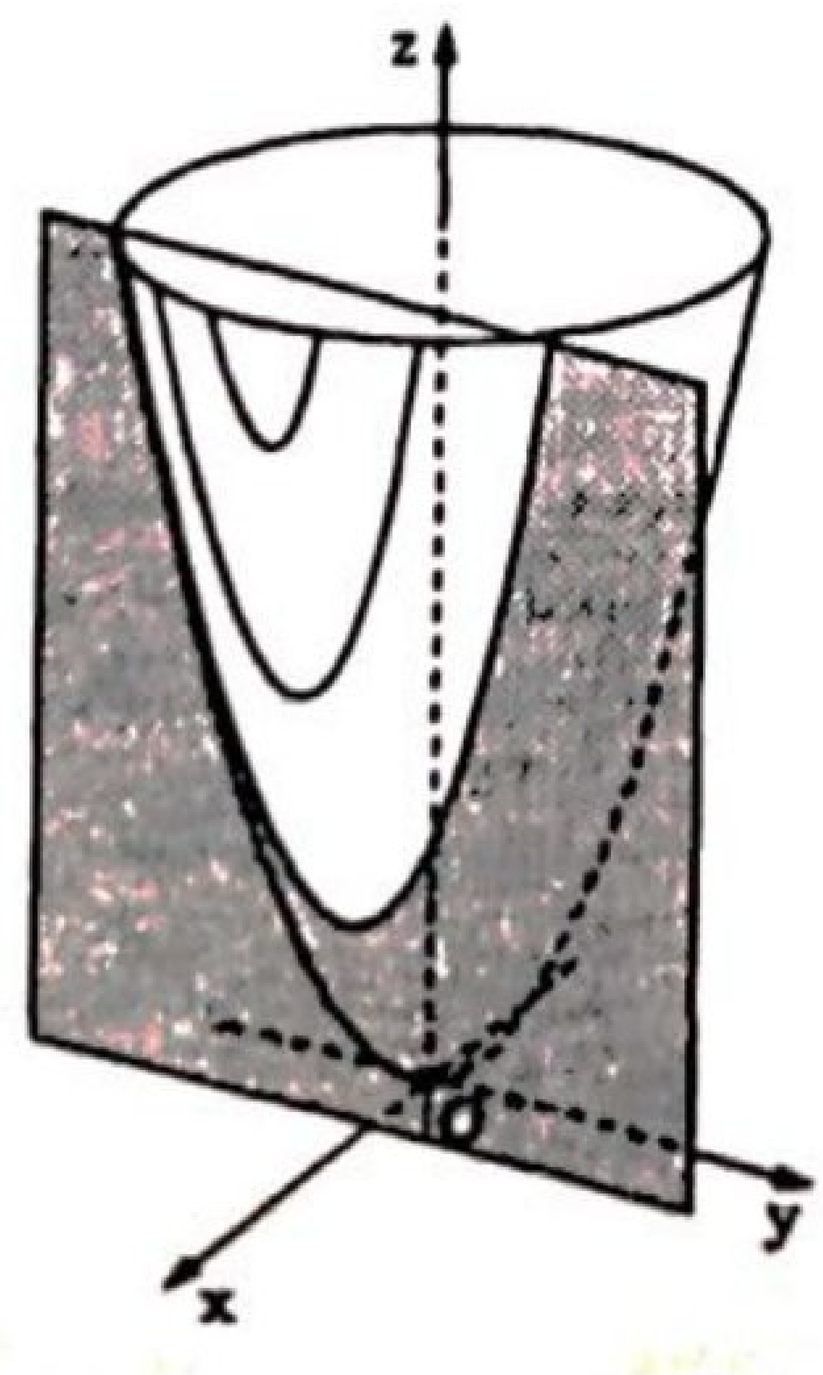


Рис. 33

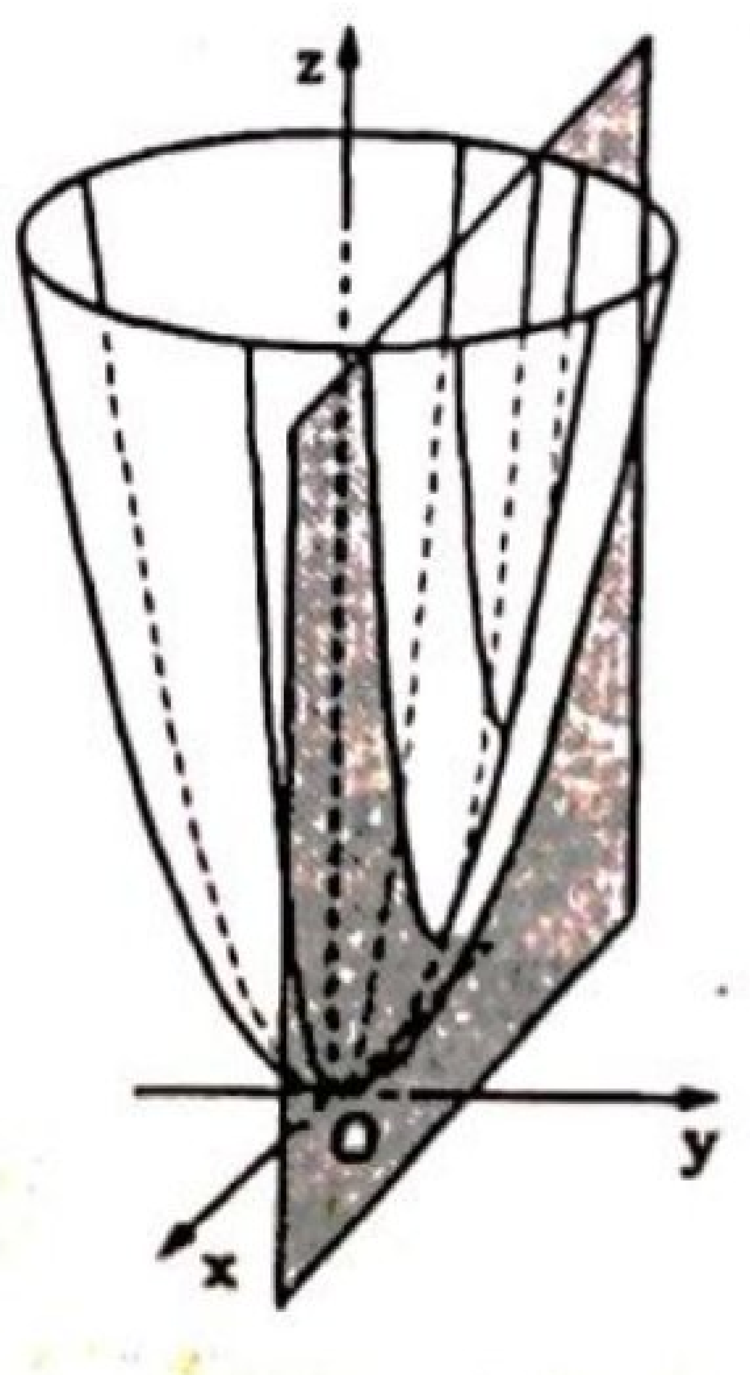
Сканировано с CamScanner



а



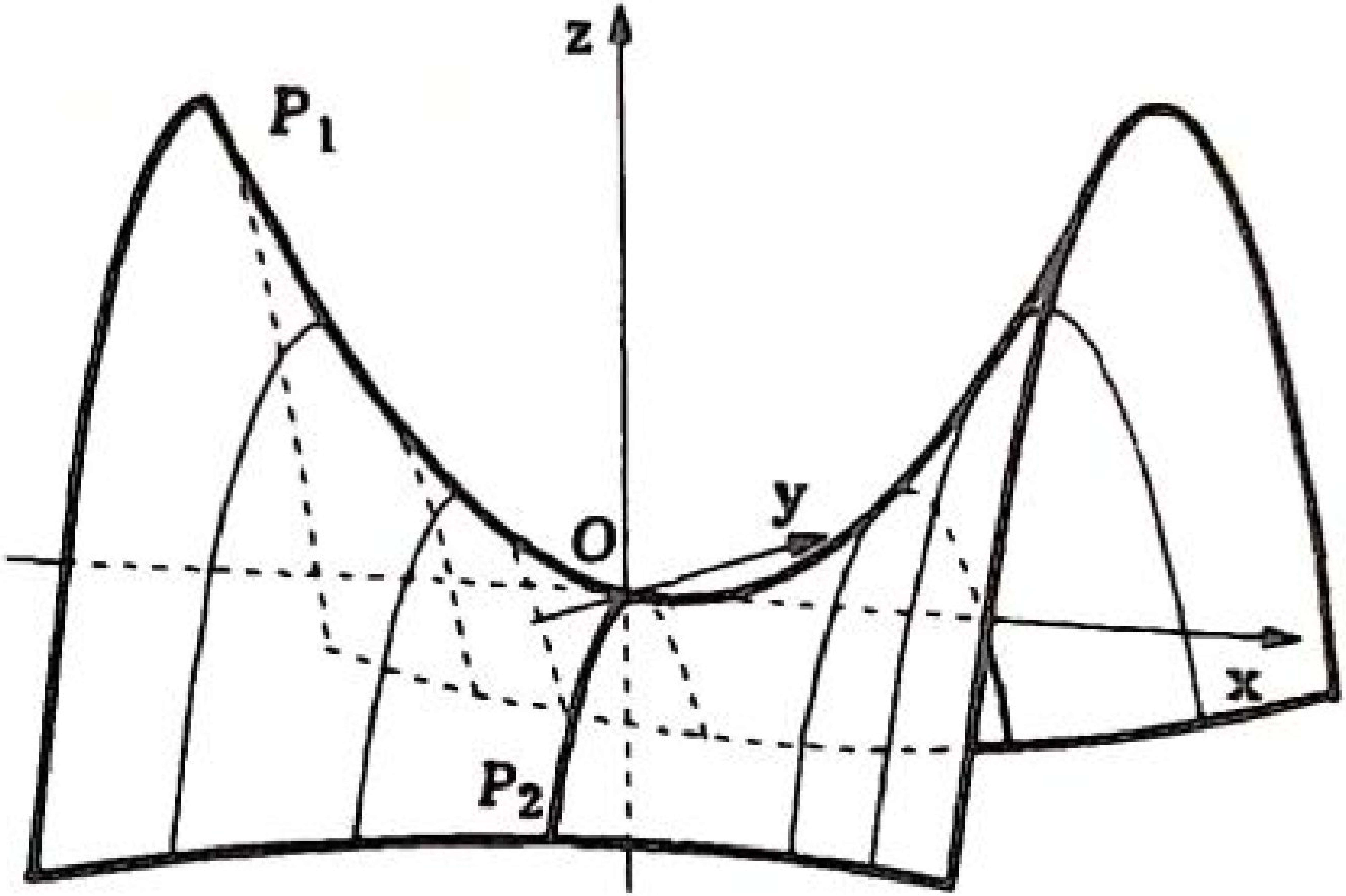
б

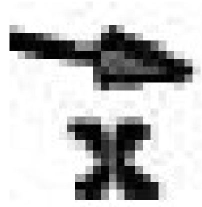


в

Рис. 12.16

Сканировано с CamScanner





Сканировано с CamScanner

Подготовка к ДЗ2 по АГ.

Привести ур-е пов-ти 2 пор. к каноническому виду, определить тип пов-ти, построить её.

№1.

$$x^2-y^2+z^2-4x+6z+12=0$$

Решение.

Ур-е не содержит xy, yz, xz, но содерж. x^2, y^2, z^2

Выделим полные квадраты:

$$(x^2-4x)-y^2+(z^2+6z)+12=0$$

$$(x^2-4x+4-4)-y^2+(z^2+6z+9-9)+12=0$$

$$(x-2)^2-y^2+(z+3)^2-4-9+12=0$$

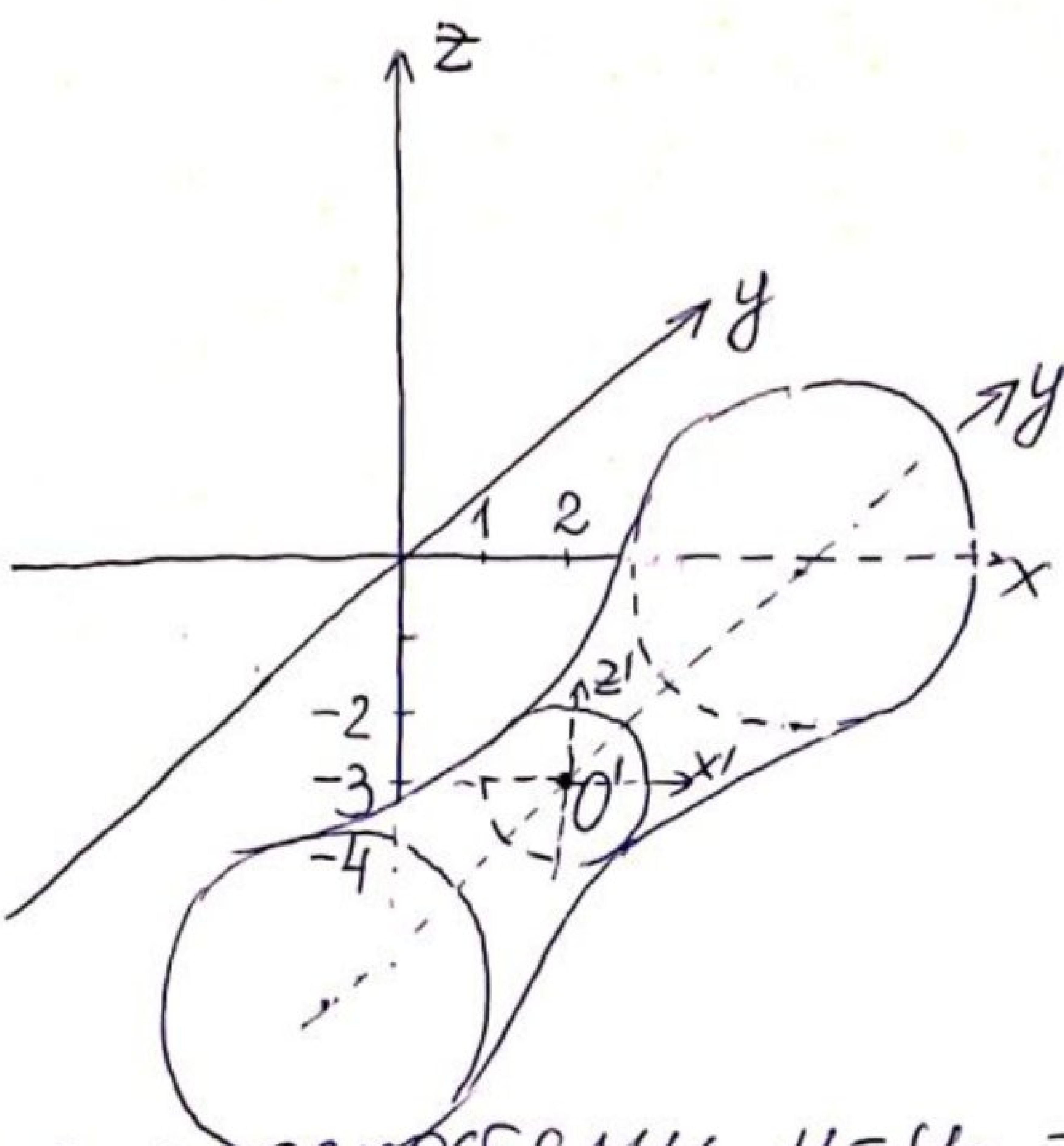
$$(x-2)^2-y^2+(z+3)^2=1$$

Это однополостный гиперболоид; его центр сдвинут в т. $(2,0,-3)$

Сечение плоскостью $y=0$ – это окружность $(x-2)^2+(z+3)^2=1$ с центром $(2,0,3)$ и $R=1$.

(наз. горловой эллипс)

Сканировано с CamScanner



Сечения плоскостями $y=y_0$ – это окружности $(x-2)^2+(z+3)^2=1^2+y_0^2$ с центрами $(2,-3,y_0)$ и рад. $R=\sqrt{1+y_0^2}$

Осью гип-да явл. прямая $\begin{cases} x=2 \\ z=-3 \end{cases}$

(пересечение 2-х плоскостей)

Канонич. ур-е: $x'^2-y'^2+z'^2=1$

Преобр-е к-т $\begin{cases} x'=x-2 \\ y'=y \\ z'=z+3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=x'+2 \\ y=y' \\ z=z'-3 \end{cases}}$

Ур-е содержит $x'^2+z'^2$; это пов-ть вращения; ось вращ. $O'y'$.

№2

$9x^2+z^2-36x-6z+36=0$

Решение. Ур-е не содержит y $\Rightarrow$ цилиндр. пов-ть

Ур-е не содержит xy, yz, xz,

но содержит x^2, z^2.

Выделим полные квадраты:

$(9x^2-36x)+(z^2-6z)+36=0$

$9(x^2-4x)+(z^2-6z)+36=0$

$9(x^2-4x+4-4)+(z^2-6z+9-9)+36=0$

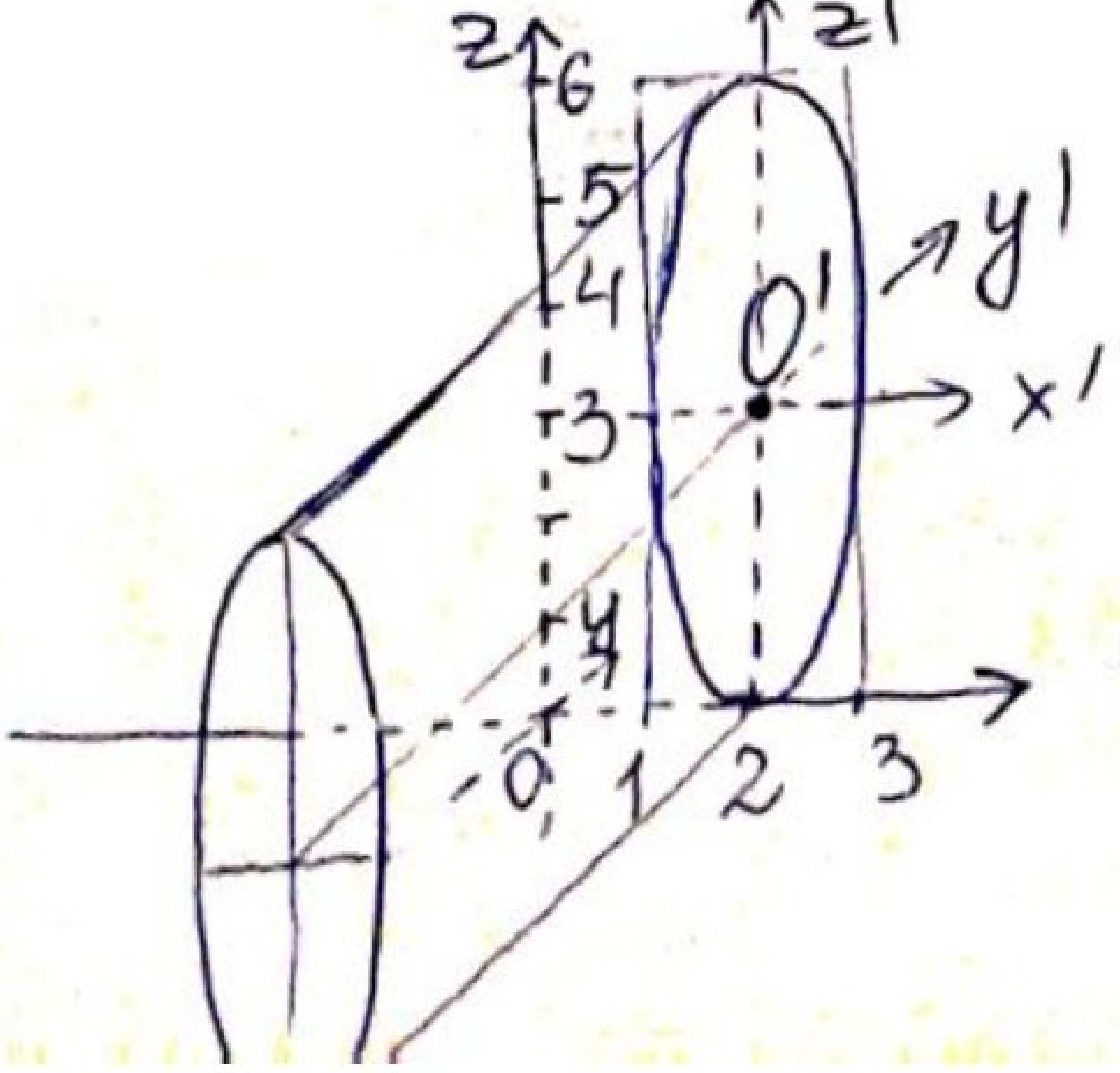
$9(x-2)^2+(z-3)^2-\cancel{36}-9+\cancel{36}=0$

$9(x-2)^2+(z-3)^2=9 \quad |:9$

$(x-2)^2+\frac{(z-3)^2}{9}=1$; $\boxed{\text{канонич. ур-е: } x'^2+\frac{z'^2}{3^2}=1}$

Это эллипс со сдвинутым центром в т. $(2,3)$ и полуосями

$a=1, \quad b=3$.



Это эллиптич. цилиндр. Его ось — прямая $\begin{cases} z=3 \\ x=2 \end{cases}$

Сканировано с CamScanner

Каконич. ур-е:

$$x'^2 + \frac{z'^2}{3^2} = 1$$

Преобр-е к-т:

$$\begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y \\ z' = z - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' + 2 \\ y = y' \\ z = z' + 3 \end{cases}$$

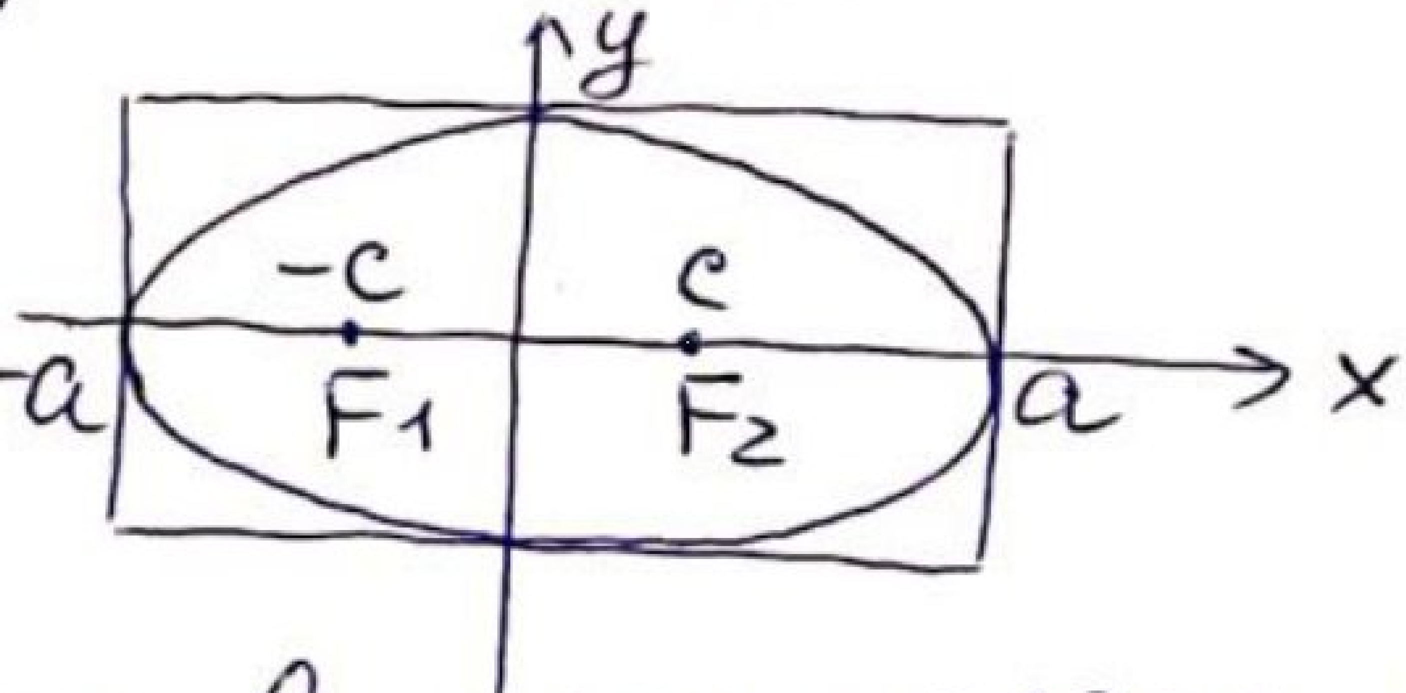
Сканировано с CamScanner

Обсуждение

Канонич. ур-е эллипса:

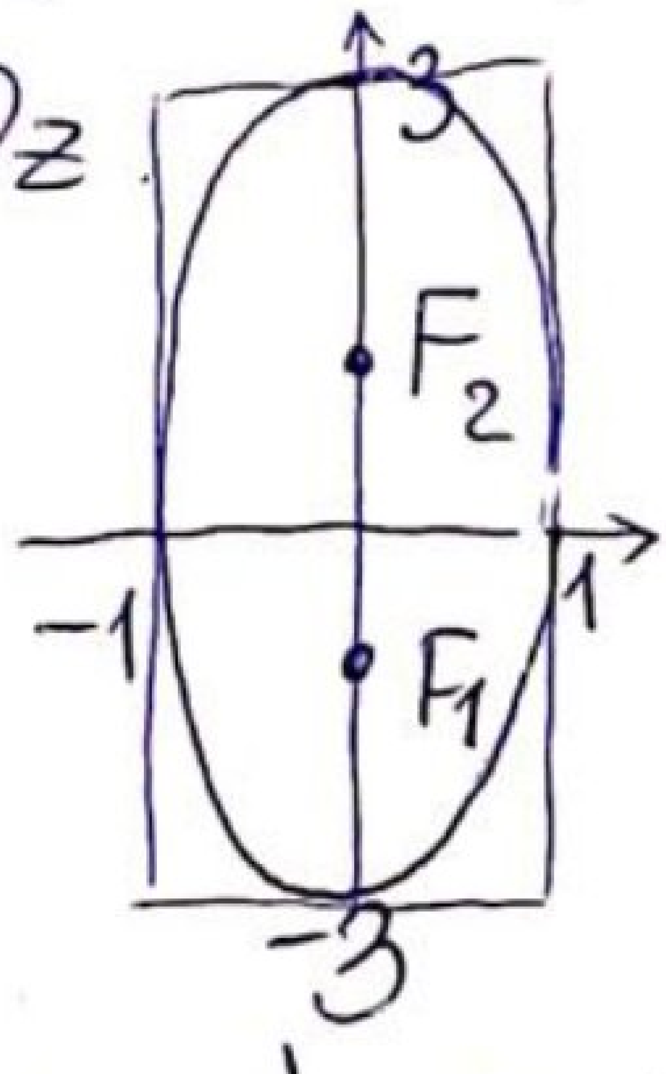
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad , \text{где } a \geq b.$$

Его фокусы лежат на большой оси длины 2a.



$c = \sqrt{a^2 - b^2}$

Эллипс в пред. задаче „вытянут вверх" ⇒ его фокусы лежат на оси ‖ Oz.



Вопросы: 1) где расположены фокусы окружности?

2) чему равен её ε?

3) эксцентриситет сравнить с:

эллипса	гип-лы	параболы
$\varepsilon ? 1$	$\varepsilon ? 1$	$\varepsilon ? 1$

№3

$2x^2-4x-z+3=0$

Решение. Ур-е не содержит перем. y $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ это цилиндрич. пов-ть.

Не содержит xy, yz, xz, но содержит x^2.

Выделим полный квадрат:

$(2x^2-4x)-z+3=0$

$2(x^2-2x)-z+3=0$

$2(x^2-2x+1-1)-z+3=0$

$2(x-1)^2-z-2+3=0$

$2(x-1)^2 = z-1 \quad |:2$

$(x-1)^2=\frac{1}{2}(z-1)$

$(x-1)^2=2\cdot\frac{1}{4}(z-1)$

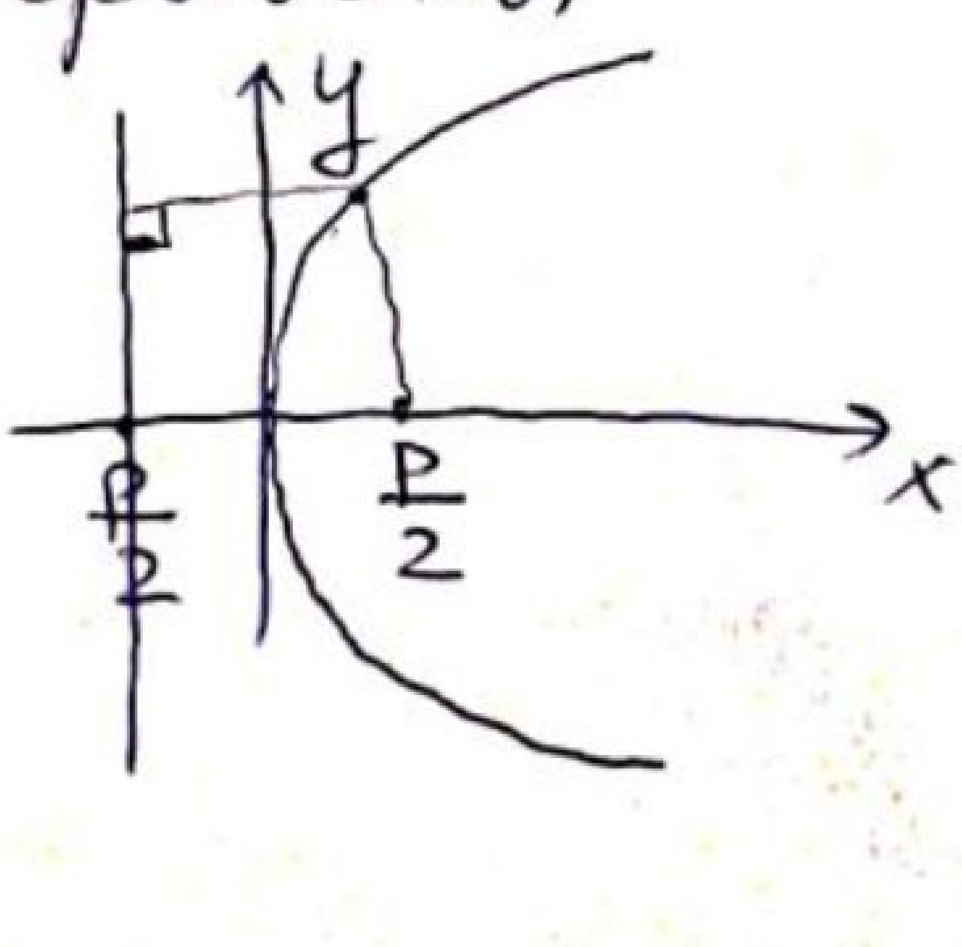
Нарис. в пл. Oxz параболу со сдвинутой вершиной в т. $(1,1)$, её $p=\frac{1}{4}$.

Напоминание

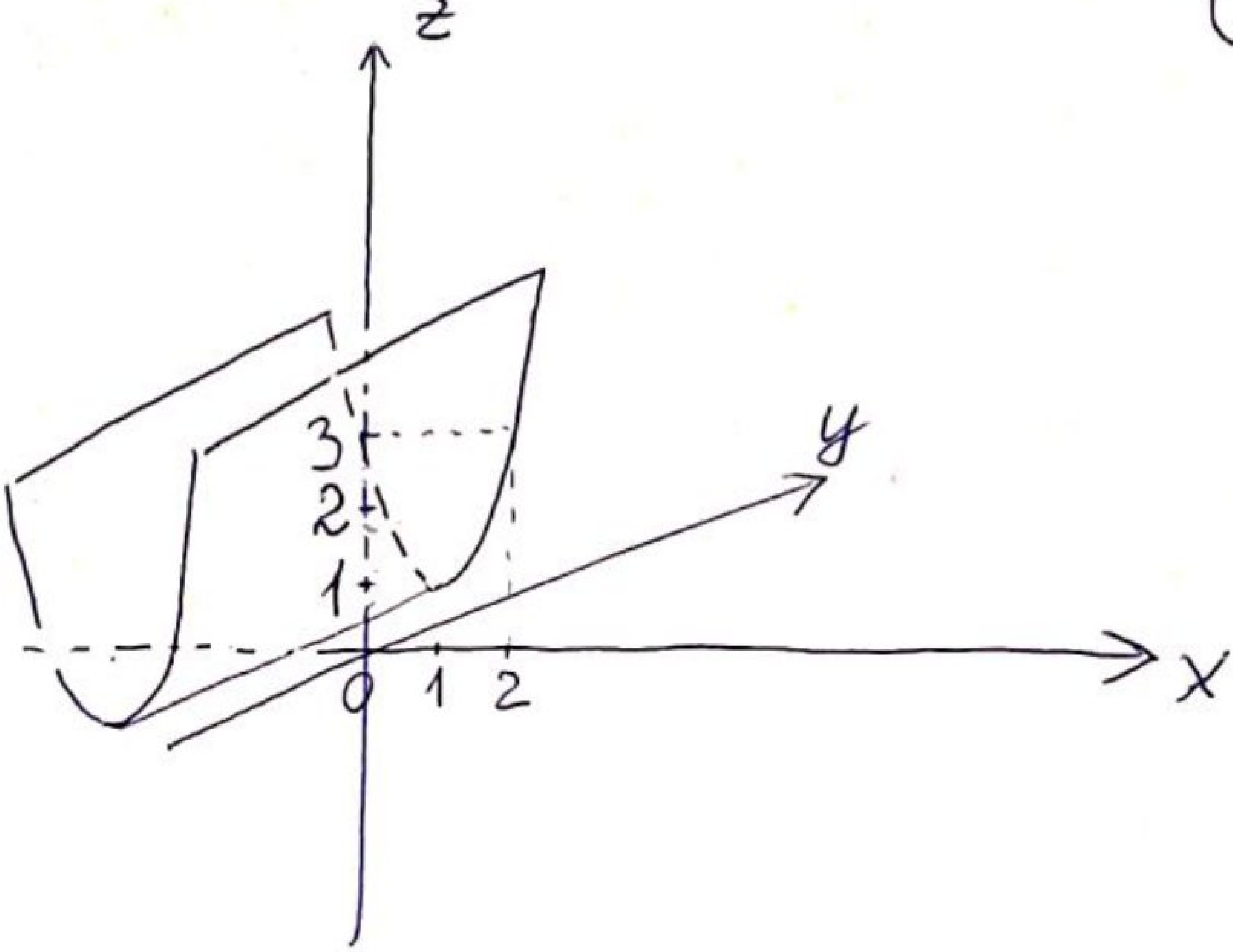
Канонич. ур-е параболы:

$y^2=2px$,

где p - параметр параболы



Сканировано с CamScanner



Точка пересеч. с Oz: $x=0 \Rightarrow 1^2 = \frac{1}{2}(z-1)$
(в пл. Oxz)

$2 = z-1$

$z = 3$

Это параболический цилиндр.

$\boxed{\text{ДЗ } \underline{\text{III}} \text{: выполнить задачу 3 из своего ДЗ.}}$

Поверхности вращения

в спец. подобранной прямоуг. системе к-т имеют ур-я:

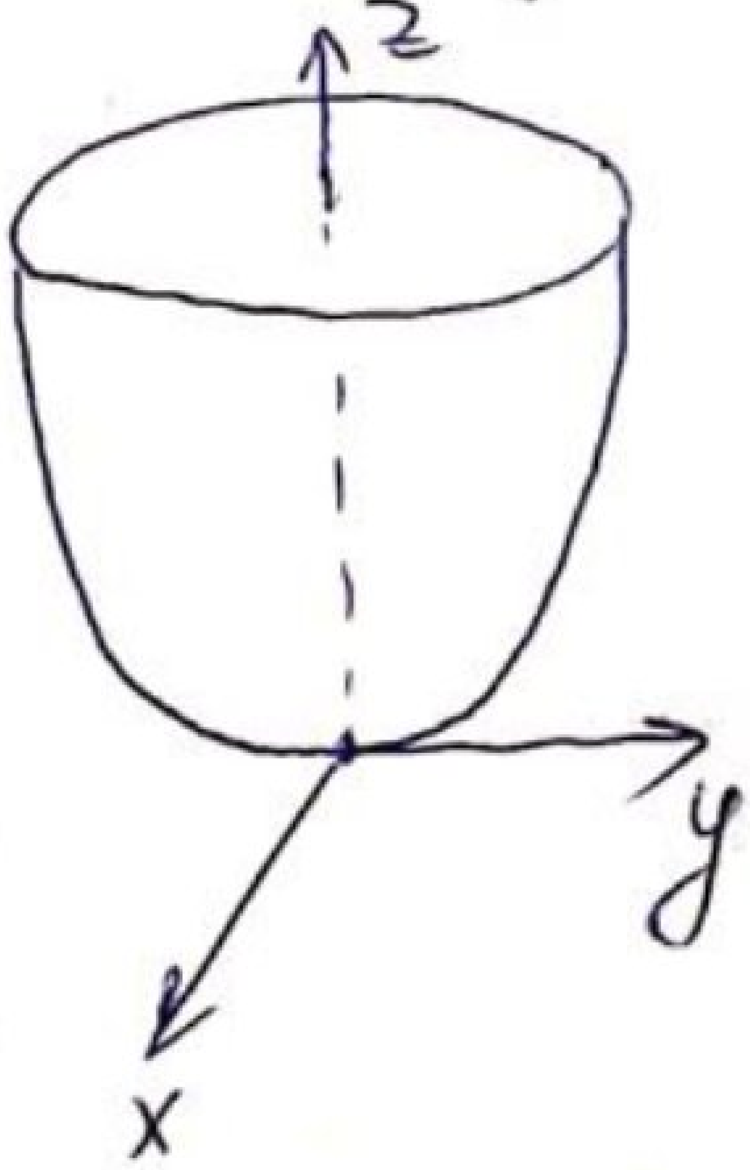
$F(x^2+y^2, z)=0$, ось вращ. – Oz;

$F(y^2+z^2, x)=0$, ось вращ. – Ox;

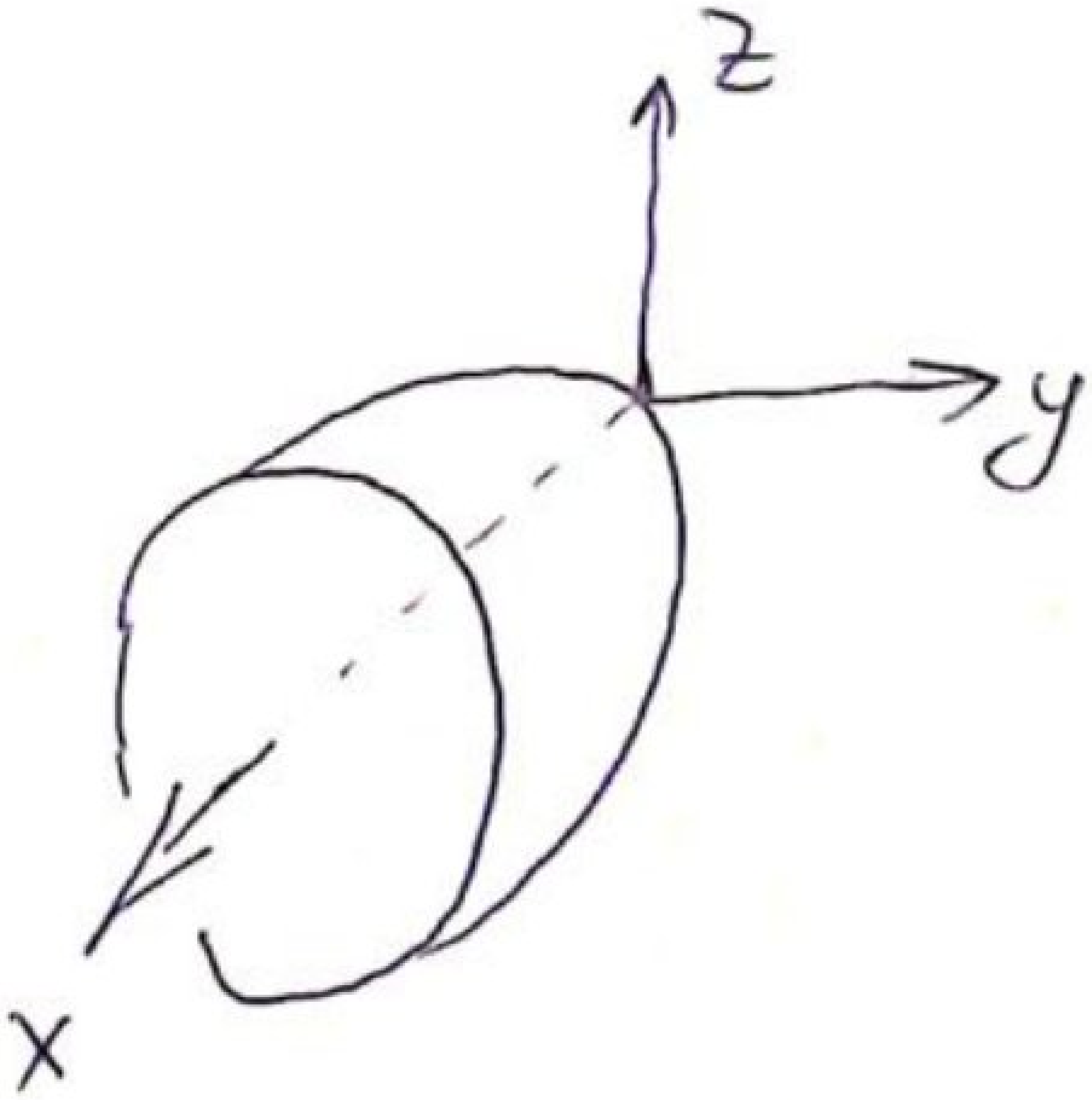
$F(x^2+z^2, y)=0$, ось вращ. – Oy.

Пример.

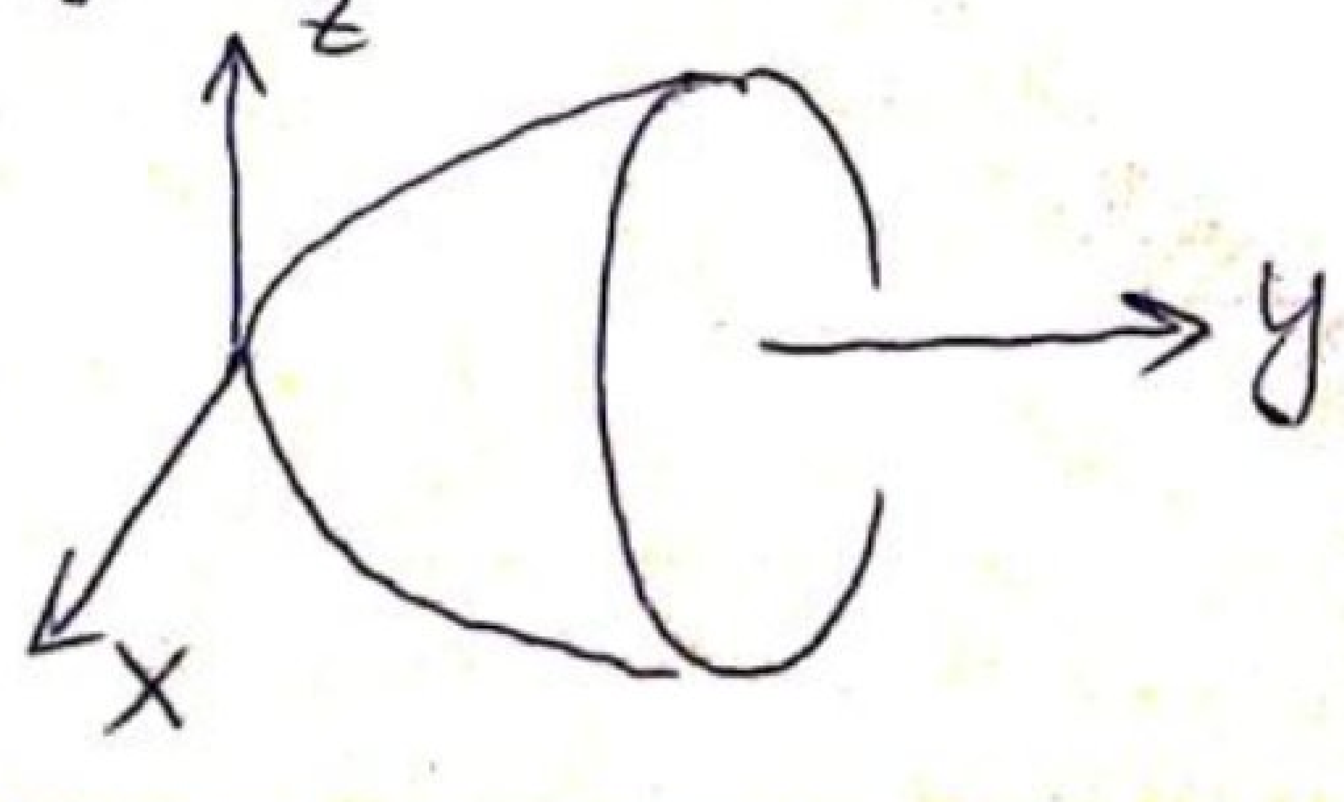
$z = x^2+y^2$



$x = y^2+z^2$



$y = x^2+z^2$



Сканировано с CamScanner

Примеры приведения пов-ти к канонич. виду — см. на с. 369-373 Канатников, Крищенко „Анал. геом.”

Сканировано с CamScanner