Занятие 12.

Матрицы. Линейные операции над матрицами:

- сложение матриц,
- умножение матриц на числа.

$\boxed{\text{Д/З I № 3.76.}}$

Умножение матриц. Многочлен от квадратной матрицы

№ 3.78.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 3+(-2)\cdot 2 & 3\cdot 4+(-2)5 \\ 5\cdot 3+(-4)\cdot 2 & 5\cdot 4+(-4)5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$$

№ 3.81.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2+(-3)1+2\cdot 1 & 1\cdot 5+(-3)2+2\cdot 3 & 1\cdot 6+(-3)5+2\cdot 2 \\ 3\cdot 2+(-4)1+1\cdot 1 & 3\cdot 5+(-4)2+1\cdot 3 & 3\cdot 6+(-4)5+1\cdot 2 \\ 2\cdot 2+(-5)1+3\cdot 1 & 2\cdot 5+(-5)2+3\cdot 3 & 2\cdot 6+(-5)5+3\cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{pmatrix}$$

№3.83.

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5\cdot 6+0\cdot(-2)+2\cdot 7+3\cdot 4 \\ 4\cdot 6+1\cdot(-2)+5\cdot 7+3\cdot 4 \\ 3\cdot 6+1\cdot(-2)+(-1)\cdot 7+2\cdot 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 56 \\ 69 \\ 17 \end{pmatrix}$$

№3.80

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4\cdot(-28)+3\cdot 38 & 4\cdot 93+3(-126) \\ 7\cdot(-28)+5\cdot 38 & 7\cdot 93+5(-126) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 21 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot 7+(-6)\cdot 2 & 2\cdot 3+(-6)\cdot 1 \\ (-6)7+21\cdot 2 & (-6)\cdot 3+21\cdot 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{ДЗ II №3.79, 3.82, 3.84, 3.85.}}$

№3.86 Степень квадратной матрицы

$$\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5 & 6\\ -9 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}13 & -14\\ 21 & -22\end{pmatrix}$$

№3.90

Найти значение многочлена $f(A)$ от квадратной матрицы A, если $f(x) = 3x^2 - 4$, $A = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$.

Решение.

$$f(A) = 3A^2 - 4E = 3\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} =$$

$$= 3\begin{pmatrix}4 & 5\\ 0 & 9\end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}3\cdot 4 & 3\cdot 5\\ 3\cdot 0 & 3\cdot 9\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\cdot 1 & 4\cdot 0\\ 4\cdot 0 & 4\cdot 1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}12 & 15\\ 0 & 27\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12-4 & 15-0\\ 0-0 & 27-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8 & 15\\ 0 & 23\end{pmatrix}$$

№ 3.92.

$f(x)=3x^2-2x+5$, $A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\2&-4&1\\3&-5&2\end{pmatrix}$ $f(A)-?$

Д/З III № 3.91.

Решение

$f(A)=3A^2-2A+5E=$

$$=3\begin{pmatrix}1&-2&3\\2&-4&1\\3&-5&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2&3\\2&-4&1\\3&-5&2\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&-2&3\\2&-4&1\\3&-5&2\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=$$

$$=3\begin{pmatrix}6&-9&7\\-3&7&4\\-1&4&8\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&-2&3\\2&-4&1\\3&-5&2\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}18&-27&21\\-9&21&12\\-3&12&24\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&-4&6\\4&-8&2\\6&-10&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}18-2+5&-27-(-4)+0&21-6+0\\-9-4+0&21-(-8)+5&12-2+0\\-3-6+0&12-(-10)+0&24-4+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21&-23&15\\-13&34&10\\-9&22&25\end{pmatrix}$$

№3.93.

Вычислить $AB-BA$, если $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -4 & 1\end{pmatrix}$

Решение.

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -3\\ -4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & -1\\ 12 & -13\end{pmatrix}$$

Замечание. На РК2 может быть $AB+BA$.

$$BA=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10 & 7\\ 0 & -9\end{pmatrix}$$

$$AB-BA=\begin{pmatrix}-6 & -1\\ 12 & -13\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-10 & 7\\ 0 & -9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6+10 & -1-7\\ 12-0 & -13+9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -8\\ 12 & -4\end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{ДЗ IV №3.95.}}$

Опр. Матрицы A и B наз. **коммутирующими** (**перестановочными**), если $AB=BA$

№3.103.

Вычислить AA^T, если $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3\\ 4 & -1 & 5 & -1\end{pmatrix}$

Решение.

$$AA^T=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3\\ 4 & -1 & 5 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & -1\\ 1 & 5\\ 3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1^2+2^2+1^2+3^2 & 1\cdot4+2(-1)+1\cdot5+3(-1)\\ 4\cdot1+(-1)2+5\cdot1+(-1)\cdot3 & 4^2+(-1)^2+5^2+(-1)^2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}15 & 4\\ 4 & 43\end{pmatrix}$$

Обсуждение. $\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3 & a_4\\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\\ a_4 & b_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec a\vec a & \vec a\vec b\\ \vec b\vec a & \vec b\vec b\end{pmatrix}\leftarrow$ квадр. симмет. матрица (AA^T)

Пусть

$\vec a=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$

$\vec b=\{b_1,b_2,b_3,b_4\}$

$\boxed{\text{ДЗ } \overline{V} \ №3.104.}$

Обратная матрица

<u>Опр</u> Пусть A - квадр. мат.
<u>Обратной матрицей для мат. A</u> наз. такая квадр. матрица B:
$$AB = BA = E.$$
<u>Обозн.</u> A^{-1}.

<u>Критерий $\exists$ обратной матрицы</u>

Для матрицы A $\exists$ обратная матрица $A^{-1} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \det A \neq 0$

<u>Т-ма</u> Если для мат. A $\exists$ обратная матрица A^{-1}, то она единственная.

Методы нахождения A^{-1}

I сп. Метод присоединенной матрицы: $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^{*}}$

II сп. Метод элементарных преобразований.

I-м способом.

№3.106.

$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ Найти A^{-1}.

Решение.

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot A^*$$

2 Найдём присоединённую матрицу A^*

1) Матрица из дополнит. миноров (M_{ij}):

$$\begin{pmatrix}M_{11}&M_{12}\\M_{21}&M_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&3\\2&1\end{pmatrix}$$

2) Матрица из алгебраических дополнений $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$

$$\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-3\\-2&1\end{pmatrix}$$

3) Присоединённая матрица $A^*=(A_{ij})^T=(A_{ji})=$

$$=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}\\A_{12}&A_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-2\\-3&1\end{pmatrix}$$

① Найдём $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 - 3\cdot 2 = -2$

③ Найдём обратную матрицу $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\cdot A^{*} =$

$$= \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

<u>Проверка</u> $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$ верно.

№ 3.109.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Найти A^{-1}.

Решение. $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*$

② Найдём присоединённую матрицу A^*.

1) Матрица из дополнит. миноров (M_{ij}):

$M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 8 = -1$

$M_{12} = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -18 - 20 = -38$

$M_{13} = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -12 - 15 = -27$

$M_{21} = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -15 + 14 = -1$

$M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 35 = -41$

$M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 25 = -29$

$M_{31} = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 21 = -1$

$M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 42 = -34$

$M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 30 = -24$

$$(M_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & -38 & -27 \\ -1 & -41 & -29 \\ -1 & -34 & -24 \end{pmatrix}$$

2) Матрица из алгебраических дополнений $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$:

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 38 & -27 \\ 1 & -41 & 29 \\ -1 & 34 & -24 \end{pmatrix}$$

3) Присоединенная матрица $A^* = (A_{ij})^T = (A_{ji}) =$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & 34 \\ -27 & 29 & -24 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{ДЗ } \overline{\text{VI}} \text{ №3.107, 3.110, 3.113}}$

1 $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -18 - 84 + 100 - 105 + 16 + 90 = -1$

3 $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^* = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & 34 \\ -27 & 29 & -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$ Ответ:

Сканировано с CamScanner

№ 3.108.

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad A^{-1} - ?$$

Решение.

① $A^* - ?$

1) $(M_{ij}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

2) $(A_{ij}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

3) $A^* = (A_{ij})^T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

② $\det A = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

③ $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

Обсуждение. 1) Здесь $A^{-1} = A^T$. Такие матрицы A наз. ортогональными.

2) $AA^T = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^2 + a_2^2 & a_1 b_1 + a_2 b_2 \\ b_1 a_1 + b_2 a_2 & b_1^2 + b_2^2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=E}$.

II-м способом

№3.106.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} - ?$$

Решение.

$$(A|E) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot(-3) + \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) + \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) |:(-2) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) = (E|A^{-1})$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

С помощью элем. преобразований мы привели матрицу $(A|E)$ к виду $(E|B)$. Тогда $B = A^{-1}$.

№3.114.

$$A=\begin{pmatrix}2&7&3\\3&9&4\\1&5&3\end{pmatrix}\qquad A^{-1}-?$$

Решение.

$$(A\mid E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&7&3&1&0&0\\3&9&4&0&1&0\\1&5&3&0&0&1\end{array}\right)\sim \text{перестановка строк}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&5&3&0&0&1\\2&7&3&1&0&0\\3&9&4&0&1&0\end{array}\right)\begin{array}{l}\cdot(-2)\ \cdot(-3)\\ +\\ +\end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&5&3&0&0&1\\0&-3&-3&1&0&-2\\0&-6&-5&0&1&-3\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \cdot(-2)\quad \text{I}:(-3)\\ +\end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&5&3&0&0&1\\0&1&1&-\frac{1}{3}&0&\frac{2}{3}\\0&0&1&-2&1&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ +\\ \cdot(-5)\end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-2&\frac{5}{3}&0&-\frac{7}{3}\\ 0&1&1&-\frac{1}{3}&0&\frac{2}{3}\\ 0&0&1&-2&1&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ \cdot(-1)\quad\cdot 2\end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-\frac{7}{3}&2&-\frac{1}{3}\\ 0&1&0&\frac{5}{3}&-1&-\frac{1}{3}\\ 0&0&1&-2&1&1\end{array}\right)=(E\,|\,A^{-1})$$

След., $A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{7}{3}&2&-\frac{1}{3}\\ \frac{5}{3}&-1&-\frac{1}{3}\\ -2&1&1\end{pmatrix}=$

можно записать так:

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-7&6&-1\\ 5&-3&-1\\ -6&3&3\end{pmatrix}$$

Ответ:

№3.116.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix} \qquad A^{-1}-?$$

Решение.

$$(A|E)=\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&1&1&0&0&0\\1&1&-1&-1&0&1&0&0\\1&-1&1&-1&0&0&1&0\\1&-1&-1&1&0&0&0&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\cdot(-1)\\+\\+\\+\end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&1&1&0&0&0\\0&0&-2&-2&-1&1&0&0\\0&-2&0&-2&-1&0&1&0\\0&-2&-2&0&-1&0&0&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\:(-2)\\:(-2)\\:(-2)\end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&1&1&0&0&0\\0&0&1&1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&0\\0&1&0&1&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}&0\\0&1&1&0&\frac{1}{2}&0&0&-\frac{1}{2}\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2}
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\ \cdot(-1) \\ + \\ \\
\end{array}
\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
+ \\ \cdot(-1) \\ \cdot(-1) \\ +
\end{array}
\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
+ \\ \\ \cdot(-1) \\ :(-2)
\end{array}
\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4}
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
+ \quad + \quad + \\ \\ \\ \cdot(-1) \quad \cdot(-1)
\end{array}
\sim\left(E \;\middle|\; \overbrace{\begin{array}{cccc}
\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\
\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\
\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4}
\end{array}}^{A^{-1}}\right)$$

След., $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Ответ: ←

$\boxed{\text{Д/З } \overline{\underline{\text{VII}}} \quad №\, 3.115,\ 3.117}$