# Занятие 13

## Решение матричных уравнений

| $\boxed{AX=B}$ | $\boxed{XA=B}$ |
|---|---|

**I сп. С помощью обратной матрицы $A^{-1}$!**

1) Найти $A^{-1}$!

| | |
|---|---|
| 2) $X=A^{-1}B$ | 2) $X=BA^{-1}$ |

**II сп. С помощью элементарных преобразований**

| | |
|---|---|
| $(A\|B)\sim\ldots\sim(E\|A^{-1}B)$ $\Rightarrow X=A^{-1}B$ | 1) Транспонируем обе части уравнения: $(XA)^T=B^T$. Получим $A^TX^T=B^T$ <br> 2) $(A^T\|B^T)\sim\ldots\sim(E\|(A^T)^{-1}B^T)$ $\Rightarrow X^T=(A^T)^{-1}B^T\ (=(A^{-1})^TB^T=(BA^{-1})^T)$ |

Зам. Мы решаем такие уравнения, для которых $\det A\neq 0$. След., $\exists A^{-1}$.

# № 3.121

Решить уравнение $\boxed{AX=B}$:

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}3&5\\5&9\end{pmatrix}.$$

Решение.

## I сп. С помощью обратной матрицы

1) Найти $A^{-1}$.
Уже находили на прошлом занятии: $A^{-1}=\begin{pmatrix}-2&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

2) $X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}-2&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&5\\5&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\cdot3+1\cdot5&-2\cdot5+1\cdot9\\\frac{3}{2}\cdot3+(-\frac{1}{2})5&\frac{3}{2}\cdot5+(-\frac{1}{2})9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1\\2&3\end{pmatrix}$

## II сп. С помощью элементарных преобр-ий.

$$(A|B)=\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&3&5\\3&4&5&9\end{array}\right)\cdot(-3)\,]+\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&3&5\\0&-2&-4&-6\end{array}\right)]+\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-1&-1\\0&-2&-4&-6\end{array}\right)\,|:(-2)\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-1&-1\\0&1&2&3\end{array}\right)=(E/X)$$

След., $X=\begin{pmatrix}-1&-1\\2&3\end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix}-1&-1\\2&3\end{pmatrix}$.

№3.122.

Решить уравнение $\boxed{XA=B}$:

$$X\cdot\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -5 & 6\end{pmatrix}.$$

Решение.

I сп. С помощью обратной матрицы

1) Найти $A^{-1}$. Матрицу $A^{-1}$ можно найти двумя способами (с помощью присоед. матрицы и с помощью элем. преобразований):

$$(A|E)=\left(\begin{array}{cc|cc}3 & -2 & 1 & 0\\ 5 & -4 & 0 & 1\end{array}\right)\begin{matrix}:3\\ :5\end{matrix}\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 1 & -\frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{5}\end{array}\right)\cdot(-1)\ +\ \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & -\frac{2}{15} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{5}\end{array}\right)\cdot\left(-\frac{15}{2}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2}\end{array}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\ +\ \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2}\end{array}\right)=(E|A^{-1})\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & -2\\ 5 & -3\end{pmatrix}$$

2) $X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} =$

Св-во: $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB)$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 10 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$$

## II сп. С помощью элементарных преобразований

1) Транспонируем обе части ур-я: $(XA)^T = B^T \Rightarrow A^T X^T = B^T$

2) Найдём $X^T$ с помощью элем. преоб-ий:

$$(A^T \mid B^T) = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 5 & -1 & -5 \\ -2 & -4 & 2 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mid :(-2) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 5 & -1 & -5 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 3 & 5 & -1 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-3) \\ + \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ \cdot 2 \;\; \mid :(-1) \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right) = (E \mid \underbrace{(A^T)^{-1} B^T}_{X^T}) \Rightarrow X^T = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

3) $X = (X^T)^T = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$.

**Обсуждение 1** Сравним метод элем. преобр-ий для

решения уравнения

$$\boxed{AX=B}$$

$$(A|B)\sim\ldots\sim(E|A^{-1}B)$$

$$\Rightarrow X=A^{-1}B$$

нахождения обратной матрицы $A^{-1}$:

$A^{-1}$ явл. решением ур-я

$$\boxed{AX=E}$$

вместо B — матрица E.

$$(A|E)\sim\ldots\sim(E|A^{-1}E)=(E|A^{-1})$$

$$\Rightarrow X=A^{-1}$$

Решение одинаковое.

**Обсуждение 2.** Решение ур-я $XA=B$ содержит больше шагов 1) трансп-е ур-е 2) решение транспонированного ур-я

$$A^TX^T=B^T$$

3) транспонирование ответа:

$$X=(X^T)^T.$$

№ 3.125

$$X\begin{pmatrix}5 & 3 & 1\\ 1 & -3 & -2\\ -5 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8 & 3 & 0\\ -5 & 9 & 0\\ -2 & 15 & 0\end{pmatrix} \qquad X-?$$

Решение. Уравнение имеет вид $XA=B$.

1) Транспонируем обе части уравнения:

$$A^T X^T = B^T$$

$$\begin{pmatrix}5 & 1 & -5\\ 3 & -3 & 2\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}X^T=\begin{pmatrix}-8 & -5 & -2\\ 3 & 9 & 15\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

2) Найдём $X^T$ методом элем. преобр-ий:

$$(A^T|B^T)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}5 & 1 & -5 & -8 & -5 & -2\\ 3 & -3 & 2 & 3 & 9 & 15\\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 3 & -3 & 2 & 3 & 9 & 15\\ 5 & 1 & -5 & -8 & -5 & -2\end{array}\right)\begin{array}{l}\cdot(-3)\ \cdot(-5)\\ +\\ +\end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&-2&1&0&0&0\\ 0&3&-1&3&9&15\\ 0&11&-10&-8&-5&-2\end{array}\right)\begin{matrix}\\ |:3\\ \\ \end{matrix}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&-2&1&0&0&0\\ 0&1&-\frac{1}{3}&1&3&5\\ 0&11&-10&-8&-5&-2\end{array}\right)\begin{matrix}+\\ \cdot(-11)\ \cdot 2\\ +\end{matrix}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&\frac{1}{3}&2&6&10\\ 0&1&-\frac{1}{3}&1&3&5\\ 0&0&-\frac{19}{3}&-19&-38&-57\end{array}\right)\begin{matrix}\\ \\ :(-19)\end{matrix}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&\frac{1}{3}&2&6&10\\ 0&1&-\frac{1}{3}&1&3&5\\ 0&0&\frac{1}{3}&1&2&3\end{array}\right)\begin{matrix}\\ +\\ \cdot(-1)\ \ \cdot 3\end{matrix}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&1&4&7\\ 0&1&0&2&5&8\\ 0&0&1&3&6&9\end{array}\right)=(E\,|\,X^T)\Rightarrow X^T=\begin{pmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{pmatrix}$$

3) $X=(X^T)^T=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$

Ответ: $\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$

Д/З I. №3.123 ($AXB=C\Rightarrow X=A^{-1}CB^{-1}$)

№3.124 (двумя способами)

# Решение СЛАУ матричным способом

Рас матричное ур-е $AX=B$ вида $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

Его решение: $X = A^{-1}B$ (пусть $\exists A^{-1}$).

№ 3.187.

Решить матричным способом систему ур-ий

$$\begin{cases} 3x - 5y = 13 \\ 2x + 7y = 81 \end{cases}$$

ДЗ II № 3.188, 3.191 } двумя способами.

Решение.

1) Запишем систему в виде матричного ур-я

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 13 \\ 18 \end{pmatrix}}_{B}$$

и решим её матричным способом:

$$X = A^{-1}B.$$

## I сп. С помощью обратной матрицы

Формула:

$$\boxed{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

но пред. способы знать надо!

1) Найдём $A^{-1}$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 21 + 10 = 31$$

$$\Downarrow$$

$$A^{-1} = \frac{1}{31}\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

2) Найдём

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{31}\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 13 \\ 81 \end{pmatrix} = \frac{1}{31}\begin{pmatrix} 7\cdot 13 + 5\cdot 81 \\ -2\cdot 13 + 3\cdot 81 \end{pmatrix} = \frac{1}{31}\begin{pmatrix} 496 \\ 217 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 7 \end{pmatrix}$$

## II сп. С помощью элемент. преобразований

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -5 & 13 \\ 2 & 7 & 81 \end{array}\right) \begin{array}{l} |:3 \\ |:2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{5}{3} & \frac{13}{3} \\ 1 & \frac{7}{2} & \frac{81}{2} \end{array}\right) (-1) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{5}{3} & \frac{13}{3} \\ 0 & \frac{31}{6} & \frac{217}{6} \end{array}\right) \cdot \frac{6}{31} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{5}{3} & \frac{13}{3} \\ 0 & 1 & 7 \end{array}\right) \cdot \frac{5}{3} \; + \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 16 \\ 0 & 1 & 7 \end{array}\right) = (E|X) \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 16 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $(x; y) = (16; 7)$.

# Ранг матрицы и её базисные миноры

**Опр.** Рангом матрицы A наз. число, равное макс. порядку среди её ненулевых миноров.

**Обозн.** $rg A$

Минор M матрицы A наз. базисным, если 1) он $\neq 0$,
2) его порядок равен $rg A$.

# Способы вычисления ранга матрицы и нахождения её какого-нибудь базисного минора.

## I сп. Метод окаймляющих миноров

① Найти минор $k$-го порядка, который $\neq 0$.

↓

Можно ли составить окаймляющий минор $(k+1)$-го порядка?

Нет ↓ $\operatorname{rg} A = k$

↓ Да

Вычислить окаймляющие миноры $(k+1)$-го порядка

↓

Среди них есть хотя бы один $\neq 0$?

Нет ↓ $\operatorname{rg} A = k$

↓ Да

$k := k+1$

② Базисный минор — тот, который $\neq 0$ и имеет максимальный порядок.

## II сп. Метод элементарных преобразований

1) Привести матрицу $A$ к ступенчатому виду $A'$ с помощью элем. преобр-ий строк.
Найти ранг ступенч. матрицы $A'$ : $rg A'$ (он равен количеству ненулевых строк).
Тогда $rg A = rg A'$

2) Базисный минор матрицы $A'$ расположен на пересечении её ненулевых строк со столбцами, соответствующими первым слева ненулевым эл-м в каждой строке.
Базисный минор матрицы $A$ расположен в тех же столбцах, но его строки надо найти, перебрав миноры порядка $rg A$, расположенные в этих столбцах, но разных строках.

# №3.150.

Найти ранг и какой-нибудь базисный минор матрицы A, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение

## I сп. Метод окаймляющих миноров

1) Рас. какой-нибудь ненулевой минор 1-го порядка, напр., $M_1^1 = 2$.

Рас. окаймляющие его миноры 2-го порядка, среди которых ищем хотя бы один ненулевой.

Напр., $M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ этот окаймл. минор не подх.

$M_{12}^{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$.

! Замечание Можно было сразу выбрать ненулевой минор 2-го порядка – минор 2×2 с непропорциональными строками.

Рас. окаймляющие его миноры 3-го порядка, среди которых ищем хотя бы один ненулевой.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

Напр.,

$$M_{123}^{123} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{не подх.}$$

$$M_{123}^{134} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{не подх.}$$

$$M_{123}^{135} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{не подх.}$$

След., все окаймл. миноры 3-го пор. $= 0 \Rightarrow \boxed{rg A = 2}$

2) Базисный минор, напр.,

$$M_{12}^{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -2.$$

## II сп. Метод элементарных преобразований.



1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) \\ + \\ \end{matrix} \quad \begin{matrix} \cdot(-2) \\ + \end{matrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) \\ + \end{matrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'$ ← ступенчатая матрица; она имеет 2 ненулевые строки $\Rightarrow rg\,A' = 2 \Rightarrow rg\,A = 2$

$(M')^{13}_{12}$ – баз. минор матрицы $A'$.

2) Баз. минор матрицы $A$ расположен в $1^{\text{ом}}$ и $3^{\text{ем}}$ столбцах. Его порядок равен $rg\,A$, т.е. 2.

Возьмём, напр., $M^{13}_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -2$ или
(в матрице $A$, а не в матрице $A'$) $M^{13}_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4$.

Ответ: $rg\,A = 2$, $M^{13}_{12}$ – баз. минор

# № 3.154.

Найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров и какой-нибудь её базисный минор.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Решение.

Рас. какой-нибудь ненулевой минор 2-го порядка

$$M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Рас. окаймляющие его миноры 3-го порядка:

$M_{123}^{123} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$ (т.к. 3ий столбец равен сумме 1-го и 2-го)

$M_{124}^{124} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1+2-3=0$ (2ой столбец равен сумме 1-го, умн. на 2, и 3-го)

$M_{125}^{125} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ (по 2ой строке)

Все окаймляющие миноры 3-го порядка равны нулю $\Rightarrow$ $rg\,A = 2$

Ответ: $2;\ M_{12}^{12}$.

# №3.152.

Найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров и какой-нибудь её базисный минор.

$\boxed{\text{Д/З III}: №3.151,\ 3.153}$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение.

Рас. какой-нибудь ненулевой минор 2-го порядка:

$$M^{12}_{12} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -9+5 = -4 \neq 0$$

Рас. окаймляющие его миноры 3-го порядка:

$$M^{123}_{123} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \\ -1 & -3 & -5 \end{vmatrix} = -14 \neq 0$$

Рас. окаймляющие его миноры 4-го порядка:

$$M^{1234}_{1234} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & -3 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -5 & 0 \\ 7 & -5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad M^{1235}_{1235} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Все окаймляющие миноры 4-го порядка равны нулю $\Rightarrow \operatorname{rg} A = 3$.

Ответ: $3;\ M^{123}_{123}$.

# № 3.159

Вычислить ранг матрицы методом элементарных преобразований:

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}$$

Решение.

1) $$A = \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) \\ \\ \cdot(-1) \\ + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-3) \\ + \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-1) \\ \\ + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdot(-1) \\ + \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'$$

$rg A' = 3 \Rightarrow rg A = 3$

$M^{123}_{123}$ – базисный минор матрицы $A'$.

2) Найдём базисный минор (какой-нибудь) матрицы $A$:

$M^{1\,2\,3}_{i_1 i_2 i_3}$. Он расположен в тех же столбцах что и баз. минор матрицы $A'$.

Будем перебирать миноры, расположенные в разных строках.

$$M^{123}_{123} = \begin{vmatrix} 25 & 31 & 17 \\ 75 & 94 & 53 \\ 75 & 94 & 54 \end{vmatrix} = 25 \begin{vmatrix} 1 & 31 & 17 \\ 3 & 94 & 53 \\ 3 & 94 & 54 \end{vmatrix} \cdot(-1) = 25 \begin{vmatrix} 1 & 31 & 17 \\ 3 & 94 & 53 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

разлож. по последней строке
$$= 25 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 31 \\ 3 & 94 \end{vmatrix} = 25(94-93) = 25 \neq 0$$

$\boxed{\text{Д/З IV. №3.161.}}$

$\Rightarrow M^{123}_{123}$ базисный.

Ответ: 3; $M^{123}_{123}$.

Мы использовали св-ва det:

1) если строку (столбец) определителя умн. на число, то весь определитель умножится на это число;

2) если к строке определителя прибавить другую строку, умнож. на число, то определитель не изменится.

# №3.156

**Чему равен ранг матрицы A при различных значениях λ?**

Решение. Приведём A к ступенчатому виду.

$$A=\begin{pmatrix}3&1&1&4\\ \lambda&4&10&1\\ 1&7&17&3\\ 2&2&4&3\end{pmatrix}\ \text{переставим строки}\sim\begin{pmatrix}1&7&17&3\\ 2&2&4&3\\ 3&1&1&4\\ \lambda&7&10&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\cdot(-2)\ \cdot(-3)\ \cdot(-\lambda)\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\ +\ \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&7&17&3\\ 0&-12&-30&-3\\ 0&-20&-50&-5\\ 0&4-7\lambda&10-17\lambda&1-3\lambda\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ |:(-3)\\ |:5\\ \\ \end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&7&17&3\\ 0&4&10&1\\ 0&-4&-10&-1\\ 0&4-7\lambda&10-17\lambda&1-3\lambda\end{pmatrix}+\sim\begin{pmatrix}1&7&17&3\\ 0&4&10&1\\ 0&4-7\lambda&10-17\lambda&1-3\lambda\\ 0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \cdot(4-7\lambda)\\ \cdot(-4)\\ \\ \end{matrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&7&17&3\\ 0&4(4-7\lambda)&10(4-7\lambda)&(4-7\lambda)\\ 0&-4(4-7\lambda)&-4(10-17\lambda)&-4(1-3\lambda)\\ 0&0&0&0\end{pmatrix}+\ |:(4-7\lambda)\sim\begin{pmatrix}1&7&17&3\\ 0&4&10&1\\ 0&0&-2\lambda&5\lambda\\ 0&0&0&0\end{pmatrix}=A'$$

При $\lambda=0$ $\quad rg\,A'=2 \Rightarrow rg\,A=2$

При $\lambda\neq0$ $\quad rg\,A'=3 \Rightarrow rg\,A=3$

Ответ: 2 при $\lambda=0$, 3 при $\lambda\neq0$.

ДЗ V: №3.156; №3.167 (любым способом)