Занятие 14.

Решение однородных СЛАУ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$ в коорд. виде ; $$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$ в матричном виде

Пусть $\mathrm{rg}A = r$; n – число неизвестных системы.

2 случая:

Система имеет единственное (нулевое) решение $\Leftrightarrow r = n$.

Система имеет бесконечно много решений $\Leftrightarrow r < n$.

В этом случае для системы $\exists$ ФСР (фундам. система решений – набор из $k = n - r$ линейно независимых решений $E_1, \ldots, E_k$, через которые можно выразить любое решение:

$$X = E_1 c_1 + \ldots + E_k c_k, \quad c_i \in \mathbb{R}.$$

Сканировано с CamScanner

Решение однородной системы $AX=\Theta$ методом Гаусса и нахождение её ФСР

① Выпишем матрицу A из коэф-в системы и приведём её к ступенчатому виду A'.

1) Найдём $rg\,A = rg\,A' = r$; сравним с числом неизвестных n.
Если $r=n$, то решение только $x_1=0, \dots, x_n=0$.
Если $r<n$, то ищем другие решения, кроме нулевого.

2) Выберем базисный минор в $A' \Rightarrow$
Выберем базисные (их r штук) и свободные (их $k=n-r$) неизв.

3) Кол-во ФСР : их $k=n-r$ штук

② Выпишем эквивалентную систему с матрицей A'

1) Выразим базисные неизвестные через свободные.

2) Переобозначим своб. неизвестные через c_i, $c_i \in \mathbb{R}$.
и выпишем общее решение в коорд. виде.

I сп. 3) Выпишем общее решение в вект. виде: $X = E_1c_1 + \dots + E_kc_k$, $c_i \in \mathbb{R}$

4) Выпишем ФСР.

II сп. 3) Подст. в коорд. решение $c_1=1, c_2=\dots=c_k=0$. Получим E_1,
$c_1=0, c_2=1, c_3=\dots=c_k=0$. Получим E_2 и т.д.
Выпишем ФСР

4) Выпишем общее решение в вект. виде $X = E_1c_1 + \dots + E_kc_k$, $c_i \in \mathbb{R}$.

Сканировано с CamScanner

№ 3.224

Найти ФСР и общее решение однородной системы

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

Решение.

① $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 2 \\ \, \end{matrix} + \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'$

1) $\left.\begin{matrix} r = rg A = rg A' = 1 \\ n = 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow r < n \Rightarrow \exists$ беск. много решений

2) Баз. минор в A': $(M')^1_1 = 1 \Rightarrow x_1$ – базисная неизв, x_2, x_3 – своб.

3) Кол-во ФСР: $k = n - r = 3 - 1 = 2$ шт.

② Эквивалентная система с матрицей A':

$$x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \quad \text{(из 1-го ур-я)}$$

1) Выразим базисное неизв. через свободные:

$$x_1 = 2x_2 + 3x_3$$

2) Переобозначим $x_2 = c_1$, $x_3 = c_2 \Rightarrow x_1 = 2c_1 + 3c_2$

$\Rightarrow$ общее решение в координатном виде:

$$\begin{cases} x_1 = 2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_2 \end{cases}, \quad c_i \in \mathbb{R}$$

Сканировано с CamScanner

I сп. 3) Общее решение в векторном виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3c_2 \\ 0 \\ c_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} c_1 + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} c_2, \quad c_i \in \mathbb{R}$$

4) ФСР: $E_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

II сп. 3) ФСР:

пусть $c_1 = 1, \ c_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow E_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

пусть $c_1 = 0, \ c_2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow E_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

4) Общее решение в векторном виде:

$$X = E_1 c_1 + E_2 c_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} c_1 + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} c_2, \quad c_i \in \mathbb{R}.$$

Ответ: ФСР: $E_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

общ. реш.: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = E_1 c_1 + E_2 c_2$, где $c_i \in \mathbb{R}$.

Сканировано с CamScanner

№3.225.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Задание то же.

Решение.

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) \\ \\ + \end{matrix} \; |:3 \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) \\ + \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{11}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{3}{11} \sim$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{7}{11} \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-2) \\ + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{7}{11} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{11} \end{pmatrix} = A'$

1) $\left.\begin{matrix} r = rg A = rg A' = 3 \\ n = 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow r = n \Rightarrow$ однор. система имеет только нулевое решение: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$.

2) Баз. минор в A' – это $\det A' = (M')^{123}_{123} \neq 0 \Rightarrow x_1, x_2, x_3$ – баз. неизв., и своб. неизв. нет

3) ФСР нет (их кол-во $k = n - r = 3 - 3 = 0$).

Ответ: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; ФСР нет.

Сканировано с CamScanner

Замечание к №3.225.

Если выписать экв. систему ур-ий с матрицей A' и решить её, то получим то же нулевое решение:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 0 \\ x_2 + \frac{7}{11}x_3 = 0 \\ -\frac{3}{11}x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}.$$

Сканировано с CamScanner

№ 3.228.

$$\begin{cases} 2x_1-4x_2+5x_3+3x_4=0 \\ 3x_1-6x_2+4x_3+2x_4=0 \\ 4x_1-8x_2+17x_3+11x_4=0 \end{cases}$$

Задание то же

Решение.

① $A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 3 & -6 & 4 & 2 \\ 4 & -8 & 17 & 11 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) \\ \\ + \end{matrix} \;|:2 \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 3 & -6 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-3) \\ + \\ \end{matrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot 2 \\ + \end{matrix} \;|\cdot(-1) \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'$

1) $\left.\begin{matrix} r = rg A = rg A' = 2 \\ n = 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow r < n \Rightarrow \exists$ беск. много решений

2) Баз. минор в A': $(M')^{13}_{12} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 7 \end{vmatrix} \Rightarrow x_1, x_3$ – базисные, x_2, x_4 – свободные неизв.

3) Кол-во ФСР: $k = n - r = 4 - 2 = 2$

Прежде чем переходить к экв. системе ур-ий, ещё преобразуем матрицу A' так, чтобы в углах ступенек стали 1, а над ними 0.

Сканировано с CamScanner

$$A' \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ |:7 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{7} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot\left(-\frac{5}{2}\right) \end{matrix} + \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{7} \end{pmatrix}$$

② Эквивалентная система:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - \frac{2}{7}x_4 = 0 \\ x_3 + \frac{5}{7}x_4 = 0 \end{cases}$$

1) Выразим базисные неизв. через свободные:

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 + \frac{2}{7}x_4 \\ x_3 = -\frac{5}{7}x_4 \end{cases}$$

2) Переобозначим $x_2 = C_1$, $x_4 = C_2$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2C_1 + \frac{2}{7}C_2 \\ x_3 = -\frac{5}{7}C_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ общее решение в коорд. виде: $\begin{cases} x_1 = 2C_1 + \frac{2}{7}C_2 \\ x_2 = C_1 \\ x_3 = -\frac{5}{7}C_2 \\ x_4 = C_2 \end{cases}$, $C_i \in \mathbb{R}$.

Сканировано с CamScanner

I сп. 3) Общее решение в векторном виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2C_1 \\ C_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{7}C_2 \\ 0 \\ -\frac{5}{7}C_2 \\ C_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} C_1 + \begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ 0 \\ -\frac{5}{7} \\ 1 \end{pmatrix} C_2, \quad C_i \in \mathbb{R}$$

4) ФСР: $E_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 2/7 \\ 0 \\ -5/7 \\ 1 \end{pmatrix}.$

II сп. 3) ФСР:

пусть $c_1 = 1,\ c_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow E_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

пусть $c_1 = 0,\ c_2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2}{7} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -\frac{5}{7} \\ x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow E_2 = \begin{pmatrix} 2/7 \\ 0 \\ -5/7 \\ 1 \end{pmatrix}$

4) Общее решение в векторном виде:

$$X = E_1 c_1 + E_2 c_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} C_1 + \begin{pmatrix} 2/7 \\ 0 \\ -5/7 \\ 1 \end{pmatrix} C_2, \quad c_i \in \mathbb{R}$$

Ответ: ФСР: $E_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ E_2 = \begin{pmatrix} 2/7 \\ 0 \\ -5/7 \\ 1 \end{pmatrix}$; общ. реш.: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = E_1 C_1 + E_2 C_2, \ c_i \in \mathbb{R}$.

Сканировано с CamScanner

№3.230

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0 \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

$x_2 + x_3 + x_6 = 0$ Задание то же

Решение.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot(-1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} (-1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} (-1) \sim$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (-1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'$

1) $\left.\begin{matrix} r = rg\,A = rg\,A' = 3 \\ n = 6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow r < n \Rightarrow \exists$ беск. много решений

2) Баз. минор в A': $(M')^{123}_{123} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow$ x_1, x_2, x_3 – баз. неизв., x_4, x_5, x_6 – свободные

3) Кол-во ФСР: $k = n - r = 6 - 3 = 3$ шт.

Сканировано с CamScanner

② Эквивалентная система с матрицей A':

$$\begin{cases} x_1 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

1) Выразим базисные неизвестные через свободные:

$$\begin{cases} x_1 = x_4 - x_5 \\ x_2 = x_4 - x_6 \\ x_3 = -x_4 \end{cases}$$

2) Переобозначим $x_4 = c_1$, $x_5 = c_2$, $x_6 = c_3$ $\Rightarrow \begin{cases} x_1 = c_1 - c_2 \\ x_2 = c_1 - c_3 \\ x_3 = -c_1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ общее решение в коорд. виде:

$$\begin{cases} x_1 = c_1 - c_2 \\ x_2 = c_1 - c_3 \\ x_3 = -c_1 \\ x_4 = c_1 \\ x_5 = c_2 \\ x_6 = c_3 \end{cases}, \quad c_i \in \mathbb{R}$$

4) ФСР: E_1, E_2, E_3

Iсп. 3) Общее решение в векторном виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_1 \\ -c_1 \\ c_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ c_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -c_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ c_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} c_1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} c_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} c_3, \text{ где } c_i \in \mathbb{R}$$

Сканировано с CamScanner

II сп. 3) ФСР:

пусть $c_1=1, c_2=0, c_3=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=1 \\ x_3=-1 \\ x_4=1 \\ x_5=0 \\ x_6=0 \end{cases} \Rightarrow E_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$

пусть $c_1=0, c_2=1, c_3=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=0 \\ x_3=0 \\ x_4=0 \\ x_5=1 \\ x_6=0 \end{cases} \Rightarrow E_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$

пусть $c_1=0, c_2=0, c_3=1 \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=-1 \\ x_3=0 \\ x_4=0 \\ x_5=0 \\ x_6=1 \end{cases} \Rightarrow E_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

ДЗ I №3.223
3.226
3.227
3.229

4) Общее решение в векторном виде:

$$X=E_1c_1+E_2c_2+E_3c_3 \Rightarrow \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}c_1+\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}c_2+\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}c_3, \text{ где } c_i\in\mathbb{R}$$

Ответ: ФСР: $E_1=\ldots, E_2=\ldots, E_3=\ldots$; общ. реш.: $\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_6\end{pmatrix}=E_1c_1+E_2c_2+E_3c_3,\ c_i\in\mathbb{R}$

Сканировано с CamScanner

№ 3.235.

Найти a, при которых система имеет нетривиальные решения. Найти эти решения.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 7x_3 = 0 \\ x_1 + a x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Система $AX = \Theta$ имеет нетрив. решения $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $rg\,A < n$, где n – кол-во неизвестных.

Решение.

1) $$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 7 \\ 1 & a & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 4 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-4) \quad \cdot(-2) \\ + \\ + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & -4a-1 & -1 \\ 0 & -2a+1 & -1 \end{pmatrix} = A'$$

$r = rg\,\underbrace{A}_{= rg\,A'} = 2 \Leftrightarrow -4a-1 = -2a+1$

$-2 = 2a$

$a = -1$

$r = rg\,\underbrace{A}_{= rg\,A'} = 3 \Leftrightarrow -4a-1 \neq -2a+1$

$a \neq -1$

$n = 3$

$\Rightarrow r < n \Leftrightarrow \boxed{a = -1}$

(т.е. сист. имеет нетрив. решения)

2) Подставим $a = -1$ в систему и решим её.

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-1) \; |:3 \\ + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Сканировано с CamScanner

x_1, x_2 – базисные неизвестные, x_3 – свободная

Д/З II №3.234

③ Эквивалентная система: $\begin{cases} x_1 + \frac{5}{3}x_3 = 0 \\ x_2 - \frac{1}{3}x_3 = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{5}{3}x_3 \\ x_2 = \frac{1}{3}x_3 \end{cases}$$

Решение в коорд. виде: $\begin{cases} x_1 = -\frac{5}{3}c \\ x_2 = \frac{1}{3}c \\ x_3 = c \end{cases}, \ c \in \mathbb{R}$

Решение в вект. виде: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} c, \ c \in \mathbb{R}$

↑ это E (ФСР сост. из одного вектора)

Ответ: нетрив. реш. при $a = -1$;

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix} c, \ c \in \mathbb{R}.$$

Сканировано с CamScanner