Занятие 15

Решение неоднородных СЛАУ.

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$ в коорд. виде; $$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{B}$$ в матричном виде

где не все b_i равны нулю.

Если $rg(A|B)\neq rg A$, то система не имеет решений.
Если $rg(A|B)=rg A$, то система имеет решения.

Пусть $rg(A|B)=rg A=r$; n – число неизвестных:

2 случая:

$\boxed{\text{Система имеет единственное (ненулевое) решение} \Leftrightarrow r=n.}$

$\boxed{\text{Система имеет бесконечно много решений} \Leftrightarrow r<n.}$

В этом случае все решения системы $AX=B$ можно представить: $X=X^0+c_1X^{(1)}+\ldots+c_kX^{(k)}$, где X^0 – частное реш. $AX=B$; $X^{(1)},\ldots,X^{(k)}$ – ФСР $AX=0$

Решение неоднородной системы методом Гаусса

1. Выпишем матрицу $(A|B)$ из коэф-в системы и приведём её к ступенчатому виду $(A'|B')$.

1) Найдём $rg(A|B) = rg(A'|B')$ и $rg\,A = rg\,A'$, сравним их.
Если $rg(A|B) \neq rg\,A$, то система не имеет решений.
Если $rg(A|B) = rg\,A \overset{обозн.}{=} r$, то система имеет решение. Найдём их.
Сравним r с числом неизвестных n.
Если $r = n$, то решение единственное
Если $r < n$, то решений беск. много.

2) Выберем базисный минор в A' $\Rightarrow$ выберем базисные (их r штук) и своб. (их $k = n - r$) неизв.

3) Кол-во ФСР соотв. однор. системы $AX = \Theta$: их $k = n - r$ шт.

Удобно привести $(A'|B')$ к такому ступенч. виду $(A''|B'')$, чтобы в уголках ступенек стояли 1, а над ними — 0.

2. Выпишем эквивалентную систему с такой матр. A''

1) Выразим базисные неизвестные через свободные.
2) Переобозначим своб. неизвестные через c_i, $c_i \in \mathbb{R}$
и выпишем общее решение в коорд. виде.
3) Выпишем общее решение в вект. виде:

$$X = B'' + E_1 c_1 + \ldots + E_k c_k\,, \quad c_i \in \mathbb{R}$$

это частное решение неоднор. сис. $AX=B$
(в лекции оно обозначено X^0)

это ФСР однор. системы $AX=\Theta$
(в лекции они обозначены $X^{(1)}, \ldots, X^{(k)}$;
в задачнике $- E_1, \ldots, E_k$)

№3.206

Исследовать совместность и найти общее решение системы неоднородных уравнений:

$$\begin{cases} 2x - y + z = -2 \\ x + 2y + 3z = -1 \\ x - 3y - 2z = 3 \end{cases}$$

Решение.

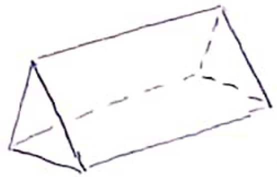
1 $(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & 3 \end{array}\right)$ переставим строки $\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-1) \; \cdot(-2) \\ + \\ \\ \end{array} \sim$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & -5 & 4 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \\ + \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) = (A'|B')$$

1) $rg(A|B) = rg(A'|B') = 3$, $rg\, A = rg\, A' = 2$

$rg(A|B) \neq rg\, A \Rightarrow$ система не имеет решений (несовместна)

Ответ: несовместна.



(каждые 2 пл. здесь пересекаются)

Зам. Это 3 пл., не имеющие общей точки.

№3.208

$$\begin{cases} 3x_1-2x_2-5x_3+x_4=3 \\ 2x_1-3x_2+x_3+5x_4=-3 \\ x_1+2x_2-4x_4=-3 \\ x_1-2x_2-4x_3+9x_4=19 \end{cases}$$

← в задачнике опечатка

Задание то же.

Решение.

1)

$$(A|B)=\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & -5 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & -4 & -3 \\ 1 & -2 & -4 & 9 & 19 \end{array}\right) \underset{\text{переставим строки}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 & -3 \\ 1 & -2 & -4 & 9 & 19 \\ 2 & -3 & 1 & 5 & -3 \\ 3 & -2 & -5 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{matrix} \cdot(-1) \cdot(-2) \cdot(-3) \\ + \\ + \\ + \end{matrix} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & -4 & -4 & 13 & 22 \\ 0 & -7 & 1 & 13 & 3 \\ 0 & -8 & -5 & 13 & 12 \end{array}\right) |:(-4) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{13}{4} & -\frac{22}{4} \\ 0 & -7 & 1 & 13 & 3 \\ 0 & -8 & -5 & 13 & 12 \end{array}\right) \begin{matrix} \cdot(7) \cdot(8) \\ + \\ + \end{matrix} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{13}{4} & -\frac{22}{4} \\ 0 & 0 & 8 & -\frac{39}{4} & -\frac{142}{4} \\ 0 & 0 & 3 & -13 & -32 \end{array}\right) \cdot(4); \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{13}{4} & -\frac{22}{4} \\ 0 & 0 & 3 & -13 & -32 \\ 0 & 0 & 32 & -39 & -142 \end{array}\right) |:3 \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{13}{4} & -\frac{22}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{3} & -\frac{32}{3} \\ 0 & 0 & 32 & -39 & -142 \end{array}\right) \cdot(-32) + \sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{13}{4} & -\frac{22}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{3} & -\frac{32}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{299}{3} & \frac{598}{3} \end{array}\right) \cdot \frac{3}{299} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{13}{4} & -\frac{22}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{3} & -\frac{32}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) = (A'|B')$$

1) $rg(A|B) = rg(A'|B') = 4$; $rg A = rg A' = 4$

$\Rightarrow rg(A|B) = rg A \Rightarrow$ система совместна ; $r = 4$

число неизвестных $n = 4$.

$r = n = 4 \Rightarrow$ решение единственное.

не обязат.

2) Базисный минор в A' – это $\det A' \Rightarrow$
$\Rightarrow$ баз. неизв. x_1, x_2, x_3, x_4 (их 4), свободных нет ($k = \overset{n-r=}{4-4} = 0$)

3) Кол-во ФСР соотв. однор. системы $AX = \theta$: их нет ($k = 0$).

Найдём решение. Приведём $(A'|B')$ к такому ступенч. виду $(A''|B'')$, чтобы в уголках ступенек стояли 1, а над ними 0:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{13}{4} & -\frac{22}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{3} & -\frac{32}{3} \\ 0 & 0 & 32 & -39 & -142 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot\left(\frac{13}{4}\right) \\ \cdot\left(\frac{13}{3}\right) \\ \cdot(4) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ (-1) \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-2) \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) = (A''|B'')$$

2. Выпишем эквивалентную систему: $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 3 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 2 \end{cases}$

Ответ: $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

№ 3.210.

$$\begin{cases} 2x_1+7x_2+3x_3+x_4=6 \\ 3x_1+5x_2+2x_3+2x_4=4 \\ 9x_1+4x_2+x_3+7x_4=2 \end{cases}$$

Задание то же.

Решение.

1) $$(A|B)=\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array}\right)\begin{array}{l} :2 \\ \cdot(-3) \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -11 & -5 & 1 & -10 \end{array}\right)\begin{array}{l} \cdot(-3) \\ + \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & -\frac{11}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -5 \\ 0 & -11 & -5 & 1 & -10 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \cdot(-2) \; \cdot\left(-\frac{2}{11}\right) \\ + \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 1 & \frac{5}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{10}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (A'|B') \begin{array}{l} + \\ \cdot\left(-\frac{7}{2}\right) \\ \end{array}$$

$rg(A|B)=rg(A'|B')=2$; $rgA=rgA'=2$

$rg(A|B)=rgA \Rightarrow$ система совместна

$n=4$ (число неизв), $r=2$ (ранг $(A|B)$ или A), $r<n \Rightarrow$

$\Rightarrow$ беск. много решений.

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{11} & \frac{9}{11} & -\frac{2}{11} \\ 0 & 1 & \frac{5}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{10}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

← нулевую строку можно не писать

② Эквивалентная система:

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{11}x_3 + \frac{9}{11}x_4 = -\frac{2}{11} \\ x_2 + \frac{5}{11}x_3 - \frac{1}{11}x_4 = \frac{10}{11} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{2}{11} + \frac{1}{11}x_3 - \frac{9}{11}x_4 \\ x_2 = \frac{10}{11} - \frac{5}{11}x_3 + \frac{1}{11}x_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{2}{11} + \frac{1}{11}c_1 - \frac{9}{11}c_2 \\ x_2 = \frac{10}{11} - \frac{5}{11}c_1 + \frac{1}{11}c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$

Это решение в коорд. виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{11} \\ \frac{10}{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{11} \\ -\frac{5}{11} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} c_1 + \begin{pmatrix} -\frac{9}{11} \\ \frac{1}{11} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} c_2$$

Это решение в вект. виде.

ДЗ I: № 3.207, 3.209, 3.212, 3.213.

Ответ: $X = X^0 + E_1 c_1 + E_2 c_2$, где $X^0 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{11} \\ \frac{10}{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{11} \\ -\frac{5}{11} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} -\frac{9}{11} \\ \frac{1}{11} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

№ 3.239.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 5x_5 = 2 \\ \quad 2x_2 + 3x_3 + 4x_3 + 5x_5 = -1 \end{cases}$$

Решение:

① $$(A|B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & -4 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 & -1 \end{array}\right) \begin{matrix} + \\ \cdot(-1) \end{matrix} \begin{matrix} + \\ |:2 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \begin{matrix} (-1) \\ + \\ \updownarrow \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (A'|B')$$

$$\left.\begin{matrix} rg(A|B) = rg(A'|B') = 2 \\ rg A = rg A' = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow rg(A|B) = rg A$$

$\Downarrow$ сист. совмест.

$n = 5 < 2 = r \Rightarrow$ беск. много реш.

x_1, x_2 – баз. неизв., x_3, x_4, x_5 – своб.

② Экв. система:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 + \frac{3}{2}x_3 + 2x_4 + \frac{5}{2}x_5 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}x_3 - 2x_4 - \frac{5}{2}x_5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}c_1 - 2c_2 - \frac{5}{2}c_3 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \\ x_5 = c_3 \end{cases}$$, где $c_i \in \mathbb{R}$. Решение в координатном виде.

Решение в векторном виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} c_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} c_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} c_3$$, где $c_i \in \mathbb{R}$

Ответ: $X = X^0 + E_1 c_1 + E_2 c_2 + E_3 c_3$, где

$$X^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_i \in \mathbb{R}.$$

$\boxed{\text{Д/З II № 3.236.}}$

№3.218

Исследовать совместность и найти общее решение в зависимости от значения параметра λ:

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1 \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9 \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = \lambda \end{cases}$$

Решение

1) $$(A|B) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -3 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & -2 & 3 & 7 & 1 \\ 8 & -6 & -1 & -5 & 9 \\ 7 & -3 & 7 & 17 & \lambda \end{array}\right) \begin{array}{l} |:5 \\ \cdot(-2) \\ + \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 4 & -2 & 3 & 7 & 1 \\ 0 & -2 & -7 & -19 & 7 \\ 7 & -3 & 7 & 17 & \lambda \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-4),\ \cdot(-7) \\ + \\ |:(-2) \\ + \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{7}{5} & \frac{19}{5} & -\frac{7}{5} \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} & \frac{19}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & \frac{6}{5} & \frac{21}{5} & \frac{57}{5} & -\frac{21}{5}+\lambda \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ + \\ \cdot\frac{3}{5},\ \left(-\frac{2}{5}\right),\ \left(-\frac{6}{5}\right) \\ + \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{13}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} & \frac{19}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{13}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} & \frac{19}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (A'|B')$$

1) При $\lambda \neq 0$

$rg(A|B) = rg(A'|B') = 3$,

$rg A = rg A' = 2$

$\Rightarrow rg(A|B) \neq rg A \Rightarrow$ система несовместна

2) При $\lambda = 0$

$rg(A|B) = rg(A'|B') = 2 = rg A' = rg A \Rightarrow rg(A|B) = rg A \Rightarrow$

$\Rightarrow$ система совместна

② Решим систему при $\lambda = 0$.

Эквивалентная система ур-ий:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{5}{2}x_3 + \frac{13}{2}x_4 = -\frac{3}{2} \\ x_2 + \frac{7}{2}x_3 + \frac{19}{2}x_4 = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{3}{2} - \frac{5}{2}x_3 - \frac{13}{2}x_4 \\ x_2 = -\frac{7}{2} - \frac{7}{2}x_3 - \frac{19}{2}x_4 \end{cases}$$

Решение в координатном виде:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{3}{2} - \frac{5}{2}c_1 - \frac{13}{2}c_2 \\ x_2 = -\frac{7}{2} - \frac{7}{2}c_1 - \frac{19}{2}c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Решение в векторном виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{7}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ -\frac{7}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} c_1 + \begin{pmatrix} -\frac{13}{2} \\ -\frac{19}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Ответ: ... ↑.

$\boxed{\text{Д/З III № 3.219.}}$