Занятие 3.

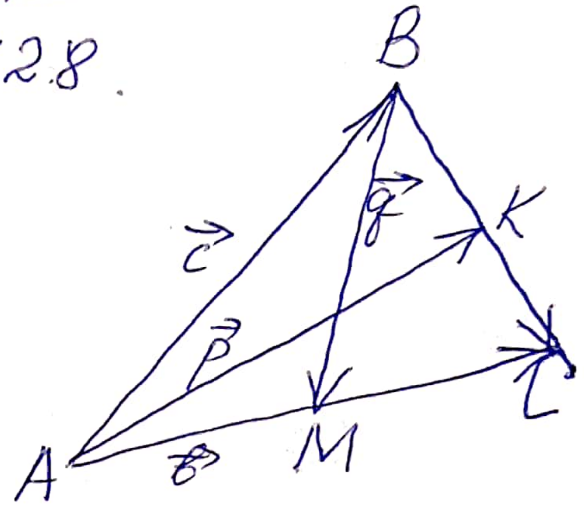
Линейные операции над векторами. Разложение вектора по базису и координаты вектора

№2.8

Дано: $\triangle ABC$

AK и BM – медианы

Выразить $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{BC}$ через $\vec{p}=\vec{AK}$, $\vec{q}=\vec{BM}$



Решение.

(Обсудить понятие направл. отрезка (геом. вектора) и свободного вектора). Обозначим $\vec{b}=\vec{AC}$, $\vec{c}=\vec{AB}$.
Задачу можно решить разными способами. Покажем исп-е правила Крамера.

1) Выразим медианы через стороны $\vec{b}, \vec{c}$.

$$\vec{p}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})$$

$$\vec{q}=\frac{1}{2}(\vec{BA}+\vec{BC})=\frac{1}{2}(-\vec{c}+\underbrace{(\vec{b}-\vec{c})}_{\text{т.к. } \vec{c}+\vec{BC}=\vec{b}})=\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}$$

2) Выразим стороны через медианы.

$$\begin{cases}\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}=\vec{p}\\ \frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}=\vec{q}\end{cases}$$

Это сист. с неизв. $\vec{b},\vec{c}$ и столбцом своб. членов $\begin{pmatrix}\vec{p}\\ \vec{q}\end{pmatrix}$. По правилу Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -1\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=-\frac{3}{4}$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}\vec{p} & \frac{1}{2}\\ \vec{q} & -1\end{vmatrix}=-1\cdot\vec{p}-\frac{1}{2}\vec{q},\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \vec{p}\\ \frac{1}{2} & \vec{q}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\vec{q}-\frac{1}{2}\vec{p}=-\frac{1}{2}\vec{p}+\frac{1}{2}\vec{q}$$

Сканировано с CamScanner

$$\vec{b} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-1\vec{p} - \frac{1}{2}\vec{q}}{-\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\vec{p} + \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{4}^{2}}{3}\vec{q} = \frac{4}{3}\vec{p} + \frac{2}{3}\vec{q}$$

$$\vec{c} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-\frac{1}{2}\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{q}}{-\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}\vec{p} - \frac{2}{3}\vec{q}$$

$$\vec{BC} = \vec{b} - \vec{c} = \left(\frac{4}{3}\vec{p} + \frac{2}{3}\vec{q}\right) - \left(\frac{2}{3}\vec{p} - \frac{2}{3}\vec{q}\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\vec{p} + \frac{4}{3}\vec{q}$$

Ответ: $\vec{AC} = \frac{4}{3}\vec{p} + \frac{2}{3}\vec{q}$, $\vec{AB} = \frac{2}{3}\vec{p} - \frac{2}{3}\vec{q}$, $\vec{BC} = \frac{2}{3}\vec{p} + \frac{4}{3}\vec{q}$.

в условии №2.8 надо найти $\vec{CA}$.

$\boxed{\text{ДЗ I №2.10, 2.19 (выразите } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ через } \vec{p}, \vec{q}, \vec{r} \text{ из системы и подставьте в } \vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c})}$

№ 2.38

1. Док., что тройка $\vec{e_1}\{1,0,0\}$, $\vec{e_2}\{1,1,0\}$, $\vec{e_3}\{1,1,1\}$ векторов, заданных координатами в ортонормир. базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, тоже образует базис во мн-ве всех векторов пр-ва.

2. Найти координаты вектора $\vec{a} = -2\vec{i} - \vec{k}$ в базисе $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ и написать разложение $\vec{a}$ по базису $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$.

Из теории.

Мн-во всех векторов пр-ва – это V_3.

Базисом в V_3 наз. любая упорядоченная тройка некомпланарных векторов.

Сканировано с CamScanner

Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ некомпланарны $\Leftrightarrow$ после приложения к одной точке получим направленные отрезки $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$, не лежащие в одной плоскости.

3 вектора некомпланарны $\Leftrightarrow$ они лин. независимы. (Из геом. критерия лин. завис.)

Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ лин. независ., если равенство $\alpha_1\vec{a} + \alpha_2\vec{b} + \alpha_3\vec{c} = \vec{0}$ возможно только с нулевыми коэф-ми $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$.

Решение.

① Векторы $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ образуют упоряд. тройку. Док-м, что они некомпланарны. Тогда это будет базис в V_3

I способ (алгебраич.)

Док-м, что $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ лин. независимы ($\Rightarrow$ некомпл. $\Rightarrow$ это базис).

Рас. равенство

$$\boxed{\alpha_1\vec{e_1} + \alpha_2\vec{e_2} + \alpha_3\vec{e_3} = \vec{0}} \qquad (*)$$

1 сп. Используем разложения $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ по базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Координаты вектора – это его коэф-ты разложения по (в базисе) базису. Значит, из условия имеем

$$\vec{e_1} = 1\cdot\vec{i} + 0\cdot\vec{j} + 0\cdot\vec{k} = \vec{i}$$
$$\vec{e_2} = 1\cdot\vec{i} + 1\cdot\vec{j} + 0\cdot\vec{k} = \vec{i} + \vec{j}$$
$$\vec{e_3} = 1\cdot\vec{i} + 1\cdot\vec{j} + 1\cdot\vec{k} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

Сканировано с CamScanner

Подставим в (*):

$$\alpha_1 \vec{i} + \alpha_2(\vec{i}+\vec{j}) + \alpha_3(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}) = \vec{0}.$$

по свойствам лин. операций над векторами:

$$(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\vec{i} + (\alpha_2+\alpha_3)\vec{j} + \alpha_3 \vec{k} = \vec{0}.$$

Векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – это базис в V_3 $\Rightarrow$ они некомпланарны $\Rightarrow$ они лин. независ. $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ последнее равенство может выполняться только с нулевыми коэф-ми:

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0 \\ \alpha_2+\alpha_3=0 \\ \alpha_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1=0 \\ \alpha_2=0 \\ \alpha_3=0 \end{cases}.$$

След., (см. равенство (*)) векторы $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ лин. независ. $\Rightarrow$ они некомпл. $\Rightarrow$ это базис.

2 сп. Используем свойства координат векторов.

Перепишем (*) в координатах:

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_1 1\\ \alpha_1 0\\ \alpha_1 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\alpha_2 1\\ \alpha_2 1\\ \alpha_2 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\alpha_3 1\\ \alpha_3 1\\ \alpha_3 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

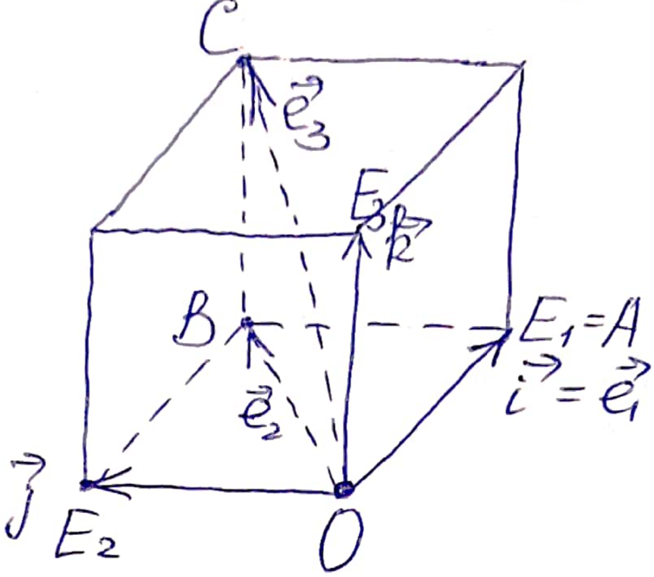
$$\begin{pmatrix}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\\ \alpha_2+\alpha_3\\ \alpha_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0 \\ \alpha_2+\alpha_3=0 \\ \alpha_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1=0 \\ \alpha_2=0 \\ \alpha_3=0 \end{cases} \Rightarrow \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3} \text{ базис}$$

Сканировано с CamScanner

II способ (геометрич.)

Отложим $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (пусть это правая тройка) и $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ от одной точки.



Из усл. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{e_1}=\vec{i}$

$\vec{e_2}=\vec{i}+\vec{j}$

$\vec{e_3}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$

Векторы $\vec{OA}=\vec{e_1}, \vec{OB}=\vec{e_2}, \vec{OC}=\vec{e_3}$ не лежат в одной плоскости $\Rightarrow \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ некомпланарны $\Rightarrow$ это базис.

2. По условию $\vec{a}=-2\vec{i}-\vec{k}$. (т.е. $=-2\vec{i}+0\cdot\vec{j}-1\cdot\vec{k}$, т.е. $\vec{a}\{-2,0,-1\}$ в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Коорд. способом решать не будем.)

Выразим $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ через $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ из системы

$$\begin{cases} \vec{i}=\vec{e_1} \\ \vec{i}+\vec{j}=\vec{e_2} \quad \Rightarrow \vec{j}=\vec{e_2}-\vec{i}=\vec{e_2}-\vec{e_1} \\ \vec{i}+\vec{j}+\vec{k}=\vec{e_3} \Rightarrow \vec{k}=\vec{e_3}-\vec{i}-\vec{j}=\vec{e_3}-\cancel{\vec{e_1}}-(\vec{e_2}-\cancel{\vec{e_1}})= \end{cases}$$

$$=\vec{e_3}-\vec{e_2}$$

Подставим в $\vec{a}$:

$\boxed{\vec{a}=}-2\vec{e_1}-(\vec{e_3}-\vec{e_2})\boxed{=-2\vec{e_1}+\vec{e_2}-\vec{e_3}}$ — это разлож. $\vec{a}$ по базису $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$.

След., $\boxed{\vec{a}\{-2,1,-1\} \text{ в базисе } \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}}$.

Ответ:

Сканировано с CamScanner

Д/З II № 2.36, 2.37;
2.22 (решите в одну строчку:
$\vec{c}-\vec{a}=(\vec{b}+\vec{c})-(\vec{a}+\vec{b}) \Rightarrow \vec{c}-\vec{a}$ комп. $\Rightarrow$ лин. зав.)
$\Rightarrow \vec{a}+\vec{b}, \vec{b}+\vec{c}, \vec{c}-\vec{a}$

№ 2.39

Даны $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}$, $\vec{b}=-3\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$.
Найти (сразу будем решать)

а) координаты орта $\vec{a_0}$ ($|\vec{a_0}|=1$ и $\vec{a_0}\uparrow\uparrow\vec{a}$).

Из усл. $\vec{a}\{2,3,0\}$ в ортонормир. базисе $\vec{i},\vec{j},\vec{k} \Rightarrow |\vec{a}|=\sqrt{2^2+3^2+0^2}=\sqrt{13}$.

$\vec{a_0}=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \Rightarrow \vec{a_0}\left\{\dfrac{2}{\sqrt{13}}, \dfrac{3}{\sqrt{13}}, \dfrac{0}{\sqrt{13}}\right\}=\left\{\dfrac{2}{\sqrt{13}}, \dfrac{3}{\sqrt{13}}, 0\right\}$
в базисе $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$.

б) координаты $\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$.

1 сп. (координатный)

Из условия
$\vec{a}\{2,3,0\}$
$\vec{b}\{0,-3,-2\}$ в баз. $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$
$\vec{c}\{1,1,-1\}$

По св-вам к-т:
$\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$ имеет к-ты

$$\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\-3\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}3\\5\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$$ в баз. $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$

2 сп. (исп. разложение по базису)

Разложим $\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$ по базису $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$:

$\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}=$
$=(2\vec{i}+3\vec{j})-\frac{1}{2}(-3\vec{j}-2\vec{k})+(\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})=$
$=3\vec{i}+5\frac{1}{2}\vec{j}+0\vec{k} \Rightarrow$

по св-м лин. операций над векторами

$\Rightarrow \{3, 5\frac{1}{2}, 0\}$ в баз. $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$

Сканировано с CamScanner

г) $\text{пр}_{\vec{j}}(\vec{a}-\vec{b}) = \dfrac{(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{j}}{\underbrace{|\vec{j}|}_{=1}} = (\vec{a}-\vec{b})\vec{j} \ominus$

по св-ву орт. проекции (выражение через скал. произв.)

Координаты $\vec{j}\{0,1,0\}$,

координаты $\vec{a}-\vec{b} = \begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\-3\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\6\\2\end{pmatrix}$, т.е. $\{2,6,2\}$

(по-другому:
$= (2\vec{i}+3\vec{j}) - (-3\vec{j}-2\vec{k}) =$
$= 2\vec{i}+6\vec{j}+2\vec{k} \Rightarrow \{2,6,2\}$)

Найдём скалярное произведение (исп. формулы для ортонормир. базиса).

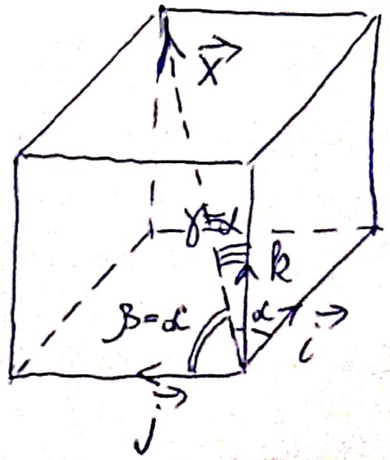
$\ominus\ 2\cdot 0 + 6\cdot 1 + 2\cdot 0 = 6$, т.е. $\text{пр}_{\vec{j}}(\vec{a}-\vec{b})$ – это вторая координата вектора $\vec{a}-\vec{b}$.

пропустить (скал. произв. - вспом.)

№2.44.

Найти вектор $\vec{x}$, образующий со всеми тремя базисными ортами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ равные острые углы, если $|\vec{x}| = 2\sqrt{3}$

Решение. Пусть $\vec{x}\{x,y,z\}$ в базисе $\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}$



Тогда по свойствам координат вектора в ортонорм. базисе

$x = \text{пр}_{\vec{i}}\vec{x} = |\vec{x}|\cos\alpha$

$y = \text{пр}_{\vec{j}}\vec{x} = |\vec{x}|\cos\alpha = x$

$z = \text{пр}_{\vec{k}}\vec{x} = |\vec{x}|\cos\alpha = x$

$\Rightarrow \vec{x}\{x,x,x\}$

Найдём $\cos\alpha$.

Сканировано с CamScanner

Для направляющих косинусов

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

След.,

$$3\cos^2\alpha = 1$$

$$\left.\begin{aligned} &\cos^2\alpha = \frac{1}{3} \\ &\cos\alpha > 0, \text{ т.к. } \alpha \text{ острый угол} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Найдём $x = |x| \cos x = 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 2.$

След., $\vec{x}\{x, x, x\} = \{2, 2, 2\}$ ← Ответ:

$$\boxed{\text{ДЗ III } \ N 2.45}$$

N 2.46.

При каких значениях α и β вектора $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \alpha\vec{k}$ и
$\vec{b} = \beta i - 6j + 2\vec{k}$
коллинеарны?

Решение. Вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллин. $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ они пропорциональны
(поясн: коллин. $\Leftrightarrow$ лин. завис. $\Leftrightarrow$ один выраж. через другой $\Leftrightarrow$ пропорц.)
След., координаты $\vec{a}$ и $\vec{b}$ пропорц., т.е.

$$\frac{-2}{\beta} = \frac{3}{-6} = \frac{\alpha}{2}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\text{ДЗ IV Доделать } N 2.46 \\ (\alpha = -1;\ \beta = 4)\end{gathered}}$$

Сканировано с CamScanner