Занятие 4

Скалярное произведение

<u>Опр</u> $\vec{a}\vec{b}$ – это число, равное $|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$

<u>Геом. св-ва:</u> ① $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||np_{\vec{a}}\vec{b}|$

$\vec{a}\vec{b} > 0 \Leftrightarrow \angle(\vec{a},\vec{b})$ острый

$\vec{a}\vec{b} < 0 \Leftrightarrow \angle(\vec{a},\vec{b})$ тупой

② $\vec{a}\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

<u>Выражение через скал. произведение:</u>

① $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\vec{a}}$

② $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ ③ $np_{\vec{a}}\vec{b} = \dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|}$

<u>Алгебр. св-ва:</u>

1) симметричность: $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$

2) } линейность (см. лекции)
3) }

4) св-ва скал. квадрата: $\vec{a}\vec{a} \geq 0 \ \forall \vec{a}$ и
$\vec{a}\vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$.

<u>Скал. произв. в координатах в ортонормир. базисе.</u>

Пусть $\vec{a}\{a_1, a_2, a_3\}$, $\vec{b}\{b_1, b_2, b_3\}$ в ортонорм. базисе $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$

Тогда $\vec{a}\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

I. Вычисление скал. произведение с помощью алгебр. и геом. свойств.

№2.65.

Дано:

$|\vec{a}_1| = 3$

$|\vec{a}_2| = 4$

$(\widehat{\vec{a}_1, \vec{a}_2}) = \frac{2\pi}{3}$

Найти

а) $\vec{a}_1^{\,2}$, б) $(3\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2)(\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2)$, в) $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2)^2$

Решение.

а) $\vec{a}_1^{\,2} = \vec{a}_1\vec{a}_1 = |\vec{a}_1||\vec{a}_1|\overbrace{\cos 0^\circ}^{\shortparallel\, 1} = |\vec{a}_1|^2 = 3^2 = 9$

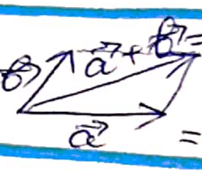
б) $(3\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2)(\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2) =$

$= 3\vec{a}_1\vec{a}_1 + 6a_1a_2 - 2\underbrace{\vec{a}_2\vec{a}_1}_{\vec{a}_1\vec{a}_2} - 4\vec{a}_2\vec{a}_2 =$

$= 3|a_1|^2 + 4|a_1||\vec{a}_2|\cos(\widehat{a_1 a_2}) - 4|\vec{a}_2|^2 = \ldots$

в) $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2)^2 = (\vec{a}_1 + \vec{a}_2)(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = \vec{a}_1^{\,2} + \underbrace{2\vec{a}_1\vec{a}_2}_{\text{т.к. } \vec{a}_1\vec{a}_2 = \vec{a}_2\vec{a}_1} + \vec{a}_2^{\,2} =$

$= |\vec{a}_1|^2 + 2|\vec{a}_1||\vec{a}_2|\cos(\widehat{\vec{a}_1, \vec{a}_2}) + |\vec{a}_2|^2 = \ldots$

> ДЗ I №2.66, 2.67 — Указание
>
> 
>
>
> $|\vec{c}| = \sqrt{\vec{c}^{\,2}} = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b})^2}$.

№2.70.

Дано: $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 120^\circ$

Найти $\text{пр}_{\vec{a}+\vec{b}}(2\vec{a} - \vec{b})$.

Решение. $\text{пр}_{\vec{a}+\vec{b}}(2\vec{a} - \vec{b}) = \dfrac{(\vec{a} + \vec{b})(2\vec{a} - \vec{b})}{|\vec{a} + \vec{b}|}$

1) $(\vec{a} + \vec{b})(2\vec{a} - \vec{b}) = \ldots$

2) $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^{\,2} + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^{\,2}} = \ldots$

> ДЗ II №2.71, 2.72 — Указание. Распишите лев. часть $\vec{a}\vec{b} = 0$ (по усл. $\vec{a} \perp \vec{b}$)
>
> $(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2)(5\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2) = 0$
>
> $5|\vec{e}_1|^2 + 6\vec{e}_1\vec{e}_2 - 8|\vec{e}_2|^2 = 0$
>
> по усл. $|\vec{e}_1| = 1, |\vec{e}_2| = 1$.
>
> $5 + 6\vec{e}_1\vec{e}_2 - 8 = 0$
>
> $\vec{e}_1\vec{e}_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos(\widehat{\vec{e}_1, \vec{e}_2}) = \frac{1}{2} \Rightarrow (\widehat{e_1 e_2}) = \frac{\pi}{3}$

II. Вычисление скал. произв. в к-х в ортонормир. базисе

№ 2.78 (б).   ДЗ III № 2.78 (а, в, д, 2)

Дано: $\vec{a}_1\{4,-2,-4\}$, $\vec{a}_2=\{6,-3,2\}$

Найти б) $(2\vec{a}_1-3\vec{a}_2)(\vec{a}_1+2\vec{a}_2)$

Решение.

I сп. Исп. алгебраич. св-ва скал. произв.

1) Распишем

$$(2\vec{a}_1-3\vec{a}_2)(\vec{a}_1+2\vec{a}_2)=2\vec{a}_1^{\,2}+4\underbrace{\vec{a}_1\vec{a}_2-3\vec{a}_2\vec{a}_1}_{\vec{a}_1\vec{a}_2}-6\vec{a}_2^{\,2}=$$

$$=2|\vec{a}_1|^2+\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2-6|\vec{a}_2|^2 =$$

2) Найдём

$|\vec{a}_1|^2=4^2+(-2)^2+(-4)^2=\ldots$

$|\vec{a}_2|^2=6^2+(-3)^2+2^2=\ldots$

$\vec{a}_1\vec{a}_2=4\cdot6+(-2)(-3)+(-4)2=\ldots$

3) Подставим 2) в 1): $\ldots = -200$.

II сп 1) Найдём координаты каждого множителя скал. произведения.

$$2\vec{a}_1-3\vec{a}_2=2\begin{pmatrix}4\\-2\\-4\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}6\\-3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8-18\\-4+9\\-8-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10\\5\\-14\end{pmatrix}$$

$$\vec{a}_1+2\vec{a}_2=\begin{pmatrix}4\\-2\\-4\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}6\\-3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+12\\-2-6\\-4+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16\\-8\\0\end{pmatrix}$$

2) Найдём скал. произв.

$$(2\vec{a}_1-3\vec{a}_2)(\vec{a}_1+2\vec{a}_2)=-10\cdot16+5\cdot(-8)+(-14)\cdot0=-200$$

№2.78 (*, з)

*) Найти направляющие косинусы $\vec{a}_1$.

Решение.

$$\cos\alpha = \cos(\widehat{\vec{a}_1, \vec{i}}) = \frac{\vec{a}_1 \vec{i}}{|\vec{a}_1||\vec{i}|} = \frac{\vec{a}_1 \vec{i}}{|\vec{a}_1|} = \frac{4\cdot 1+(-2)\cdot 0+(-4)\cdot 0}{\sqrt{4^2+(-2)^2+(-4)^2}} = \frac{2}{3}$$

$$\vec{i}\{1,0,0\} \Rightarrow |\vec{i}| = \sqrt{1^2+0^2+0^2} = 1$$

$$\cos\beta = \cos(\vec{a}_1, \vec{j}) = \ldots = -\frac{1}{3}$$

$$\cos\gamma = \cos(\vec{a}_1, \vec{k}) = \ldots = -\frac{2}{3}$$

аналогично

<u>Проверка</u>. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = 1$$

$$\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = 1 \text{ верно}$$

з) Найти $пр_{\vec{a}_1+\vec{a}_2}(\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2) = \dfrac{(\vec{a}_1+\vec{a}_2)(\vec{a}_1-2\vec{a}_2)}{|\vec{a}_1+\vec{a}_2|} = \ldots = -\dfrac{84}{\sqrt{129}}$

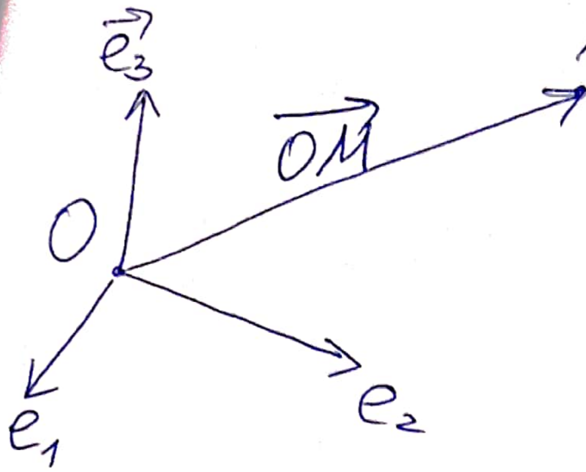
Числитель найдём как в п.б)

Знаменатель: $|\vec{a}_1+\vec{a}_2| = \sqrt{(\vec{a}_1+\vec{a}_2)^2} =$

$= \sqrt{|\vec{a}_1|^2 + 2\vec{a}_1\vec{a}_2 + |a_2|^2} =$ посчитаем в координатах

$$\boxed{\text{Д13 } \overline{\text{IV}} \text{ Доделать №2.78з)}}$$

Координаты точек



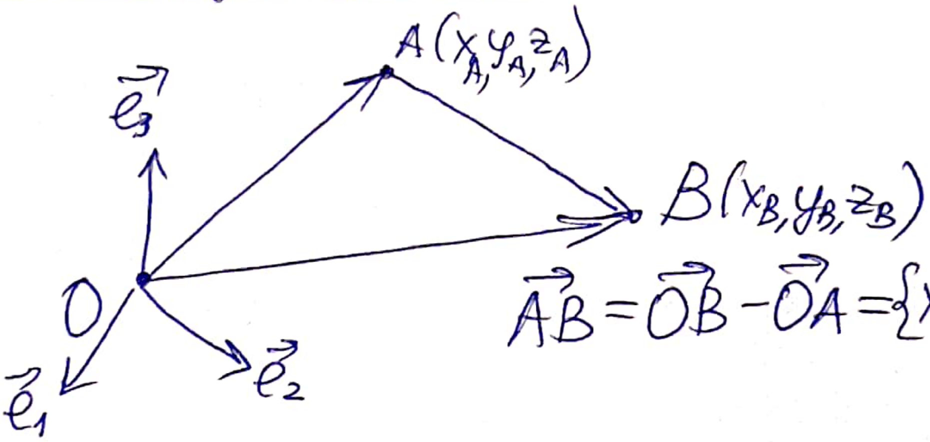
$M(x,y,z)$ в аффинной сист. к-т $O\vec e_1\vec e_2\vec e_3$

это

координаты радиус-вектора $\vec{OM}\{x,y,z\}$ в базисе $\vec e_1\vec e_2\vec e_3$

(т.е. $\vec{OM}=x\vec e_1+y\vec e_2+z\vec e_3$)

Координаты вектора по координатам его концов



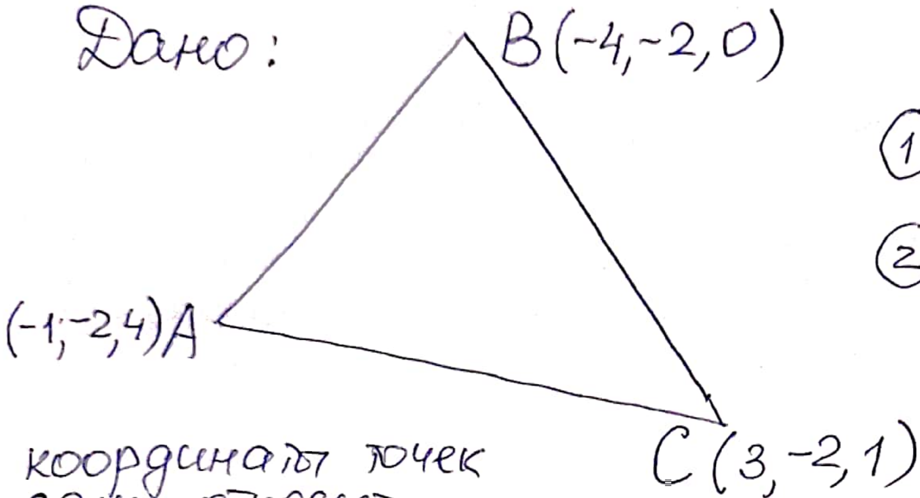
$$\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}=\{x_B-x_A,\ y_B-y_A,\ z_B-z_A\}$$

Занятие 4 (окончание)

IV. Использование скалярного произведения для решения геом. задач

№2.80.

Дано:



Найти

① $|AB|, |BC|, |AC|$;

② $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$.

координаты точек даны относит. прямоугольной системы координат $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$.

Решение. 1) Найдём координаты векторов:

$\overrightarrow{AB} = \{-4-(-1), -2-(-2), 0-4\} = \{-3, 0, -4\}$

$\overrightarrow{AC} = \{3-(-1), -2-(-2), 1-4\} = \{4, 0, -3\}$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \{4-(-3), 0-0, -3-(-4)\} = \{7, 0, 1\}$

2) Длины сторон:

$|AB| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}} = \sqrt{(-3)^2+0^2+(-4)^2} = \sqrt{25} = 5$

$|AC| = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}} = \sqrt{4^2+0^2+(-3)^2} = \sqrt{25} = 5$

$|BC| = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}} = \sqrt{7^2+0^2+1^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

3) Углы:

$\cos\hat{A} = \cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|AB||AC|} = \dfrac{-3\cdot4+0\cdot0+(-4)\cdot(-3)}{5\cdot5} = 0$

$\cos\hat{B} = \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|BA|\cdot|BC|} = \dfrac{3\cdot7+0\cdot0+4\cdot1}{5\cdot5\sqrt{2}} = \dfrac{25}{25\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\hat{C} = \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \dfrac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|CA||CB|} = \ldots = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \hat{A} = 90^\circ, \hat{B} = 45^\circ, \hat{C} = 45^\circ$. Ответ: ...

Деление отрезка в данном отношении

№1.

Дано:

$2k$ $\quad$ $3k$

$A(-1,-2,4)$ $\quad$ $C(x,y,z)$ $\quad$ $B(-4,-2,0)$

$\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{2}{3}$ $\quad$ Найти координаты т. C.

Решение.

Из теории $\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{p}{q} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{qx_A + px_B}{p+q} \\ y = \frac{qy_A + py_B}{p+q} \\ z = \frac{qz_A + pz_B}{p+q} \end{cases}$ для т. C

У нас $p=2,\ q=3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{для т. } C \begin{cases} x = \frac{3x_A + 2x_B}{2+3} \\ y = \frac{3y_A + 2y_B}{2+3} \\ z = \frac{3z_A + 2z_B}{2+3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3(-1)+2(-4)}{5} = -\frac{11}{5} \\ y = \frac{3(-2)+2(-2)}{5} = -\frac{10}{5} = -2 \\ z = \frac{3\cdot 4 + 2\cdot 0}{5} = \frac{12}{5} \end{cases}$$

Ответ: $C\left(-\frac{11}{5}, -2, \frac{12}{5}\right)$

Д/З V. №. Найти координаты т. D, если $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{2}{1}$. Координаты т. А и т. С те же.

№ Решить аналог. задачу из Д31 по АГ

Дополнительно:

№2.89 $\boxed{\text{ДВ VII №2.89}}$ 8

Дано:

$\vec{a_1}\{2,3,-1\}$, $\vec{x}\perp\vec{a}_1$ (1)

$\vec{a_2}\{1,-2,3\}$, $\vec{x}\perp a_2$ (2)

$\underbrace{\vec{x}\cdot(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})}_{\text{это скал. произв.}}=-6$ (3)

Найти к-ты $\vec{x}$.

Решение. Пусть $\vec{x}=\{x,y,z\}$

Тогда $(1)\Leftrightarrow \vec{x}\,\vec{a}_1=0 \Rightarrow 2x+3y-z=0$

$(2)\Leftrightarrow \vec{x}\,\vec{a}_2=0\Rightarrow x-2y+3z=0$

$(3)\Leftrightarrow 2x-y+z=-6$

Решим систему из 3х ур-ий с 3-мя неизв. x, y, z.