Занятие 5

Векторное произведение

Опр. $\vec{a} \times \vec{b}$ – это вектор $\vec{c}$:

1) $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$,
2) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – правая тройка,
3) $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$

Другое обозначение: $[\vec{a}, \vec{b}]$. ← в нашем задачнике

Векторное произведение в координатах в правом ортонормир. базисе

Пусть $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ в правом ортонорм. базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.
$\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$

Тогда

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \text{ т.е.}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left\{ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right\}.$$

Геометрич. свойства:
1) $|\vec{a} \times \vec{b}| = S_{\text{паралл. на } \vec{a}, \vec{b}}$
2) $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

Алгебраич. свойства:
1) кососимметричность: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
2) } линейность (см. лекции)
3) }
4) перестановка векторов правого ортонорм. базиса: $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$.

I. Вычисление вект. произв. с использ. алгебр. и геом. свойств.

№ 2.98 (а, б)

Дано:

$|\vec{a}_1| = 1$

$|\vec{a}_2| = 2$

$(\widehat{\vec{a}_1, \vec{a}_2}) = \frac{2\pi}{3}$

Вычислить

а) $|[\vec{a}_1, \vec{a}_2]|$

б) $|[2\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{a}_1 + 2\vec{a}_2]|$

Решение.

а) $|[\vec{a}_1, \vec{a}_2]| = |\vec{a}_1||\vec{a}_2| \sin(\widehat{\vec{a}_1, \vec{a}_2}) = 1 \cdot 2 \cdot \sin\frac{2\pi}{3} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

б) $|[2\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{a}_1 + 2\vec{a}_2]| =$

Порядок умножения важен из-за кососимметричности!

$$= |\underbrace{2[\vec{a}_1, \vec{a}_1]}_{=\vec{0}} + 4[\vec{a}_1, \vec{a}_2] + [\vec{a}_2, \vec{a}_1] + 2\underbrace{[\vec{a}_2, \vec{a}_2]}_{=\vec{0}}| =$$

$\vec{0}$, т.к. $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_1$ ($\vec{a}_2$ и $\vec{a}_2$) коллинеарны друг другу

$$= |\vec{0} + 4[\vec{a}_1, \vec{a}_2] - [\vec{a}_1, \vec{a}_2] + \vec{0}| =$$

т.к. $[\vec{a}_2, \vec{a}_1] = -[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$

$$= |3[\vec{a}_1, \vec{a}_2]| = 3|[\vec{a}_1, \vec{a}_2]| = 3 \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

из пункта а)

Д/З I № 2.98 (в).

№ 2.105 (а)

Дано:
$|\vec{a}| = 2$
$|\vec{b}| = 5$
$(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\pi}{6}$

Выразить вектор $\vec{c}_0$, единичный и ⊥-й $\vec{a}$ и $\vec{b}$, через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в случаях а) тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}_0)$ правая, б) тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}_0)$ левая

Решение а).

1) $\vec{c}_0 = \dfrac{[\vec{a}, \vec{b}]}{|[\vec{a}, \vec{b}]|}$ (если вектор разделить на его длину, то получится единичный вектор)

2) $|[\vec{a}, \vec{b}]| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 2 \cdot 5 \sin\frac{\pi}{6} = 2 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 5$

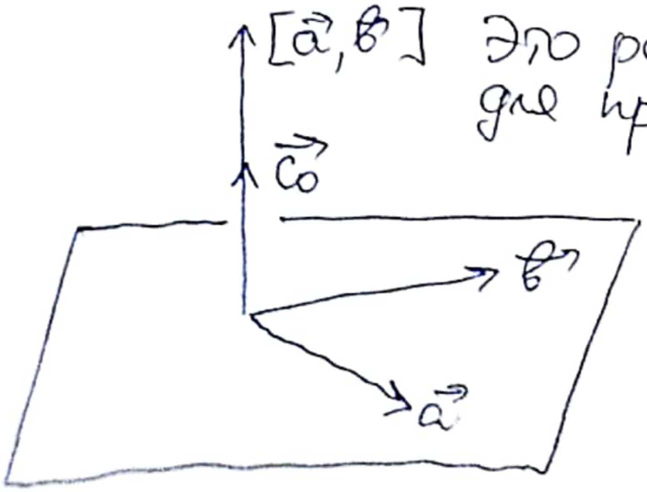
3) Подставим 2) в 1):

$$\vec{c}_0 = \frac{[\vec{a}, \vec{b}]}{5} \overset{\text{т.е.}}{=} \frac{1}{5}[\vec{a}, \vec{b}]$$

Ответ: $\vec{c}_0 = \frac{1}{5}[\vec{a}, \vec{b}]$.

$\boxed{\text{Д/З II № 2.105(б)}}$

Указание $\vec{c}_0 = \dfrac{-[\vec{a}, \vec{b}]}{|[\vec{a}, \vec{b}]|}$



Это рисунок для правой тройки $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}_0$

Для левой тройки $\vec{c}_0$ должен быть направлен в противоположную сторону.

№2.99.

Какому условию должны удовлетворять векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, чтобы векторы $\vec{a}_1+\vec{a}_2$ и $\vec{a}_1-\vec{a}_2$ были коллинеарны?

Решение.

Из геом. свойств:

$\vec{a}_1+\vec{a}_2$ и $\vec{a}_1-\vec{a}_2$ коллинеарны $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [\vec{a}_1+\vec{a}_2, \vec{a}_1-\vec{a}_2] = \vec{0}$.

Распишем

$$[\vec{a}_1+\vec{a}_2, \vec{a}_1-\vec{a}_2] = \underbrace{[\vec{a}_1, \vec{a}_1]}_{\vec{0}} - [\vec{a}_1, \vec{a}_2] + [\vec{a}_2, \vec{a}_1] - \underbrace{[\vec{a}_2, \vec{a}_2]}_{\vec{0}} =$$

$$= \vec{0} - [\vec{a}_1, \vec{a}_2] - [\vec{a}_1, \vec{a}_2] - \vec{0} =$$

$$= -2[\vec{a}_1, \vec{a}_2] = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ коллинеарны.

Ответ: $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ должны быть коллинеарны.

№2.100 (а, б)

Упростить выражения:

а) $[\vec{i}, \vec{j}+\vec{k}] - [\vec{j}, \vec{i}+\vec{k}] + [\vec{k}, \vec{i}+\vec{j}+\vec{k}] =$

$$= \underline{[\vec{i}, \vec{j}]} + \cancel{[\vec{i}, \vec{k}]} - \underbrace{[\vec{j}, \vec{i}]}_{-[\vec{i}, \vec{j}]} - [\vec{j}, \vec{k}] + \underbrace{[\vec{k}, \vec{i}]}_{-\cancel{[\vec{i}, \vec{k}]}} + \underbrace{[\vec{k}, \vec{j}]}_{-[\vec{j}, \vec{k}]} + \underbrace{[\vec{k}, \vec{k}]}_{\vec{0}}$$

$$= 2[\vec{i}, \vec{j}] - 2[\vec{j}, \vec{k}] = 2\vec{k} - 2\vec{i} = 2(\vec{k} - \vec{i})$$

$[\vec{a}+\vec{b}+\vec{c},\vec{c}]+[\vec{a}+\vec{b}+\vec{c},\vec{b}]+[\vec{b}-\vec{c},\vec{a}]=$

$=[\vec{a},\vec{c}]+\cancel{[\vec{b},\vec{c}]}+\underbrace{[\vec{c},\vec{c}]}_{=\vec{0}}+\cancel{[\vec{a},\vec{b}]}+\underbrace{[\vec{b},\vec{b}]}_{=\vec{0}}+\underbrace{[\vec{c},\vec{b}]}_{=\cancel{-[\vec{b},\vec{c}]}}+$

$+\underbrace{[\vec{b},\vec{a}]}_{=\cancel{-[\vec{a},\vec{b}]}}-\underbrace{[\vec{c},\vec{a}]}_{=-[\vec{a},\vec{c}]}=$

$=[\vec{a},\vec{c}]+[\vec{a},\vec{c}]=2[\vec{a},\vec{c}]$.

$\boxed{\text{Д/З III № 2.100 (в).}}$

II. Вычисление векторного произведения в координатах. || Во всех задачах базис берётся правый ортонормир.

№ 2.106 (в).

Дано:

$\vec{a}_1\{3,-1,2\}$

$\vec{a}_2\{1,2,-1\}$

Найти координаты вектора $[2\vec{a}_1-\vec{a}_2, 2\vec{a}_1+\vec{a}_2]$

Решение.

I способ.

1) Найдём координаты векторов $2\vec{a}_1-\vec{a}_2$ и $2\vec{a}_1+\vec{a}_2$.

$2\vec{a}_1-\vec{a}_2=\{2\cdot3-1, 2(-1)-2, 2\cdot2-(-1)\}=$
$=\{5,-4,5\}$

$2\vec{a}_1+\vec{a}_2=\{2\cdot3+1, 2(-1)+2, 2\cdot2+(-1)\}=$
$=\{7,0,3\}$

2) Вычислим

$$[2\vec{a}_1-\vec{a}_2, 2\vec{a}_1+\vec{a}_2]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 5 & -4 & 5\\ 7 & 0 & 3\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-4 & 5\\ 0 & 3\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}5 & 5\\ 7 & 3\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}5 & -4\\ 7 & 0\end{vmatrix}=$$

$=-12\vec{i}+20\vec{j}+28\vec{k}\Rightarrow$

$\boxed{\Rightarrow\{-12;20;28\}}$

II способ.

1) Упростим $[2\vec{a}_1 - \vec{a}_2, 2\vec{a}_1 + \vec{a}_2] =$

$$= 4\underbrace{[\vec{a}_1, \vec{a}_1]}_{\vec{0}} + 2[\vec{a}_1, \vec{a}_2] - 2\underbrace{[\vec{a}_2, \vec{a}_1]}_{-[\vec{a}_1, \vec{a}_2]} - \underbrace{[\vec{a}_2, \vec{a}_2]}_{\vec{0}} =$$

$$= 4[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$$

2) Вычислим $[\vec{a}_1, \vec{a}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$

$$= \vec{i}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -3\vec{i} + 5\vec{j} + 7\vec{k} \Rightarrow [\vec{a}_1, \vec{a}_2] = \{-3, 5, 7\}$$

$$\Downarrow$$

$$4[\vec{a}_1, \vec{a}_2] = \{-12; 20; 28\}$$

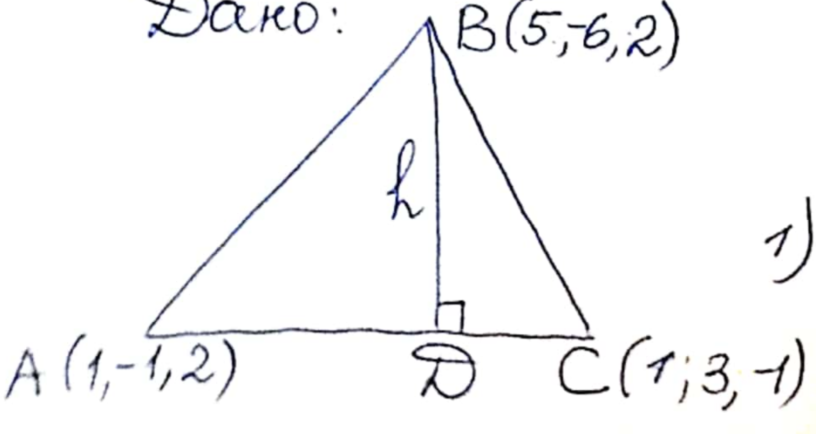
Ответ: $\{-12, 20, 28\}$.

$\boxed{\text{Д/З IV № 2.106 (а, б).}}$

III. Использование векторного произведения для решения геом. задач.

№ 2.108.

Дано:



Найти высоту BD.

Решение.

1) $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|AC| \cdot h \Rightarrow$

(7

$$\Rightarrow h = \frac{2S_{\Delta ABC}}{|AC|} = \frac{S_{\text{параллелограмма, постр. на } \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}}{|AC|} = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]|}{|AC|}$$

2) $\overrightarrow{AB} = \{5-1, -6-(-1), 2-2\} = \{4, -5, 0\}$

$\overrightarrow{AC} = \{1-1, 3-(-1), -1-2\} = \{0, 4, -3\}$

3) $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow \text{координаты } \overrightarrow{AB} \\ \leftarrow \text{координаты } \overrightarrow{AC} \end{matrix} =$

$= \vec{i} \begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} =$

$= 15\vec{i} + 12\vec{j} + 16\vec{k}$

$\underbrace{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]|}_{\text{это длина вектора „векторное произведение"; она равна площади параллелограмма}} = \sqrt{15^2 + 12^2 + 16^2} = \sqrt{625} = 25$

4) $|AC| = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{0^2 + 4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$

5) Подставим 3) и 4) в 1): $h = \frac{25}{5} = 5$

Ответ: 5.

Д/З $\underline{\overline{V}}$ №2.107.

Сканировано с CamScanner