# Занятие 6.

## Смешанное произведение

Опр $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]\vec{c} = \vec{a}[\vec{b}, \vec{c}]$

скалярное произведение

Другое обозначение: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Смешанное произведение в координатах в правом ортонормир. базисе:

Пусть $\vec{a}\{a_1, a_2, a_3\}$, $\vec{b}\{b_1, b_2, b_3\}$, $\vec{c}\{c_1, c_2, c_3\}$ $\Rightarrow \vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$.

Геометрич. свойства: 1) $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \pm V_{\text{параллелепипеда, постр. на } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}}$,

где знак +, если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – правая тройка,
и знак −, если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – левая тройка

2) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны $\Leftrightarrow \vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$.

Алгебраич. свойства:

1) при перестановке $2^х$ векторов смеш. произв. меняет знак;
при циклической перестановке векторов смеш. произв. не меняется

2) линейность.

# I. Вычисление смеш. произв. с использ. алгебр. и геом. свойств.

## №2.125.

**Дано:**
$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - левая тройка
$|\vec{a}|=1,\ |\vec{b}|=2,\ |\vec{c}|=3$
$(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})=30^\circ,\ \vec{c}\perp\vec{a},\ \vec{c}\perp\vec{b}$
**Найти** $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

**Решение.**

1) $\vec{a}\vec{b}\vec{c} \underset{\text{т.к. тройка левая}}{=} -V_{\substack{\text{паралл-да,}\\ \text{постр. на}\\ \vec{a},\vec{b},\vec{c}}} =$

$= -S_{\substack{\text{паралл.}\\ \text{постр. на}\\ \vec{a},\vec{b}}} \cdot h =$

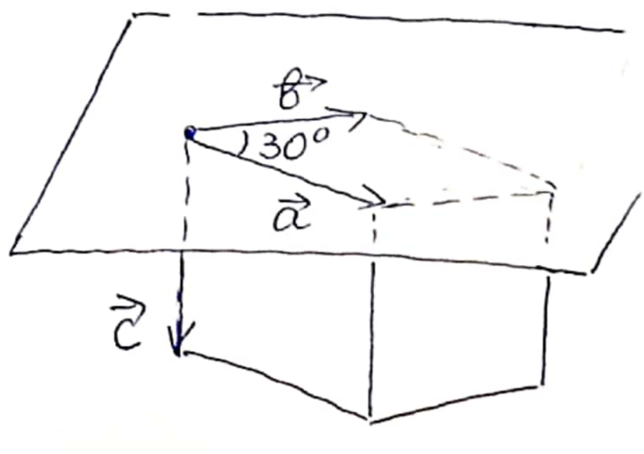
$= -|[\vec{a}, \vec{b}]| \underset{\text{т.к. } \vec{c}\perp\vec{a} \text{ и } \vec{c}\perp\vec{b}}{\cdot} |\vec{c}|$

2) $|[\vec{a}, \vec{b}]| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 1\cdot 2\cdot\sin 30^\circ = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$

3) Подст. 2) в 1): $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -1\cdot 3 = -3$

Ответ: $-3$

$\boxed{\text{Д/З I №2.124}}$



## №2.140(а)

а) Доказать тождество: $(\vec{a}+\vec{c})\vec{b}(\vec{a}+\vec{b}) = -\vec{a}\vec{b}\vec{c}$

Док-во.

Левая часть $= (\vec{a}+\vec{c})\vec{b}(\vec{a}+\vec{b}) =$

$= \vec{a}\vec{b}(\vec{a}+\vec{b}) + \vec{c}\vec{b}(\vec{a}+\vec{b}) =$

$= \underbrace{\vec{a}\vec{b}\vec{a}}_{=0} + \underbrace{\vec{a}\vec{b}\vec{b}}_{=0} + \vec{c}\vec{b}\vec{a} + \underbrace{\vec{c}\vec{b}\vec{b}}_{=0} =$

т.к. это тройки компланарных векторов (они содержат по 2 одинаковых вектора и на них не построить параллелепипед)

$= \vec{c}\vec{b}\vec{a} = \vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{a}\vec{b}\vec{c}$

циклич. перестановка

перестановка 2х векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

$\boxed{\text{Д/З II №2.140(б, в)}}$

## II. Вычисление смешанного произведения в координатах и исп. геом. св-в

|| Базис считается правым ||ортонорм.

### №2.126

Дано:

$\vec{a}_1\{1, -1, 3\}$

$\vec{a}_2\{-2, 2, 1\}$

$\vec{a}_3\{3, -2, 5\}$

Найти $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$.

Какова ориентация троек векторов

а) $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$

б) $\vec{a}_2, \vec{a}_1, \vec{a}_3$ ?

в) $\vec{a}_1, \vec{a}_3, \vec{a}_2$

Решение.

1) $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -7$

а) $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3 = -7 < 0 \Rightarrow \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ – левая тройка

Д/З III № 2.126 (б, в) Можно исп. св-ва определителей.

№ 2.127 (а)

Дано:
$\vec{a}_1\{2, 3, -1\}$
$\vec{a}_2\{1, -1, 3\}$
$\vec{a}_3\{1, 9, -11\}$

Образуют ли $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ базис во мн-ве всех векторов?

Решение.

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ образуют базис во мн-ве всех векторов $\Leftrightarrow$ $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ некомпланарны $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3 \neq 0$.

Найдём смеш. произведение

$\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 9 & -11 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ компланарны $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ не образуют базис.

Ответ: не образуют

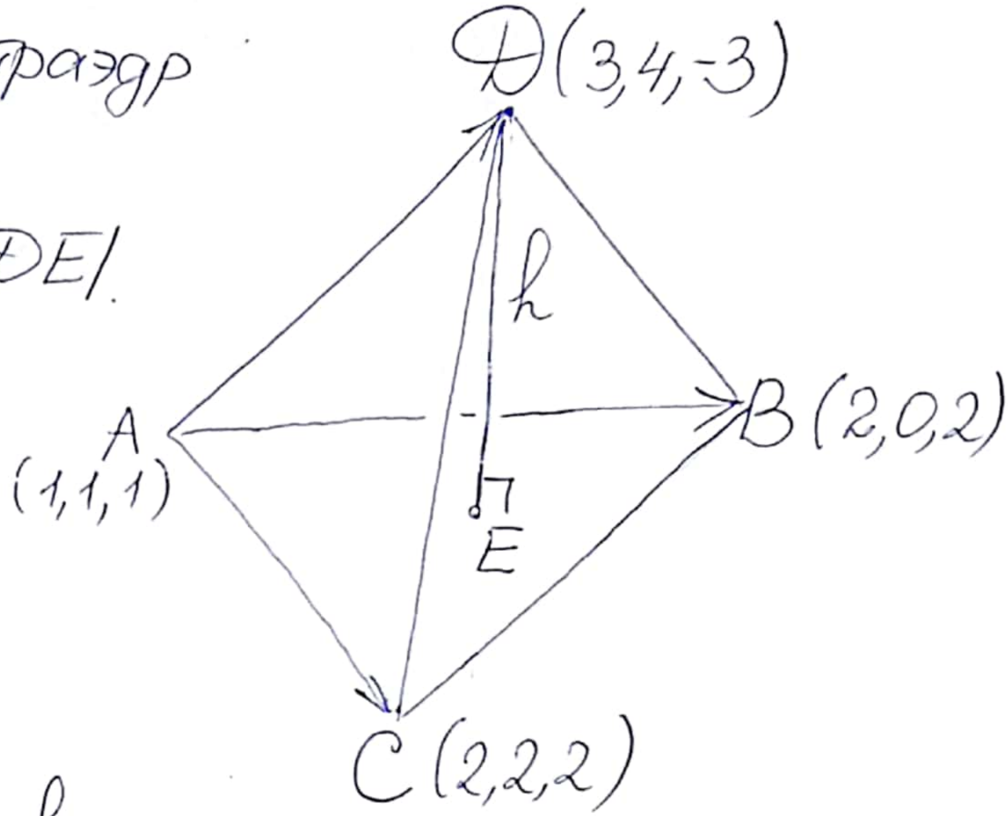
Д/З IV № 2.127 (б), № 2.135 (б)

# III Использование смешанного произведения для решения геом. задач

## №2.134

Дано: тетраэдр

Вычислить высоту $h = |DE|$.




Решение

1) $V_{тетр.} =$

$= \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} h =$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} S_{\substack{паралл\text{-}ма \\ на\ \vec{AB}, \vec{AC}}} h =$

$= \frac{1}{6} V_{\substack{паралл\text{-}да \\ на\ \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{h = \frac{V_{\substack{паралл\text{-}да \\ на\ \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}}}}{S_{\substack{паралл\text{-}ма \\ на\ \vec{AB}, \vec{AC}}}} = \frac{|\vec{AB}\,\vec{AC}\cdot\vec{AD}|}{|[\vec{AB}, \vec{AC}]|}}$$

2) $\vec{AD} = \{3-1, 4-1, -3-1\} = \{2, 3, -4\}$

$\vec{AC} = \{2-1, 2-1, 2-1\} = \{1, 1, 1\}$

$\vec{AB} = \{2-1, 0-1, 2-1\} = \{1, -1, 1\}$

3) $$|\vec{AB}\cdot\vec{AC}\cdot\vec{AD}| = \left|\begin{array}{c|l}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & -4\end{vmatrix} & \begin{array}{l}\leftarrow \vec{AB}\\ \leftarrow \vec{AC}\\ \leftarrow \vec{AD}\end{array}\end{array}\right|$$

$$= |-4+\cancel{3}-2-2-\cancel{3}-4| = |-12| = 12$$

4) $$[\vec{AB},\vec{AC}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix} =$$

$$= -2\vec{i} + 0\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$|[\vec{AB},\vec{AC}]| = \sqrt{(-2)^2+0^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

5) Подст. 3), 4) в 1): $h = \dfrac{12}{2\sqrt{2}} = \dfrac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$

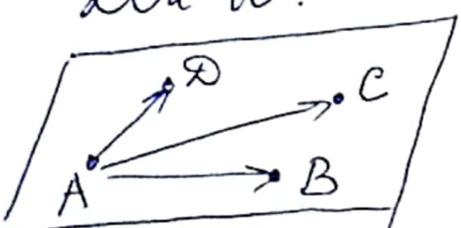
Ответ: $3\sqrt{2}$.

$\boxed{\text{Д/З V № 2.132, 2.133}}$

№ 2.137.

Доказать, что 4 точки $A(1,2,-1)$, $B(0,1,5)$, $C(-1,2,1)$ и $D(2,1,3)$ лежат в одной плоскости.

Док-во.




$A, B, C, D$ лежат в одной пл. $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ компланарны $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{AB}\cdot\vec{AC}\cdot\vec{AD} = 0$

1) Найдём координаты

$\vec{AB} = \{0-1;\ 1-2;\ 5-(-1)\} = \{-1,-1,6\}$

$\vec{AC} = \{-1-1;\ 2-2;\ 1-(-1)\} = \{-2,0,2\}$

$\vec{AD} = \{2-1,\ 1-2,\ 3-(-1)\} = \{1,-1,4\}$

2) Найдём $\vec{AB}\cdot\vec{AC}\cdot\vec{AD} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} =$

$= 0 + 12 - 2 - 0 - 2 - 8 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ A, B, C, D лежат в одной пл.

ч.т.д.

№ 2.138 (а)

Найти координаты четвертой вершины тетраэдра ABCD, если известно, что она лежит на оси Oy, а объём тетраэдра равен $v = 29$; $A(-1,10,0)$, $B(0,5,2)$, $C(6,32,2)$.

Решение.

1) $D \in Oy \Rightarrow D(0,y,0)$

2) $V_{тетр.} = \frac{1}{6} V_{\substack{паралл\text{-}да, \\ постр.\ на \\ \vec{AB},\vec{AC},\vec{AD}}} = \frac{1}{6} |\vec{AB}\cdot\vec{AC}\cdot\vec{AD}| \Rightarrow$

$\Rightarrow 6 \cdot V_{тетр.} = |\vec{AB}\cdot\vec{AC}\cdot\vec{AD}|$

3) $\vec{AB} = \{0-(-1), 5-10, 2-0\} = \{1,-5,2\}$
$\vec{AC} = \{6-(-1), 32-10, 2-0\} = \{7,22,2\}$
$\vec{AD} = \{0-(-1), y-10, 0-0\} = \{1, y-10, 0\}$

4) $|\vec{AB}\cdot\vec{AC}\cdot\vec{AD}| = \left| \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 7 & 22 & 2 \\ 1 & y-10 & 0 \end{vmatrix} \right| = |14(y-10) - 10 - 44 - 2(y-10)| = |12y - 174|$

5) Подставим $V_{тетр} = 29$ и 4) в 2):

$6 \cdot 29 = |12y - 174|$ Ответ: $(0,29,0)$, $(0,0,0)$

$\pm 174 = 12y - 174$

$\left[\begin{array}{l} y = 29 \Rightarrow D(0;29;0) \\ y = 0 \Rightarrow D(0;0;0) \end{array}\right.$

$\boxed{\text{Д/З VI №2138 (б)}}$