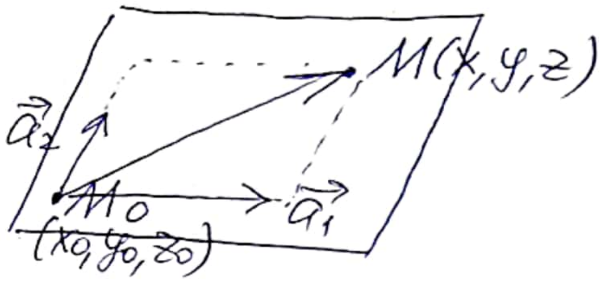
Семинар 7.

Уравнение плоскостей.

№2182(а) $\boxed{\text{ДЗ I № 2.182(б)}}$

Написать уравнение плоскости, проходящей через т. M_0 параллельно векторам $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, если
$M_0(1,1,1)$, $\vec{a}_1\{0,1,2\}$, $\vec{a}_2\{-1,0,1\}$

Решение.



1) Параметрическое ур-е:

$$\underset{M}{\underbrace{\begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}}} \begin{matrix} = \\ = \\ = \end{matrix} \underset{M_0}{\begin{matrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{matrix}} \begin{matrix} + \\ + \\ + \end{matrix} \underset{\vec{a}_1}{\begin{matrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{matrix}} \begin{matrix} u \\ u \\ u \end{matrix} \begin{matrix} + \\ + \\ + \end{matrix} \underset{\vec{a}_2}{\begin{matrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{matrix}} \begin{matrix} v \\ v \\ v \end{matrix}, \text{ где } u, v \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 0u + (-1)v \\ y = 1 + 1u + 0v \\ z = 1 + 2u + 1v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - v \\ y = 1 + u \\ z = 1 + 2u + v \end{cases}, u, v \in \mathbb{R}$$

2) Общее ур-е ($Ax+By+Cz+D=0$) получим из параметрического, посчитав определитель

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & a_1 & a_2 \\ y - y_0 & b_1 & b_2 \\ z - z_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ y-1 & 1 & 0 \\ z-1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (y-1)\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1)1 - (y-1)2 + (z-1)1 = 0 \Rightarrow \boxed{x - 2y + z = 0}$$

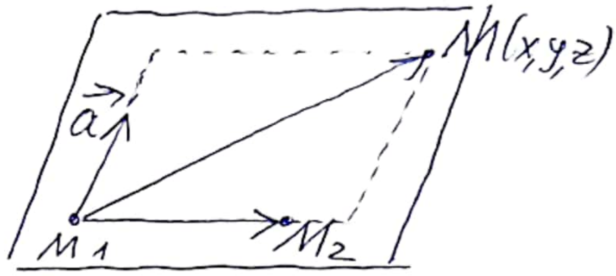
Ответ: ↑

В ОТВЕТАХ ВСЕГДА ОБЩЕЕ УР-Е.

№ 2.183(а) ДВ II № 2.183(б)

Написать уравнение плоскости, проходящей через точки M_1 и M_2 параллельно вектору $\vec{a}$, если $M_1(1,2,0)$, $M_2(2,1,1)$, $\vec{a}\{3,0,1\}$.

Решение.



1) Параметрическое ур-е:

$$\begin{cases} \underbrace{x}_{M} = \underbrace{x_1}_{M_1} + \underbrace{(x_2-x_1)}_{\overrightarrow{M_1M_2}}u + \underbrace{a}_{\vec{a}}v \\ y = y_1 + (y_2-y_1)u + b v \\ z = z_1 + (z_2-z_1)u + c v \end{cases}, \text{ где } u,v \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 + (2-1)u + 3v \\ y = 2 + (1-2)u + 0v \\ z = 0 + (1-0)u + 1v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + u + 3v \\ y = 2 - u \\ z = u + v \end{cases}, \ u,v \in \mathbb{R}$$

2) Общее ур-е $Ax+By+Cz+D=0$ получим из параметрического, посчитав определитель

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & x_2-x_1 & a \\ y-y_1 & y_2-y_1 & b \\ z-z_1 & z_2-z_1 & c \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 2-1 & 3 \\ y-2 & 1-2 & 0 \\ z-0 & 1-0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1)\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1)(-1) - (y-2)(-2) + z\cdot 3 = 0$$

$$-x + 2y + 3z - 3 = 0$$

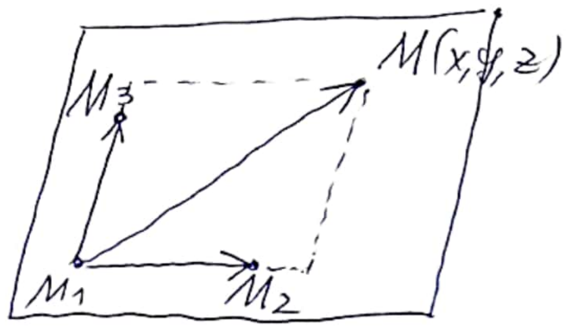
$$\boxed{x - 2y - 3z + 3 = 0} \leftarrow \text{Ответ:}$$

№ 2.184 (а) ДЗ III № 2.184(б)

Написать уравнение плоскости, проходящей через три точки M_1, M_2 и M_3, если $M_1(1,2,0)$, $M_2(2,1,1)$, $M_3(3,0,1)$

Решение.

1) Параметрическое ур-е:



$$\begin{cases} \underbrace{x}_{M} = \underbrace{x_1}_{M_1} + \underbrace{(x_2-x_1)}_{\overrightarrow{M_1M_2}}u + \underbrace{(x_3-x_1)}_{\overrightarrow{M_1M_3}}v \\ y = y_1 + (y_2-y_1)u + (y_3-y_1)v \\ z = z_1 + (z_2-z_1)u + (z_3-z_1)v \end{cases}$$

$M \quad M_1 \quad \overrightarrow{M_1M_2} \quad \overrightarrow{M_1M_3} \qquad u, v \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 + (2-1)u + (3-1)v \\ y = 2 + (1-2)u + (0-2)v \\ z = 0 + (1-0)u + (1-0)v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + u + 2v \\ y = 2 - u - 2v \\ z = u + v \end{cases}, \quad u, v \in \mathbb{R}$$

2) Общее ур-е $Ax+By+Cz+D=0$ получим из параметрического, посчитав определитель

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ y-y_1 & y_2-y_1 & y_3-y_1 \\ z-z_1 & z_2-z_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 2-1 & 3-1 \\ y-2 & 1-2 & 0-2 \\ z-0 & 1-0 & 1-0 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1)\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1)1 - (y-2)(-1) + z \cdot 0 = 0$$

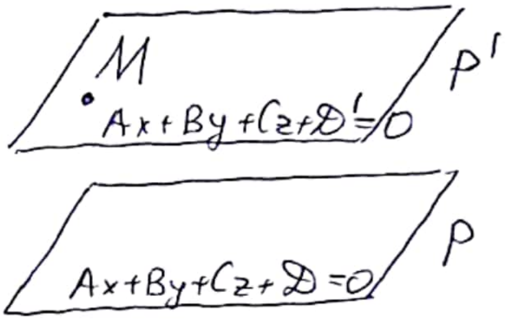
$$\boxed{x+y-3=0}$$

Ответ: $x+y-3=0$

№ 2.180(а) ДЗ IV № 2.180(б)

Заданы плоскость P и точка M.
① Написать уравнение плоскости P', проходящей через M и параллельно P.
② Вычислить расстояние $\rho(P, P')$ между плоскостями P и P', если $P: -2x+y-z+1=0$, $M(1,1,1)$.

Решение.



① 1) Ур-е плоскости
$P: -2x+y-z+1=0$.
Плоскость $P' \parallel P \Rightarrow$
$\Rightarrow$ будем искать её уравнение в виде
$-2x+y-z+D'=0$.

2) Найдём D'.
Точка $M \in P' \Rightarrow$ её координаты удовл. ур-ю плоскости P'. Подставим их в ур-е P':

$$-2\cdot 1+\cancel{1}-\cancel{1}+D'=0$$
$$D'=2$$

След, ур-е P': $\boxed{-2x+y-z+2=0}$

② Расстояние $\rho(P', P) = \rho(M, P) = \dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$
где $M(x_0, y_0, z_0)$.

$$\Rightarrow \rho(P', P) = \frac{|-2\cdot 1+\cancel{1}-\cancel{1}+1|}{\sqrt{(-2)^2+1^2+1^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{6}}.$$

Ответ: $-2x+y-z+2=0$; $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

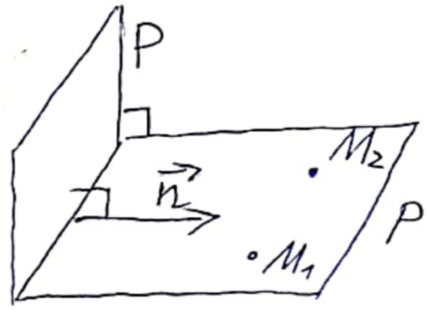
№ 2.181 (а) ДЗ V № 2.181 (б)

Написать уравнение плоскости p', проходящей через заданные точки M_1 и M_2, и перпендикулярной заданной плоскости p, если p: $-x+y-1=0$

Сист. к-т прямоугольная

$M_1(1,2,0)$, $M_2(2,1,1)$

Решение.



1) Общее ур-е плоскости p в прямоуг. системе координат из условия:

$-x+y-1=0$, т.е. $\underbrace{(-1)}_{A}x+\underbrace{1}_{B}\cdot y+\underbrace{0}_{C}\cdot z-1=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ вектор $\vec{n}\{A,B,C\}=\{-1,1,0\} \perp$ плоскости p.

Т.к. по условию пл. p $\perp$ пл. p', то вектор $\vec{n}$ плоскости p'.

След, для пл. p' известны вектор $\vec{n}$ и две точки M_1, M_2. Такую задачу мы уже решали (см. № 2.183 (а)).

Найдём (для краткости) сразу общее ур-е плоскости p':

из $\begin{vmatrix} x-x_1 & x_2-x_1 & A \\ y-y_1 & y_2-y_1 & B \\ z-z_1 & z_2-z_1 & C \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 2-1 & -1 \\ y-2 & 1-2 & 1 \\ z-0 & 1-0 & 0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}-(y-2)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=0$

$(x-1)(-1)-(y-2)1+z\cdot 0=0$

$-x-y+3=0$

Ответ: $x+y-3=0$.